This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

510.5
A673

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Königl. Geheimer Regierungs-Rath

und

Professor zu Greifswald.

Funfzigster Theil.

Mit eilf lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1869.

162477

Inhaltsverzeichniss des funfzigsten Theils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.		
XVI.	Ein merkwürdiger Brief des achtzehnjährigen Lagrange an den Conte Giulio Carlo da Fagnano. Nach Herrn Angelo Genocchi in Turin mitgetheilt von dem Herausgeber	II.	223
	Arithmetik.		
IX.	Bemerkungen zu den Bd. 48. pag. 480 des Archivs von Herrn Prof. Ligowski mitgetheilten Uebungsaufgaben. Von Herrn Professor C. A. Bretschneider in Gotha	I.	118
XV.	De seriebus quibusdam annotationes. A Christiano Fr. Lindman, Lectore Strengn. . .	II.	219
XVII.	Verschiedene Aufsätze zur Zahlenlehre. Von Herrn P. Seeling in Hückeswagen . . .	II.	232
XVIII.	Ueber die Summirung gesetzmässig ausgewählter Reihenglieder. Von Herrn Dr. R. Most, Lehrer an der Realschule I. Ord. zu Stettin	II.	239
XX.	Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Par V. G. Imschenetsky, professeur à l'Université Impériale de Kazan	III.	278
		IV.	369

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Geometrie.		
I.	Ueber die Construction eines einfachen Polygons, welches einem gegebenen gleichnamigen Polygone zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben ist. Von Herrn Gymnasiallehrer Nawrath in Neisse in Schlesien	I.	1
II.	Der Lehrsatz des Matthew Stewart. Von Herrn Prof. C. A. Bretschneider in Gotha	I.	11
V.	Ueber die gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte und ihrer Krümmungskreise, insbesondere auch über die Maxima und Minima dieser Sehnen. Von dem Herausgeber	I.	69
VI.	Bemerkungen über einen im Archiv besprochenen Lehrsatz. Von Herrn Professor C. A. Bretschneider in Gotha	I.	103
VII.	Ueber einen Satz vom sphärischen Dreieck. Von Herrn Franz Unferdinger, Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markte in Wien	I.	107
IX.	Schreiben des Herrn Franz Unferdinger, Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markte in Wien an den Herausgeber. (Ueber die zwischen den den Halbmessern der fünf Berührungskugeln einer dreiseitigen Pyramide bestehende Relation)	I.	110
IX.	Ueber Fermat's geometrischen Satz. Von Herrn Oberlehrer Dr. Stammer an der Realschule in Düsseldorf	I.	111
IX.	Auszug aus einem Briefe des Herrn G. A. Vorsterman van Oyen in Aardenburg in den Niederlanden an den Herausgeber (Beweise geometrischer Sätze vom ebenen Dreieck von W. Wondergem und M. Scheele, Schülern des Instituts Vorsterman van Oyen in Aardenburg)	I.	112
IX.	Ueber einen geometrischen Satz. Von dem		

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Herausgeber. (Wenn um ein gleichseitiges Dreieck *ABC*, dessen Seite *a* sein mag, ein Kreis und ein zweiter mit diesem concentrischer Kreis mit dem beliebigen Halbmesser *r* beschrieben ist, so ist, wenn *P* ein beliebiger Punkt in diesem zweiten mit dem ersten concentrischen Kreise ist, die Summe der Quadrate der Entfernungen *PA*, *PB*, *PC* des Punktes *P* von den Spitzen *A*, *B*, *C* des gleichseitigen Dreiecks *ABC* eine constante Grösse, nämlich von der Lage des Punktes *P* in dem zweiten, dem ersten concentrischen Kreise unabhängig. M. s. Gli Elementi d'Euclide con note, aggiunte ed esercizi, ad uso de'Ginnasi e de'Licei, per cura dei Professori **Enrico Betti** e **Francesco Brioschi**. Firenze. Successori Le Monnier. 1868.)	I.	115
XI.	Applications nouvelles des déterminants à l'algèbre et à la géométrie. Par Monsieur J. Versluys, Professeur de Mathématiques à Groningue (Pays-Bas)	II.	157
XII.	Ueber conforme Kartenprojectionen. Von dem Herausgeber	II.	176
XIII.	Note. Par Monsieur J. Versluys, Professeur de Mathématiques à Groningue (Pays-Bas)	II.	210
XVIII.	Zu der Lehre von den Transversalen im Dreieck und der dreiseitigen Pyramide. Von Herrn Dr. R. Most, Lehrer an der Realschule 1. Ordnung in Stettin	II.	238
XXI.	Die harmonischen Polarcurven. Von Herrn Prof. C. A. Bretschneider in Gotha	IV.	475

Trigonometrie.

VII.	Ueber einen Satz vom sphärischen Dreieck. Von Herrn Franz Unferdinger, Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markte in Wien	I.	107

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Geodäsie und Astronomie.		
XII.	Ueber conforme Kartenprojectionen. Von dem Herausgeber	II.	176
	Mechanik.		
IV.	Sur le mouvement rectiligne d'une molécule, soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique rationelle et entière de la distance d'un centre fix. Par Monsieur C. F. E. Björling jun., Lector à l'école supérieure de Halmstad en Suède	I.	56
XIV.	Ueber den Schwerpunkt des TrapezIums, insbesondere über die graphische Bestimmung desselben. Von dem Herausgeber	II.	212
	Physik.		
III.	Die Gesetze der Lichtbrechung. Von Herrn Dr. Jos. Kudelka, Kaiserl. Königl. Lyceal-Professor zu Linz	I.	18
IV.	Sur le mouvement rectiligne d'une molécule, soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique rationelle et entière de la distance d'un centre fixe. Par Monsieur C. F. E. Björling jun., Lector à l'école supérieure de Halmstad en Suède .	I.	56
X.	Die Gesetze der Lichtbrechung. (Fortsetzung). Von Herrn Dr. Jos. Kudelka, Kais. Königl. Lyceal-Professor zu Linz	II.	121
XIX.	Die Gesetze der Lichtbrechung. (Schluss). Von Herrn Dr. Jos. Kudelka, Kais. Königl. Lyceal-Professor zu Linz	III.	241
	Uebungsaufgaben für Schüler.		
VIII.	Wenn *ABCD* (Taf. V. Fig. VII.) ein Trapez mit den parallelen Seiten *AB* und *CD* ist und		

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	AC und BD dessen Diagonalen sind, so ist sehr leicht zu beweisen, dass $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$ ist. E. Morén, elev vid Örebro elem. läroverk	I.	109
VIII.	1. Aus den Gleichungen $R\sin x = r\sin y$, $R\cos 2x\cos y = r\cos x\cos 2y$ die Grössen x und y zu bestimmen. 2. Die Gleichungen: $x+y=3+v$, $u+z=3-v$, $x^2+y^2-u^2-z^2=6$, $x^3+y^3+u^3+z^3=306$, $x^4+y^4-u^4-z^4=606$ aufzulösen. Lector Lindman (Strengnäs)	I.	109
VIII.	Zu beweisen, dass, wenn a, b, c die Seiten eines Dreiecks sind, immer $\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) > a^3+b^3+c^3+3abc$ sei. Collins	I.	109

Literarische Berichte *).

CLXXXXVII.	I.	1
CLXXXXVIII.	II.	1
CLXXXXIX.	III.	1
CC.	IV.	1

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

Stanford Library

I.

Ueber die Construction eines einfachen Polygons, welches einem gegebenen gleichnamigen Polygone zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben ist.

Von

Herrn Gymnasiallehrer *Nawrath*
in Neisse in Schlesien.

(Fig. s. Taf. IV.)

Ist es möglich in der Ebene ein einfaches Polygon zu construiren, welches einem gegebenen gleichnamigen Polygone zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben ist?

Diese Frage ist von Herrn Möbius gestellt. Seine Untersuchung ergab, dass diese Aufgabe beim Dreieck und Viereck keine Lösung gestattet. Es war mir interessant nachzusehen, ob denn diese Aufgabe auch beim einfachen Fünfeck, überhaupt bei einem einfachen Polygone in der Ebene, unlösbar ist.

Einen Fingerzeig, wie man diese Untersuchung führen kann, fand ich in Steiner's „Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten." Seite 94 behandelt Steiner die Aufgabe: Wenn in einer Ebene zwei gleichnamige Vielecke gegeben sind, ein drittes zu zeichnen, welches dem einen umschrieben, dem andern eingeschrieben ist. Es liegt der Gedanke nahe die beiden gegebenen Vielecke als zusammenfallend zu betrachten, und dann ergiebt sich meine Untersuchung als ein specieller Fall von jener allgemein von Steiner geführten.

Ein einfaches n-Eck entsteht, wenn man n Punkte, nach irgend einer Ordnung genommen, in einem Zuge durch n-maliges Absetzen

510.5
A673

Wir betrachten nun das Viereck 1234 und bezeichnen seine Seiten, wie oben angegeben:

$$23 = I,$$
$$34 = II,$$
$$41 = III,$$
$$12 = IV.$$

Um zu erkennen, ob in den beiden Punktreihen I und I_1 entsprechende Punkte zusammenfallen, müssen wir die Lage irgend dreier entsprechender Punktenpaare, durch welche, wie bekannt, die projectivische Beziehung vollständig bestimmt ist, untersuchen. Wir suchen zu den drei ausgezeichneten Punkten 3, y und 2 der Punktreihe I die ihnen entsprechenden in der Punktreihe I_1. (Fig. I.). Der Strahl

13 trifft II in 3.
23 „ III „ y,
3y „ IV „ 2,
42 „ I „ 2.

Dem Punkte 3 der Punktreihe I entspricht der Punkt 2 der Punktreihe I_1; sie mögen resp. mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ bezeichnet werden. Der Strahl

1y trifft II in 4,
24 „ III „ 4,
34 „ IV „ z,
4z „ I „ 3.

Es entspricht also dem Punkte y der Punktreihe I der Punkt 3 der Punktreihe I_1; sie mögen resp. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ heissen. Der Strahl

12 trifft II in z,
2z „ III „ 1,
31 „ IV „ 1,
41 „ I „ y.

In den Punktreihen I und I_1 sind also 2 und y entsprechende Punkte; wir wollen sie resp. $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ nennen.

Es bleibt noch übrig zu untersuchen, ob bei diesem Entsprechen von Punkten irgend welche entsprechende Punkte zu[illegible]len.

[illegible]zeichnen wir einen veränderlichen Punkt der Punkt-

reihe *I* mit x, seinen entsprechenden in der Punktreihe I_1 mit x_1 und lassen den Punkt x die Punktreihe *I* durchlaufen. Befindet sich x in a, so ist x_1 in a_1. Bewegt sich x von a nach b, so bewegt sich x_1 von a_1 durch den unendlich entfernten Punkt bis b_1 und kommt erst in b_1 an, wenn x in b ist. Der Punkt x hat also seinen entsprechenden auf der Strecke ab nicht getroffen. Rückt nun x in derselben Richtung von b nach c, so rückt x_1 von b_1 nach c_1 und trifft in c_1 ein, wenn x in c ist. Auf der Strecke bc hat daher der Punkt x seinen entsprechenden x_1 auch nicht begegnet. Geht nun endlich x von c durch den unendlich entfernten Punkt a, so geht x_1 von c_1 nach a_1 und langt in a_1 an, wenn x in a ist; also auch auf dieser Strecke haben sich x und x_1 nicht getroffen. Beide Punkte x und x_1 haben demnach die Seite $23 = I$ in ihrer ganzen Unendlichkeit durchlaufen ohne sich zu begegnen. Daraus folgt, dass zusammenfallende entsprechende Punkte in den beiden projectivischen Punktreihen *I* und I_1 nicht existiren. Hieraus ergiebt sich, dass kein Viereck construirt werden kann, welches dem gegebenen zugleich eingeschrieben und umschrieben wäre.

Das Strahlbüschel 1 und das Strahlbüschel, welches entsteht, wenn man sämmtliche Punkte der Punktreihe I_1 mit der letzten Ecke verbindet, sind projectivisch. Die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen müssen also auf einem Kegelschnitte liegen, welcher durch die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel oder die beiden Ecken des Polygons hindurch geht. Wenn in den Punktreihen *I* und I_1 entsprechende Punkte zusammenfallen, so sind diese Punkte zugleich Durchschnittspunkte je zweier entsprechenden Strahlen der projectivischen Strahlbüschel, mithin Punkte eines Kegelschnitts. Da beim Viereck auf der Geraden *I* keine entsprechenden Punkte zusammenfallen, so ersehen wir, dass der durch die beiden projectivischen Strahlbüschel 1 und 4 erzeugte Kegelschnitt die Linie *I* nicht schneidet. Wir haben also, obwohl auf anderem Wege, dasselbe Resultat beim Viereck gefunden, wie Herr Möbius, und gehen jetzt zum Fünfeck über.

Es sei also das Fünfeck 12345 gegeben. Wir bezeichnen $34 = I$, $45 = II$, $51 = III$, $12 = IV$, $25 = V$. Wir nehmen von dem gegebenen Fünfeck (Fig. II.) die vier Punkte 1, 2, 3, 5 und die vier Geraden *II*, *III*, *IV*, *V* als fest an und lassen den Punkt 4 auf der Geraden *II* sich fortbewegen, oder was dasselbe ist, die Gerade *I* sich um den Punkt 3 drehen. Von vornherein ist klar, dass jeder Lage der Geraden *I* ein bestimmter durch die festen Punkte 1 und 5 gehender Kegelschnitt entsprechen wird. Diese

Kegelschnitte haben aber auch noch andere feste Punkte gemeinschaftlich; denn

1$\mathfrak{a}$	trifft	*II*	in	*a*,
2*a*	„	*III*	„	*d*,
3*d*	„	*IV*	„	2,
42	„	*V*	„	2;

52 entspricht also dem Strahle 1$\mathfrak{a}$ oder 1*a* des Büschels 1, und zwar sind diese beiden Strahlen fest, wenn auch der Punkt 4 auf der Geraden *II* sich bewegt. Ihr Schnittpunkt α ist daher allen Kegelschnitten, welche der Reihe nach den verschiedenen Lagen des Punktes 4 auf der Geraden *II* entsprechen, gemeinschaftlich. Der Punkt α lässt sich leicht finden: man verbinde den Schnittpunkt (*II*, *V*) = *a* mit der Ecke 1 und ziehe 25, beide Linien schneiden sich in α. Ferner trifft:

54	die	Gerade	*V*	in	*a*,
4*a*	„	„	*IV*	„	*b*,
3*b*	„	„	*III*	„	*c*,
2*c*	„	„	*II*	„	β;

1β und 54 = *II* sind entsprechende Strahlen, welche, wie leicht ersichtlich, ihre Lage nicht ändern, wenn auch der Punkt 4 sich ändert. Ihr Schnittpunkt β ist daher auch allen Kegelschnitten gemeinschaftlich. β ist leicht zu finden; erstens liegt er auf *II*; ferner verbinde man den Schnittpunkt (*II*, *IV*) = *b* mit 3 und erhält auf *III* den Punkt *c*; zieht man 2*c*, so schneiden 2*c* und *II* sich in β. Ein fünfter Punkt $\mathfrak{x}$ des jedesmaligen Kegelschnitts lässt sich ebenfalls leicht bestimmen:

12	trifft	*II*	in	*b*,
2*b*	„	*III*	„	1,
31	„	*IV*	„	1,
41	„	*V*	„	*e*;

5*e* und 12 sind entsprechende Strahlen der Büschel 1 und 5, mithin ihr Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ ein Punkt des Kegelschnitts. Um den Punkt zu construiren, ziehe man 14, welcher auf der Geraden *V* den Punkt *e* bestimmt. Der Strahl 5*e* trifft den festen Strahl 12 in $\mathfrak{x}$. Wenn 4 auf der Geraden *II* sich bewegt, so bleibt der Strahl 12 fest; aber der Punkt *e* beschreibt auf *V* und mit diesem der Punkt $\mathfrak{x}$ auf dem festen Strahl 12 = *IV* eine Punktreihe. Wir haben also folgendes Resultat:

Wenn der Punkt 4 auf der Geraden *II* eine Punktreihe durchläuft, so entspricht jeder Lage dieses Punktes ein Kegelschnitt, welcher durch die vier festen Punkte 1, 5, α, β hindurchgeht und jedesmal noch durch einen fünften veränderlichen Punkt x auf der Geraden *IV* bestimmt ist,

oder:

wenn die Gerade *I* ein Strahlbüschel beschreibt, dessen Mittelpunkt der Punkt 3 ist, so entspricht jeder Lage von *I* ein Kegelschnitt, welcher durch die vier festen Punkte 1, 5, α, β und einen veränderlichen Punkt x auf der Geraden *IV* bestimmt ist.

Es fragt sich, wie der Strahl *I* gelegt werden muss, damit er seinen entsprechenden Kegelschnitt treffe. Mit der Beantwortung dieser Frage ist zugleich die Lösung gegeben für folgende Aufgabe: den Punkt 4 auf der Geraden *II* so zu wählen, damit dem so entstehenden Fünfeck zwei andere Fünfecke zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben werden können.

Alle Kegelschnitte, welche durch vier feste Punkte hindurchgehen, bilden ein Kegelschnittbüschel. Es ist bekannt, dass jede Transversale ein Kegelschnittbüschel in einem Punktsystem trifft. Dieses Punktsystem ist entweder elliptisch oder hyperbolisch. Ist es elliptisch, so sind (Schröter's Theorie der Kegelschnitte, S. 264) alle Punktpaare reell; d. h. dann trifft jeder Kegelschnitt des Büschels die Transversale in reellen Punkten. Ist dagegen das Punktsystem hyperbolisch, so treffen nicht alle Kegelschnitte des Büschels die Transversale in reellen Punktenpaaren, sondern einige auch in imaginären. Wenn wir also das Kegelschnittbüschel als gegeben betrachten, und das von den Kegelschnitten auf der Geraden ausgeschnittene Punktsystem elliptisch ist, so wird jeder Kegelschnitt, also auch der der gewählten Lage von *I* entsprechende, die Gerade *I* in zwei reellen Punkten treffen. In diesem Falle liefert also immer das gegebene Fünfeck zwei andere, welche ihm zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben werden können. Ist aber das Punktsystem hyperbolisch, so giebt es unter den Punktenpaaren imaginäre, das heisst, dann können nicht immer Fünfecke dem gegebenen zugleich eingeschrieben und umschrieben werden.

Es entsteht nun die Frage, wann das Punktsystem auf *I* elliptisch, und wann hyperbolisch ist. Auch dafür giebt es ein Kriterium. (Schröter's Theorie der Kegelschnitte, S. 236.). Wenn

nämlich von den vier Mittelpunkten des Büschels eine ungerade Anzahl zu beiden Seiten von der Transversale liegt, so ist das Punktsystem auf derselben elliptisch; liegt eine gerade Anzahl zu beiden Seiten, so ist das Punktsystem hyperbolisch, falls nämlich die vier Mittelpunkte so gelegen sind, dass jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet. Liegen dagegen die vier Mittelpunkte so, dass einer von ihnen in dem von den drei anderen gebildeten Dreieck liegt, so findet das Umgekehrte statt: das Punktsystem auf der Geraden ist hyperbolisch, wenn eine ungerade Anzahl von den vier Mittelpunkten des Büschels, dagegen elliptisch, wenn eine gerade Anzahl zu beiden Seiten der Transversale liegt.

Wenn also die Punkte 1, 2, 3, 5 und die Geraden *II*, *III*, *IV*, *V* gegeben sind, so construire man noch die Punkte α und β. Bilden die vier Punkte 1, 5, α, β ein Viereck mit keinem einspringenden Winkel, so ziehe man die Gerade so, dass eine ungerade Anzahl von den vier Punkten zu beiden Seiten von *I* liegen; bilden dagegen die Punkte 1, α, β, 5 ein Viereck mit einspringendem Winkel, so ziehe man die Gerade *I* in der Weise, dass eine gerade Anzahl von diesen Punkten auf derselben Seite von *I* liegen; dann können jedesmal dem so construirten Fünfeck zwei Fünfecke zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben werden.

Die zusammenfallenden Punkte der auf der Geraden *I* liegenden Punktreihen werden leicht vermittelst eines Kreises construirt. (Schröter's Theorie der Kegelschnitte, S. 47.). Zu diesem Behufe construire man auf der Geraden drei Paar entsprechende Punkte; da 1α und 5α entsprechende Strahlen der den Kegelschnitt erzeugenden Strahlbüschel sind, so sind die Schnittpunkte derselben auf der Geraden *I* die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$. Ebenso sind 1β und 5β entsprechende Strahlen, mithin ihre Schnittpunkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ auf *I* entsprechende Punkte. Drittens sind $1\mathfrak{r}$ und $5\mathfrak{r}$ entsprechende Strahlen, mithin ihre Schnittpunkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ mit *I* entsprechende Punkte. Nun nehmen wir in einem beliebigen Kreise einen Punkt *B* willkührlich an, verbinden die Punkte $\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{c}_1$ mit *B* durch Strahlen, welche die Peripherie zum zweiten Male resp. in den Punkten $\alpha\ \alpha_1\ \beta\ \beta_1\ \gamma\ \gamma_1$ treffen, bestimmen ferner die Schnittpunkte $(\alpha\beta_1, \alpha_1\beta)$, $(\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma)$ und ihre Verbindungslinie $\mathfrak{L}$; die Schnittpunkte der letzteren mit dem Kreise verbinde man mit *B* durch Strahlen, welche die Gerade *I* in den zusammenfallenden Punkten treffen.

In Fig. III ist die ausgezogene Figur das gegebene Fünfeck,

die punctirte Figur dagegen eins von den beiden Fünfecken, welches dem gegebenen zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben ist.

Wir gehen jetzt zu dem n-Eck über.

Schon im Anfange dieser Untersuchung fanden wir, dass es Polygone giebt, welchen immer gleichnamige Polygone zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben werden können, und zwar sind dies jene Polygone, bei welchen die auf einander liegenden Punktreihen I und I_1 ungleichliegend sind. Bei welchen Polygonen dies stattfindet, lässt sich leicht mittelst folgender unmittelbar ersichtlichen Sätze erkennen:

Wenn die Mittelpunkte zweier perspectivisch liegenden Strahlbüschel auf derselben Seite von ihrem perspectivischen Durchschnitt liegen, so haben die beiden Strahlbüschel dieselbe Drehrichtung, z. B. wie der Weiser einer Uhr. Liegen sie auf entgegengesetzten Seiten, so haben sie entgegengesetzte Drehrichtung, also das eine Strahlbüschel hat die Drehrichtung des Weisers einer Uhr, das andere die entgegengesetzte.

Wenn die beiden concentrischen Strahlenbüschel 1 und 1_1, welche entstehen, wenn die Punktreihen I und I_1 mit der Ecke 1 durch Strahlen verbunden werden, dieselbe Drehrichtung haben, so sind die Punktreihen I und I_1 gleichliegend, im entgegengesetzten Falle ungleichliegend.

Aus diesen beiden Sätzen folgt, dass, wenn keinmal die Mittelpunkte je zweier auf einander folgenden Strahlbüschel auf entgegengesetzten Seiten von ihrem perspectivischen Durchschnitt liegen, die concentrischen Strahlenbüschel 1 und 1_1 dieselbe Drehrichtung haben, die Punktreihen I und I_1 also gleichliegend sind. Dasselbe ist der Fall, wenn die Zahl, wie oftmal die Mittelpunkte je zweier auf einander folgenden Büschel auf derselben Seite von ihrem perspectivischen Durchschnitte liegen, eine gerade ist. Ist diese Zahl dagegen ungerade, so sind die auf einander liegenden Punktreihen I und I_1 ungleichliegend.

Wir erwähnten, dass das Strahlbüschel 1, welches auf der Geraden I die Punktreihe I bestimmt, mit dem Strahlenbüschel 2 perspectivisch liegt; ihr perspectivischer Durchschnitt ist die Gerade II. Das Strahlbüschel 2 ist perspectivisch mit dem Strahlbüschel 3; ihr perspectivischer Durchschnitt ist die Gerade III u. s. w. Das Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt die letzte Ecke ist, ist

perspectivisch mit dem zweiten Strahlbüschel I_1, dessen Mittelpunkt auch die Ecke 1 ist; ihr perspectivischer Durchschnitt ist die zweite auf der Geraden *I* liegende Punktreihe I_1.

Aus dem Erwähnten ergibt sich leicht folgendes Resultat:

Wenn wir ein einfaches Polygon als eine gebrochene in sich selbst zurückkehrende Linie betrachten, seine Ecken der Reihe nach mit 1, 2, 3 ... und seine Seiten, wie zu Anfang dieser Untersuchung festgesetzt, mit *I*, *II*, *III* u. s. w. bezeichnen, so kann die Zahl, wie oftmal eine Seite oder ihre Verlängerung die gleichnamige Ecke von der unmittelbar vorangehenden trennt, eine gerade oder ungerade sein. Im letzteren Falle können dem Polygone immer zwei gleichnamige zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben werden.

Mit Hilfe dieses Resultats lassen sich Polygone, welchen andere gleichnamige zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben werden können, leicht construiren und wir versuchen dies bei einem Sechseck. Zu diesem Behufe zeichnen wir ein Sechseck, welches keinen einspringenden Winkel hat; dann kann man sich leicht überzeugen, dass die auf einander liegenden Punktreihen *I* und I_1 gleichliegend sind, sie sollen aber ungleichliegend werden.

Man bezeichne in Fig. IV.:

$$34 = I,$$
$$45 = II,$$
$$56 = III,$$
$$61 = IV,$$
$$12 = V,$$
$$23 = VI,$$

und lasse die Gerade, welche die letzte Ecke mit der ersten verbindet, also die Gerade *IV*, ein Strahlbüschel beschreiben, dessen Mittelpunkt die Ecke 1 ist; dann durchläuft die Ecke 6 auf der Geraden *III* eine Punktreihe. Verlängern wir 13 bis α, 14 bis β, 23 bis γ, 34 bis δ und begleiten den Punkt 6 von dem Punkte δ aus auf seinem ganzen Wege bis δ zurück, dann bemerken wir Folgendes: Ist der Punkt 6 innerhalb der Strecke $\delta\alpha$, so wird keinmal eine Seite, oder ihre Verlängerung die gleichnamige Ecke von der vorhergehenden trennen; die Punktreihen *I* und I_1 sind also gleichliegend. Ist der Punkt 6 innerhalb der Strecke $\alpha\beta$, so trennt die Gerade *IV* in ihrer Verlängerung die Ecken 3 und 4. Bewegt sich der Punkt 6 vom Punkte γ bis zu dem unendlich entfernten Punkte hin, so wird jetzt die Gerade *VI*

in ihrer Verlängerung die Ecken 5 und 6 von einander trennen. Ist der Punkt in der gemeinschaftlichen Strecke $\beta\gamma$, so trennt die Verlängerung der Geraden *IV* die Ecken 4 und 3, ebenso die Verlängerung von *VI* die Ecken 5 und 6; daher sind für diese Strecke die Punktreihen *I* und I_1 gleichliegend. Gelangt der Punkt 6 durch den unendlich entfernten Punkt auf die andere Seite der Geraden *III*, so trennt die Gerade *I* die Ecken 1 und 6 und zwar so lange, bis der Punkt 6 nach δ kommt. Es kann also der Punkt 6 innerhalb der Strecke $\alpha\gamma$, und in der Strecke von β durch den unendlich entfernten Punkt bis δ liegen; dann können jedesmal dem so entstandenen Sechseck zwei andere zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben werden.

Ganz dieselbe Untersuchung lässt sich für das Siebeneck, Achteck u.s.w. anstellen. Die zusammenfallenden Punkte werden immer aus drei Paaren entsprechender Punkte vermittelst eines Kreises, wie oben geschehen, construirt.

II.

Der Lehrsatz des Matthew Stewart.

Von

Herrn Prof. *C. A. Bretschneider*

in Gotha.

(Figuren s. Taf. IV.)

§. 1.

In den letzterschienenen Bänden des Archivs sind zu wiederholten Malen Sätze aufgeführt worden, die sich bereits eines längeren Daseins erfreuen, aber, da sie in die gewöhnlichen Lehr-

bücher keinen Eingang gefunden, der Mehrzahl der Lehrer der Mathematik unbekannt geblieben sind*). Hierher gehört auch der von Matthew Stewart herrührende Satz vom ebenen Dreieck, auf den bereits Chasles in seiner Geschichte der Geometrie aufmerksam gemacht hat, und der seiner ungemeinen Fruchtbarkeit halber in das Lehrbuch der Planimetrie von Kunze, sowie auch in mein Lehrgebäude der niederen Geometrie aufgenommen worden ist. Da er bisher nur geringe Beachtung gefunden zu haben scheint, so erlaube ich mir, ihn im Folgenden etwas genauer zu betrachten.

Zieht man in einem gradlinigen Dreiecke ABC (Fig. 1) nach einem beliebigen Punkte D der Grundlinie BC aus der Gegenspitze A die Transversale $AD = t$, und bezeichnet $BD = a_{,}$, $CD = a_{,,}$, $\overset{/}{BAD} = A_{,}$, $\overset{\wedge}{CAD} = A_{,,}$, Dr. $ABD = \Delta_{,}$, Dr. $ACD = \Delta_{,,}$, so ist stets:

$$at^2 = b^2a_{,} + c^2a_{,,} - aa_{,}a_{,,} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Den einfachsten Beweis dieses Satzes erhält man, wenn man aus A das Loth AE auf BC fällt, nach Euclid. II. 12 & 13 für $ED = x$ die Gleichungen:

$$b^2 = t^2 + a^2_{,,} + 2a_{,,}x$$
$$c^2 = t^2 + a^2_{,} - 2a_{,}x$$

bildet und aus diesen x eliminirt.

Als einfache Zusätze zu diesem Lehrsatze ergeben sich alsbald:

1) Halbirt die Transversale t die Grundlinie a, so wird:

$$t^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2). \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

2) Ist $b = c$, also das Dreieck gleichschenklig, so wird:

$$b^2 - t^2 = a_{,}a_{,,} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

3) Ist die Transversale t gleich einem der Schenkel, z. B. gleich c, so ist:

$$b^2 - c^2 = aa_{,,} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

---

*) Solche Sätze unter der ungeheuren Masse mathematischer Sätze wieder an's Licht zu ziehen und zu deren weiterer Bearbeitung und Anwendung bei'm Unterrichte anzuregen, ist eben mit Zweck des Archivs.
G.

4) Verhalten sich die Strecken $a_{,} : a_{,,} = m : n$, so erhält der Lehrsatz die Form:

$$n(c^2 - a_{,}^2) + m(b^2 - a_{,,}^2) = (m+n)t^2. \quad \ldots \quad (5)$$

5) Verhält sich speciell $a_{,} : a_{,,} = c : b$, d. h. halbirt die Transversale t den Winkel A, so wird:

$$t^2 = bc - a_{,}a_{,,} \quad \ldots \quad (6)$$

§. 2.

Der Stewart'sche Satz kann aber in eine andere Form gebracht werden, in welcher er zu weiteren Anwendungen geschickter wird. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} at^2 &= b^2 a_{,} + c^2 a_{,,} - a a_{,} a_{,,} \\ a_{,} b^2 &= t^2 a - c^2 a_{,,} + a a_{,} a_{,,} \\ a_{,,} c^2 &= t^2 a - b^2 a_{,} + a a_{,} a_{,,} \end{aligned}$$

der Reihe nach mit a, $a_{,}$ und $a_{,,}$, so erhält man nach einfacher Reduktion alsbald die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} a^2 t^2 &= b^2 a_{,}^2 + c^2 a_{,,}^2 + a_{,} a_{,,} (b^2 + c^2 - a^2) \\ &= b^2 a_{,}^2 + c^2 a_{,,}^2 + 2 a_{,} a_{,,} bc \cos A \\ b^2 a_{,}^2 &= t^2 a^2 + c^2 a_{,,}^2 - a a_{,,} (t^2 + c^2 - a_{,}^2) \\ &= t^2 a^2 + c^2 a_{,,}^2 - 2 a a_{,,} tc \cos A_{,} \\ c a_{,,}^2 &= t^2 a^2 + b^2 a_{,}^2 - a a_{,} (t^2 + b^2 - a_{,,}^2) \\ &= t^2 a^2 + b^2 a_{,}^2 - 2 a a_{,} tb \cos A_{,,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Wird in diesen Gleichungen einer der drei Winkel A $A_{,}$ $A_{,,}$ ein Rechter, so ergiebt sich der Reihe nach:

$$\left.\begin{aligned} a^2 t^2 &= b^2 a_{,}^2 + c^2 a_{,,}^2 \\ b^2 a_{,}^2 &= t^2 a^2 + c^2 a_{,,}^2 \\ c^2 a_{,,}^2 &= t^2 a^2 + b^2 a_{,}^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

was einen nicht uninteressanten, metrischen Satz am rechtwinkligen Dreieck darbietet, der bis jetzt noch nicht bekannt zu sein scheint. — Bezeichnet man ferner der Kürze halber:

$$ta + ba_{,} + ca_{,,} = 2S, \quad a + b + c = 2s,$$

also:

$$-ta + ba_{,} + ca_{,,} = 2(S - ta) \quad -a + b + c = 2(s - a),$$

u. s. w.

so erhält man aus (7) auf bekannte Weise leicht:

(9)

$$S(S-ta) = a_{,}a_{,,}(s-b)(s-c) = a_{,}a_{,,}bc\sin^2\tfrac{1}{2}A,$$
$$(S-ba_{,})(S-ca_{,,}) = a_{,}a_{,,}s(s-a) = a_{,}a_{,,}bc\cos^2\tfrac{1}{2}A,$$
$$S(S-ba_{,}) = \tfrac{1}{4}aa_{,,}(t+a_{,}+c)(t-a_{,}+c) = aa_{,,}tc\cos^2\tfrac{1}{2}A,$$
$$(S-ta)(S-ca_{,,}) = \tfrac{1}{4}aa_{,,}(t+a_{,}-c)(-t+a_{,}+c) = aa_{,,}tc\sin^2\tfrac{1}{2}A,$$

u. s. w.

(10)

$$S(S-ta)(S-ba_{,})(S-ca_{,,}) = a_{,}^2a_{,,}^2\Delta^2 = a^2a_{,,}^2\Delta_{,}^2 = a^2a_{,}^2\Delta_{,,}^2,$$

ingleichen:

$$\left.\begin{aligned} S(S-ta) &= a_{,}a_{,,}\Delta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A,\\ S(S-ba_{,}) &= aa_{,,}\Delta_{,}\cot\tfrac{1}{2}A_{,},\\ S(S-ba_{,,}) &= aa_{,}\Delta_{,,}\cot\tfrac{1}{2}A_{,,}\end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} ta\cos\tfrac{1}{2}(A_{,}-A_{,,}) &= (ba_{,}+ca_{,,})\cos\tfrac{1}{2}A,\\ ta\sin\tfrac{1}{2}(A_{,}-A_{,,}) &= (ba_{,}-ca_{,,})\sin\tfrac{1}{2}A,\\ ba_{,}\cos\tfrac{1}{2}(A+A_{,,}) &= (ta-ca_{,,})\cos\tfrac{1}{2}A_{,},\\ ba_{,}\sin\tfrac{1}{2}(A+A_{,,}) &= (ta+ca_{,,})\sin\tfrac{1}{2}A_{,}\end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (12)$$

u. s. w.

Endlich verdient noch erinnert zu werden, dass sich der Stewart'sche Satz leicht auch unter einer der nachfolgenden Formen darstellen lässt:

(13)

$$a_{,}(a+b+c)(a-b+c) = a(t+c+a_{,})(-t+c+a_{,}),$$
$$a_{,}(a+b-c)(-a+b+c) = a(t+c-a_{,})(t-c+a_{,}),$$
$$a_{,,}(a+b+c)(a+b-c) = a(t+b+a_{,,})(-t+b+a_{,,}),$$
$$a_{,,}(a-b+c)(-a+b+c) = a(t+b-a_{,,})(t-b+a_{,,}),$$
$$a_{,}(t+b-a_{,,})(-t+b+a_{,,}) = a_{,,}(t+c+a_{,})(t-c+a_{,}),$$
$$a_{,}(t+b+a_{,,})(t-b+a_{,,}) = a_{,,}(t+c-a_{,})(-t+c+a_{,}).$$

Es ist bemerkenswerth, dass fast alle diese Sätze, die durch Anwendung der Trigonometrie ganz unmittelbar erhalten werden, auch ohne den Gebrauch der letztern durch rein metrische Betrachtungen gefunden werden können.

§. 3.

Lässt man drei Strahlen eines ebenen Büschels O (Fig. 2) durch eine Gerade schneiden, so findet zwischen den Strahlabschnitten p, q, r und den Strecken $a_{,}$ und $a_{,,}$ die Relation statt:

$$p^2a_{,,} - q^2(a_{,} + a_{,,}) + r^2a_{,} = a_{,}a_{,,}(a_{,} + a_{,,}) \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und zwischen den Winkeln o, u, α, β, γ die Gleichung:

$$\cos\alpha\sin u + \cos\gamma\sin o = \cos\beta\sin(o+u),$$

welche sich leicht in eine der Formen:

(15)

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin u + \cos^2\tfrac{1}{2}\gamma\sin o - \cos^2\tfrac{1}{2}\beta\sin(o+u) = 2\sin\tfrac{1}{2}o\sin\tfrac{1}{2}u\sin\tfrac{1}{2}(o+u),$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin u + \cos^2\tfrac{1}{2}\gamma\sin o + \sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin(o+u) = 2\cos\tfrac{1}{2}o\cos\tfrac{1}{2}u\sin\tfrac{1}{2}(o+u)$$

bringen lässt, in der sie der Gleichung (14) ganz analog wird. Fasst man den Stewart'schen Satz in dieser Weise auf, so kann man ihn unmittelbar auf folgende Art erweitern:

Werden vier Strahlen eines ebenen Strahlbüschels von einer Geraden geschnitten, so ergeben sich zwischen den Strahlabschnitten p, q, r, s und den drei Strecken $a_{,}$ $a_{,,}$ $a_{,,,}$ die Relationen:

(16)

$$(s^2-p^2)a_{,,} - (r^2-q^2)(a_{,}+a_{,,}+a_{,,,}) = a_{,,}(a_{,}+a_{,,}+a_{,,,})(a_{,,,}-a_{,}),$$

$$p^2a_{,,}a_{,,,}(a_{,,}+a_{,,,}) + r^2aa_{,}(a_{,,}+a_{,,,}) = q^2aa_{,,,}(a_{,}+a_{,,}) + s^2a_{,}a_{,,}(a_{,}+a_{,,})$$

wenn man der Kürze halber $a = a_{,} + a_{,,} + a_{,,,}$ setzt. Für die Winkel o, u, v, α, β, γ, δ dagegen finden sich die Ausdrücke:

(17)

$$\cos\gamma\sin\tfrac{1}{2}(u+v-o) + \cos\beta\sin\tfrac{1}{2}(o+u-v) = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta)\sin u,$$

$$\cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}(u+v-o) - \cos\beta\cos\tfrac{1}{2}(o+u-v) = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta)\sin u,$$

$$\cos\alpha\cos\beta\sin v - \cos\gamma\cos\delta\sin o = \cos\alpha\cos\gamma\sin(u+v) - \cos\beta\cos\delta\sin(o+u).$$

Lässt man das Centrum des Strahlbüschels in die schneidende Gerade selbst fallen, so erhält man die schon von Chasles (Gesch. d. Geom., pg. 172 u. 173) bekannt gemachten Relationen zwischen den durch 4 und 5 Punkte auf einer Geraden erzeugten Strecken.

§. 4.

Die Gleichungen (7) sind nur ein specieller Fall eines allge-

meinen Satzes vom geradlinigen Viereck, den ich bereits vor 26 Jahren bekannt gemacht habe (Archiv, Bd. II, S. 239), der aber bis jetzt gar nicht beachtet worden ist, obschon aus ihm der grösste Theil der wichtigsten Sätze über das Trapezoid abgeleitet werden kann. Da die Entwickelung, welche ich damals gegeben habe, auf Principien beruhet, die sich für eine elementare Behandlung des Gegenstandes nur wenig eignen, so will ich hier einen Beweis des Satzes beifügen, der an Einfachheit wohl kaum etwas zu wünschen lassen möchte und sich dadurch noch ganz besonders empfiehlt, dass er an den bekannten Beweis des Ptolemäischen Satzes vom Sehnenviereck sich unmittelbar anschliesst.

Lehrsatz. In jedem geradlinigen Vierecke ist das Quadrat des Produktes beider Diagonalen gleich der Quadratsumme der Produkte je zweier Gegenseiten, vermindert um das doppelte Produkt aller vier Seiten in den Cosinus der Summe zweier Gegenwinkel.

Beweis. Es sei $ABCD$ (Fig. 3) ein beliebiges Trapezoid, dessen Winkel mit den an ihren Scheiteln stehenden Buchstaben bezeichnet werden mögen, während $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$ die Seiten und $AC = e$, $BD = f$ die Diagonalen desselben seien. Von den Endpunkten B und A der Seite AB aus ziehe man die Geraden BE und AE so, dass die Winkel $o = v$ und $x = y$ werden, und verbinde die Punkte E und C durch die Gerade EC. Dann ist Dr. $ABE \sim$ Dr. BCD, folglich:

$$b : f = AE : d = BE : c.$$

Da aber auch der Winkel $ABD = o + u = u + v$ ist, so muss auch:

$$\text{Dr. } ABD \sim \text{Dr. } BEC, \text{ also } a : f = CE : c$$

sein, und somit wird:

$$AE = \frac{bd}{f}, \quad CE = \frac{ac}{f}.$$

Für den Winkel $AEC = \psi$ erhält man:

$$\psi = 360^0 - (BEA + BEC) = 360^0 - (A + C) = B + D,$$

und somit:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 - 2AE \cdot CE \cos\psi,$$

d. h. wenn man für AE und CE die gefundenen Werthe einsetzt:

$$e^2 f^2 = b^2 d^2 + a^2 c^2 - 2abcd \cos\psi.$$

Bezeichnet man die Winkel $ACE = \psi'$ und $CAE = \psi''$, so ergiebt sich noch:

$$b^2d^2 = e^2f^2 + a^2c^2 - 2acef\cos\psi',$$
$$a^2c^2 = e^2f^2 + b^2d^2 - 2bdef\cos\psi''.$$

Da nun in den überschlagenen Vierecken *ADBCA* und *ABDCA*, für welche b und d, resp. a und c die Diagonalen bilden, die Werthe $360^0 - \psi'$ und $360^0 - \psi''$ die Summe der Gegenwinkel bilden, so ist der Lehrsatz auch für diese Gattung von Vierecken und damit allgemein erwiesen.

Als Corollare fliessen aus dem Lehrsatze unmittelbar folgende:

1) Ist in einem Trapezoide die Summe zweier Gegenwinkel gleich 180^0 oder 360^0, so ist stets das Rechteck aus beiden Diagonalen gleich der Summe oder Differenz der Rechtecke aus je zwei Gegenseiten:

$$ef = ac + bd; \quad bd = ef - ac; \quad ac = ef - bd.$$

2) Beträgt in einem Trapezoide die Summe zweier Gegenwinkel 90^0 oder 270^0, so ist stets das Quadrat des Produktes beider Diagonalen gleich der Quadratsumme der Produkte je zweier Gegenseiten:

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2; \quad b^2d^2 = e^2f^2 + a^2c^2; \quad a^2c^2 = e^2f^2 + b^2d^2.$$

Wendet man auf das Dreieck *AEC*, dem ich den Namen des excentrischen Dreiecks beigelegt habe, die bekannten Relationen der ebenen Trigonometrie an, so erhält man ein ganzes System von Ausdrücken für das Trapezoid, die man auf anderem Wege nur mit grosser Weitläufigkeit zu finden vermag, wie dies in der oben citirten Abhandlung näher nachgewiesen ist. Einer der bemerkenswerthesten ist der für den Flächeninhalt F des Trapezoides *ABCDA*, nemlich:

$$16F^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) - 16abcd\cos^2\tfrac{1}{2}\psi,$$

dem sich die entsprechenden Ausdrücke für die Inhalte der überschlagenen Vierecke *ADBCA* und *ABDCA* anreihen.

Lässt man den Punkt D in die Diagonale AC hineinfallen, so verwandelt sich $\psi = B + D$ in $180^0 + B$ und man erhält den Stewart'schen Satz in der Gestalt, wie er in (7) aufgeführt worden ist.

III.

Die Gesetze der Lichtbrechung.

Von

Herrn Dr. *Jos. Kudelka*,

Kaiserlich Königlichem Lyceal-Professor zu Linz.

(Figuren s. Taf. I. II. III. IV.)

§. 1. Brechung des Lichtes an einer ebenen Trennungsfläche.

Von dem leuchtenden Punkte O (Fig. I) falle ein Lichtstrahl OA auf die Trennungsfläche mn zweier Medien. Geschieht die Brechung zum Einfallslothe, so sei Az der gebrochene Strahl, welcher, nach oben verlängert, die auf der Trennungsfläche senkrecht stehende, ebenfalls verlängerte OR in G schneidet.

Wird der Einfallswinkel $OAx = a$ und der Brechungswinkel $zAy = b$ gesetzt, so hat man nach dem Brechungsgesetze:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = m,$$

wo m den Brechungs-Exponenten bedeutet. Aber es ist der Winkel $AOR = OAx = a$ und ebenso $AGO = GAx = yAz = b$, und da sich in dem Dreiecke AGO die Seiten so verhalten, wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel, so hat man:

$$\frac{GA}{OA} = \frac{\sin a}{\sin b} = m.$$

Da nun der gebrochene Strahl als ein Glied dieser Proportion

erscheint, so muss man ihn wohl als Grösse auffassen, da ja auch die 3 übrigen Glieder ganz bestimmte Grössen repräsentiren. Ist demnach OA die Grösse des einfallenden Strahles, so ist AG die entsprechende Grösse des gebrochenen und das Verhältniss zwischen der Grösse des gebrochenen und jener des einfallenden Strahles ist gleich dem Brechungs-Exponenten m.

Darnach ist also der Weg, den ein auffallender Strahl in dem neuen Medium nimmt, leicht zu finden. Man braucht nur mit der Linie GA, deren Grösse aus obiger Proportion bei einem gegebenen Brechungs-Verhältnisse für jeden einfallenden Strahl berechnet werden kann, um A als Mittelpunkt einen Kreisbogen zu beschreiben; den Durchschnittspunkt G dieses Bogens mit der verlängerten Senkrechten OR verbindet man hierauf mit dem Einfallspunkte A und die Verlängerung dieser Verbindungslinie nach abwärts, nemlich Az, ist die Richtung des gebrochenen Strahles.

In der 6. Auflage von Müller's Lehrbuch der Physik, 1. Bd., pag. 547, werden zwei Methoden für die Konstruktion des gebrochenen Strahles angegeben. Bei genauerer Prüfung erkennt man sogleich, dass die zweite dieser Methoden mit dem eben entwickelten Verfahren dem Wesen nach übereinstimmt, nur mit dem Unterschiede, dass der gebrochene Strahl nicht als Grösse aufgefasst wird.

§. 2. Die an einer ebenen Trennungsfläche gebrochenen, einem und demselben leuchtenden Punkte angehörigen Strahlen schneiden die Normale in verschiedenen Punkten.

Bekanntlich reflektirt ein ebener Spiegel die von einem leuchtenden Punkte kommenden Strahlen in der Art, dass sich ihre Verlängerungen nach der Reflexion in einem einzigen Punkte hinter dem Spiegel schneiden. Es wird sich der Mühe lohnen, zu untersuchen, welches Verhalten in dieser Beziehung die an einer ebenen Trennungsfläche gebrochenen Strahlen befolgen.

Denken wir uns zu der ebenen Trennungsfläche mn zweier Medien (Fig. 2) eine parallele Linie uw gezogen. O ist der leuchtende Punkt und $OR \perp mn$. Es hängt ganz von uns ab, die Parallele uw in einem solchen Abstande zu nehmen, dass man die Proportion:

$$SR : RO = m : 1$$

bekommt. Die Figur stellt offenbar den Fall vor, wo $m > 1$ ist, also die Brechung zum Einfallsloth erfolgt. Man ziehe nun mehrere einfallende Strahlen wie OA, OB und OC und verlängere dieselben, bis sie die Parallele in den Punkten M, N, P schneiden. Nach einem bekannten geometrischen Satze hat man:

$$\frac{PC}{OC} = \frac{NB}{OB} = \frac{MA}{OA} = \frac{SR}{OR} = \frac{m}{1}.$$

Fasst man nun die Linien MA, NB, PC mit dem Zirkel ab und beschreibt damit nacheinander Kreise aus den Mittelpunkten A, B, C, so werden diese Kreise die Normale in den Punkten G, H, J schneiden, und es ist alsdann:

$$MA = AG, \quad NB = BH, \quad PC = CJ.$$

Substituirt man diese Werthe in obige Proportion, so erhält man:

$$\frac{CJ}{OC} = \frac{BH}{OB} = \frac{GA}{OA} = \frac{m}{1}.$$

Da alle diese Verhältnisse dem Brechungs-Exponenten m gleich sind, so stellen die Linien AG, BH, CJ sowohl die Richtungen, als auch die Grössen der gebrochenen Strahlen vor. Alle gebrochenen Strahlen müssen, wenn die Brechung zum Einfallsloth geschieht, wie hier angenommen wurde, oberhalb O die Normale schneiden, denn es ist ja $AM > AO$, $BN > BO$ u. s. f.

Dass aber die gebrochenen Strahlen die Normale in verschiedenen Punkten schneiden, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Wie bereits bekannt, ist:

$$AM : AO = m : 1,$$

somit:

$$AM = m \,.\, AO,$$

und ebenso:

$$BN = m \,.\, BO,$$

folglich ist auch:

$$BN - AM = m(BO - AO).$$

Nun ist aber $BN - AM$ der Unterschied der gebrochenen Strahlen, den wir mit δ bezeichnen wollen. $BO - AO$ ist der Unterschied der auffallenden Strahlen. Beschreibt man mit dem kleineren Strahle AO aus O einen Kreisbogen, so schneidet dieser den grösseren in E und es ist daher $BO - AO = BE$, oder wenn man wieder mit BE aus B einen Bogen beschreibt, der

die Trennungsfläche in F trifft, so ist $BE = BF$. Wir haben daher:

$$\delta = m.BF,$$

und da $m > 1$ ist, so ist auch $\delta > BF$. Das ist nun die Bedingung, an welche die Brechung zum Einfallslothe geknüpft ist. Es muss der Unterschied zweier gebrochenen Strahlen grösser sein, als der Unterschied derjenigen auffallenden, durch deren Brechung sie entstanden sind. Sehen wir nun zu, ob diese Bedingung erfüllbar wäre, wenn alle gebrochenen Strahlen in einem Punkte die Normale schneiden würden. Liegen die zwei einfallenden Strahlen AO und BO sehr nahe aneinander, so wird BAE als rechtwinkliges Dreieck betrachtet werden können, dessen rechter Winkel bei E ist. Alsdann ist, wenn Winkel $EBA = \alpha$ und $AB = r$ gesetzt wird:

$$BE = BF = r.\cos\alpha.$$

Denkt man sich in dieser Gleichung r konstant, hingegen α veränderlich, so ist klar, dass, je grösser α wird, oder je weiter der Scheitelpunkt O des Dreiecks ABO längs der Normalen nach aufwärts vorrückt, desto kleiner BF, d. i. der Unterschied der Seiten BO und AO werden müsse. Es wird also, wenn wir B mit G verbinden, jedenfalls $BG - AG < BO - AO$, oder $BG - AG < BF$. Gesetzt nun, der dem Punkte A der Trennungsfläche entsprechende gebrochene Strahl sei AG, so kann der dem Punkte B entsprechende nicht BG sein, weil, wie jetzt gezeigt wurde, ihr Unterschied $< BF$ wäre, während er doch grösser als BF sein muss.

Drehet man aber die Linie BG, welche den Abstand des Punktes B von dem in der Normalen liegenden Durchschnittspunkte darstellt, schraubenlinks, so wird dieser Abstand immer grösser und somit wird auch der Unterschied zwischen der gedreheten Linie und dem gebrochenen Strahle AG grösser. Da dieser Unterschied Anfangs kleiner als BF war, so wird er bei einer gewissen Lage der gedreheten Linie $= BF$, und wenn die Drehung über diese Lage hinaus erfolgt, schon $> BF$. Ist schliesslich die gedrehete Linie in die Lage BH gekommen, für welche $BH - AG = m.BF$ ist, so ist BH der dem Punkte B der Trennungsfläche entsprechende gebrochene Strahl. Die zwei gebrochenen Strahlen, die wir eben betrachtet haben, schneiden also die Normale in verschiedenen Punkten und dieses gilt auch von je zwei anderen unmittelbar auf einander folgenden gebrochenen Strahlen.

Was den auf die Trennungsfläche normal oder senkrecht auffallenden Strahl OR anbelangt, so entspricht ihm ebenfalls ein gebrochener von der Grösse RS. Beschreibt man mit RS aus dem Mittelpunkte R einen Bogen, so wird die Normale in T geschnitten. Bei senkrechter Inzidenz wird der leuchtende Punkt O mittelst des gebrochenen Strahles zwar in derselben Richtung gesehen, wie mittelst des auffallenden, aber ganz ohne Wirkung ist das brechende Medium selbst in diesem Falle nicht, denn es lässt den leuchtenden Punkt O in einer grösseren Entfernung, nemlich in T erscheinen.

Wollen wir jetzt die Betrachtung auf den Fall ausdehnen, wo $m < 1$ ist. Wir haben alsdann (Fig. 3.); $RS : OR = m : 1$, und da $m < 1$ ist, so ist auch $RS < OR$.

Sind wieder AO und BO zwei Strahlen, die von dem leuchtenden Punkte O auf die Trennungsfläche fallen, so stellen AM und BN die entsprechenden Grössen der gebrochenen vor und wir erhalten wie vorhin:

$$BN - AM = m . BF$$
$$\delta = m . BF.$$

Da aber $m < 1$, also ein echter Bruch ist, so muss $\delta < BF$ sein.

Das ist also die Bedingung, an welche die Brechung vom Einfallslothe gebunden ist. Es muss der Unterschied je zweier gebrochenen Strahlen kleiner sein, als der Unterschied derjenigen einfallenden, durch deren Brechung sie entstanden sind.

Beschreibt man daher aus A mit AM einen Bogen, der die Normale in G schneidet, so ist AG der dem Punkte A der Trennungsfläche entsprechende gebrochene Strahl, sowohl der Richtung als der Grösse nach. Der dem Punkte B entsprechende gebrochene Strahl kann nun nicht ebenfalls in G die Normale schneiden, weil in dem alsdann entstehenden Dreiecke BGA, gemäss dem zuvor Gesagten, $BG - AG > BO - AO$ oder $BG - AG > BF$ ist. Es kann also BG nicht den in Rede stehenden gebrochenen Strahl vorstellen. Drehet man aber BG schraubenrechts um den Punkt B, so wird sie immer kleiner und somit auch ihr Unterschied von AG kleiner. Bei einer gewissen Lage der gedreheten Linie wird dieser Unterschied $= BF$ und schliesslich, wenn die Drehung über diese Lage hinaus erfolgt, wird er $< BF$.

Hat nun die gedrehete Linie die Lage BH, so dass $BH - AG = m . BF$, so ist BH der dem Punkte B entsprechende gebrochene Strahl, sowohl der Richtung als Grösse nach.

Also auch bei der Brechung vom Einfallslothe wird die Normale von den auf einander folgenden gebrochenen Strahlen in verschiedenen Punkten geschnitten. Der im Punkte C der Trennungsfläche gebrochene schneidet sie in J und bei senkrechter Inzidenz übt das Medium die Wirkung aus, dass es den leuchtenden Punkt O näher in T erscheinen lässt.

§. 3. Folgerungen aus dem Vorhergehenden.

Die Kreise, welche wir aus den Punkten A, B, C der Trennungsfläche mit den gebrochenen Strahlen als Halbmesser beschrieben, werden uns über Manches Aufschluss geben. Wir werden hier 3 Fälle unterscheiden, denn es kann $m = 1$, $m > 1$ und $m < 1$ genommen werden.

1°. Ist $m = 1$, so hat diess zu bedeuten, dass $RS = OR$ (Fig. 4) und dass somit, wenn überhaupt in diesem Falle noch von einer Brechung die Rede sein kann, jeder gebrochene Strahl wie AM gleich ist seinem einfallenden OA. Wir wollen nun voraussetzen, dass die Auffallspunkte R, A, B, C in gleichen relativen Abständen sich befinden. Beschreibt man nun successive um diese Punkte Kreise mit RS, AM, BN, CP, so schneiden sich alle diese Kreise in dem leuchtenden Punkte O. Befindet sich also das Auge des Beobachters mit dem leuchtenden Punkte in einem und demselben Medium, so vermag dieses weder den Abstand des leuchtenden Punktes vom Auge, noch auch die Richtung, in welcher er gesehen wird, zu ändern, denn jeder gebrochene Strahl hat ja dieselbe Grösse und Richtung, wie der einfallende. Wir haben allgemein:

$$\delta = m.BF,$$

oder:

$$\delta = mr\cos\alpha.$$

Da aber α mit dem Einfallswinkel $a = xBO$ komplementär ist, so erhält man $\delta = mr\sin a$ und für $m = 1$, $\delta = r\sin a = BF$.

Je schiefer die Strahlen auffallen, desto grösser wird a und desto mehr nähert sich $\sin a$ der Einheit. Der Unterschied BF je zweier nächsten auffallenden Strahlen ist also keine konstante Grösse, sondern wird desto grösser, je schiefer die Strahlen sind, und so wird auch δ immer grösser. Da nun $\sin a$ zwischen Null und Eins einen echten Bruch darstellt, so ist $\delta < r$, d. h. der Unterschied der Halbmesser, mit denen aus A und B Kreise beschrieben werden, ist kleiner als der Abstand ihrer Mittelpunkte

und es müssen sich daher je zwei solche Kreise in zwei Punkten O und S schneiden; da ferner δ für schiefere Strahlen immer grösser wird und sich dem r beständig nähert, so werden die auf einanderfolgenden Kreise sich immer mehr der Berührung nähern. Aus diesem Grunde wird der Abstand der Punkte, in welchen zwei unmittelbar auf einanderfolgende Kreise die Trennungsfläche schneiden, immer kleiner, $po < on$ und $qp < po$.

2°. Ist $m > 1$, so ist auch $RS > OR$. In der Gleichung $\delta = mr \sin a$ ist nur $\sin a$ veränderlich und da es von Null bis Eins wachsen kann, so wird bei einer gewissen Inzidenz $\sin a = \frac{1}{m}$; für diesen Fall ist $\delta = r$, d. h. der Unterschied der Halbmesser, mit denen die Kreise beschrieben werden, ist gleich dem Abstande ihrer Mittelpunkte. Diese zwei Kreise werden sich also berühren.

So lange aber noch $\sin a < \frac{1}{m}$, wird $m \sin a < 1$ sein und somit $\delta < r$; es werden sich somit je zwei nächste Kreise schneiden. Wird aber $\sin a > \frac{1}{m}$, so ist $m \sin a > 1$ und $\delta > r$; alsdann schliessen sich je zwei nächste Kreise ganz ein, ohne sich zu schneiden.

3°. Für $m < 1$ ist auch $RS < OR$ (Fig. 3.). Da jetzt in der Formel $\delta = mr \sin a$ sowohl m, als auch $\sin a$ echte Brüche sind, wird $m \sin a$ stets < 1, somit $\delta < r$ sein. Je zwei nächste Kreise werden sich daher bei jeder Inzidenz schneiden.

Werden solche Kreise aus A, B, C beschrieben, so sieht man schon an der Konstruktion, dass die Punkte G, H, J, in welchen die Normale von diesen Kreisen geschnitten wird, einen desto grösseren relativen Abstand haben, je weiter sie von O entfernt sind. Auch bemerkt man, dass der aus D beschriebene Kreis die Normale nicht mehr schneidet, sondern sie in dem Punkte R tangirt.

So wie es bei der Brechung zum Einfallslothe einen Wendepunkt gab, der für $\sin a = \frac{1}{m}$ eintritt, so gibt es auch bei der Brechung vom Einfallslothe einen Wendepunkt, wenn $\sin a = m$ wird, (in welchem Falle $\delta = m^2 r$ ist), denn je schiefer ein Strahl auf die Trennungsfläche fällt, desto grösser wird der Abstand seines Einfallspunktes von der Normalen und für einen gewissen Strahl OD wird dieser Abstand DR gleich werden der Grösse des gebrochenen Strahles DQ. Nun ist aber:

$$DQ = m.OD$$

und:

$$DR = OD.\sin a,$$

wo unter a der Einfallswinkel DOR zu verstehen ist. Es ist daher:

$$m.OD = OD.\sin a,$$
$$\sin a = m.$$

In diesem Falle wird der Kreis, der mit dem Halbmesser DQ beschrieben wird, von der Normalen tangirt werden und von da an beginnt die totale Reflexion, denn alle folgenden Kreise werden die Normale nicht mehr schneiden.

Aus Allem, was bisher gesagt wurde, geht hervor, dass jeder Strahl, der nicht normal die Trennungsfläche trifft, durch den Einfluss des brechenden Mediums eine Aenderung seiner Richtung erleidet und dass auch der scheinbare Abstand des leuchtenden Punktes geändert wird. Befindet sich innerhalb des brechenden Mediums ein beobachtendes Auge, so sieht es vermöge jedes gebrochenen Strahles den leuchtenden Punkt an einer anderen Stelle und auch in einer anderen Entfernung. Der leuchtende Punkt erscheint also dem Auge vielfach und alle die Bilder desselben fallen in die Normale, nemlich dorthin, wo letztere von den gebrochenen Strahlen geschnitten wird. In Betreff der Anordnung der gebrochenen Strahlen findet jedoch ein wichtiger Unterschied Statt, je nachdem die Brechung zum oder vom Einfallslothe geschieht. Bei der Brechung zum Einfallslothe konvergiren zwar die gebrochenen Strahlen AG, BH, CJ (Fig. 2) in der Richtung gegen ihre Bilder hin, aber je zwei solche unmittelbar auf einanderfolgende Strahlen kreuzen sich nicht vor ihren Bildern, sondern sie schneiden sich erst hinter denselben, also auf der rechten Seite der Normalen. Bei der Brechung vom Einfallslothe zeigen jedoch die gebrochenen Strahlen, wie aus (Fig. 3) ersichtlich ist, ein anderes Verhalten. Je zwei solche unmittelbar auf einanderfolgende Strahlen, wie z. B. AG und BH, schneiden sich schon vor ihren Bildern, also schon auf der linken Seite der Normalen.

§. 4. Die Brechungs-Kurve.

Es sei O (Fig. 5) der leuchtende Punkt, Py die Trennungsfläche und die Brechung geschehe zum Einfallslothe, also $m > 1$. Ist ferner OA ein einfallender Strahl, so sei AB die Richtung

und Grösse des gebrochenen. Auch setze man $OP = c$, $PA = y$ und $OB = v$. Es ist nun:

$$OB = v = BP - OP = BA.\cos b - c,$$

wo $b = PBA$ den Brechungswinkel bedeutet. Da $BA = m.OA$ ist, so hat man:

$$v = m.OA.\cos b - c = m.OA.\sqrt{1 - \sin^2 b} - c,$$

und weil $\frac{\sin a}{\sin b} = m$ ist, so erhält man:

$$v = m.OA.\sqrt{1 - \frac{\sin^2 a}{m^2}} - c,$$

$$v = \sqrt{m^2.OA^2 - OA^2.\sin^2 a} - c.$$

Nun ist aber der Winkel $POA = a$, folglich $OA\sin a = y$ und $OA^2 = y^2 + c^2$, somit:

$$v = -c + \sqrt{m^2(y^2 + c^2) - y^2},$$

$$v = -c + \sqrt{m^2c^2 + (m^2 - 1)y^2}.$$

Diese Gleichung gibt die Entfernung des Durchschnittspunktes B von O an und zwar für beliebige Werthe von y. Da $PA = OP.\text{tang}.POA$ oder $y = c\,\text{tang}\,a$, so wird für $c = 0$ auch $v = 0$.

Die von einem, unendlich nahe an der Trennungsfläche liegenden, leuchtenden Punkte in das brechende Medium eindringenden Strahlen werden daher die Brechung zwar gerade so erleiden, wie in dem Falle, wo sich der leuchtende Punkt in irgend einer messbaren Entfernung von der Trennungsfläche befindet, allein die gebrochenen Strahlen scheinen alle von demselben Orte herzukommen, nemlich von demjenigen, den der leuchteude Punkt selbst einnimmt. Der leuchtende Punkt wird also in diesem Falle an demselben Orte gesehen, wo er auch gesehen würde, wenn keine Brechung Statt fände. Dieser Folgesatz wird später zur Anwendung kommen.

Man ziehe nun durch A die $uw \parallel xx'$, bringe den gebrochenen Strahl AB parallel zu sich in die Lage OM und ziehe $MK \perp xx'$.

Nimmt man Py als Ordinaten- und Px als Abszissen-Axe an, so ist $PK = x$ die Abszisse und $MK = y$ die Ordinate des Punktes M.

Nun ist aber $OB = AM = PK$, folglich $v = x$, somit:

$$x = -c + \sqrt{m^2c^2 + (m^2-1)y^2},$$

welche Gleichung einer Kurve angehört, die wir die Brechungs-Kurve nennen wollen. Ihre Aeste erstrecken sich zu beiden Seiten der Abszissenaxe ins Unendliche. Für $y=0$ hat man $x=-c+mc=c(m-1)$, welcher Werth die Abszisse PR für den Scheitel R der Kurve bedeutet.

Geschieht die Brechung vom Einfallslothe, so sei für den einfallenden Strahl OA der entsprechende gebrochene AC. Man wird jetzt unter v den Abstand OC zu verstehen haben und man erhält auf ähnliche Weise, wie vorhin:

$$v = +c - \sqrt{m^2c^2 + (m^2-1)y^2}.$$

Da aber in dem gegenwärtigen Falle $m < 1$, somit m^2-1 negativ ist, so hat man auch:

$$v = +c - \sqrt{m^2c^2 - (1-m^2)y^2}.$$

Bringt man nun den gebrochenen Strahl AC in die parallele Lage ON und zieht $NL \perp xx'$, so ist $PL = x$ und $NL = y$. Da nun $OC = NA = PL$, so ist wiederum $v = x$ und folglich:

$$x = +c - \sqrt{m^2c^2 - (1-m^2)y^2}$$

die Gleichung der Brechungskurve, wenn $m < 1$ ist.

Setzt man wieder $y = 0$, so bekommt man für den Scheitel S dieser Kurve $x = c - mc = c(1-m)$, worunter also die Abszisse PS zu verstehen ist. Die Aeste dieser Kurve erstrecken sich nicht mehr ins Unendliche, denn ist $m^2c^2 = (1-m^2)y^2$, so erreicht $x = c$ seinen Maximumwerth. Da $y = c\,\mathrm{tang}\,a$ ist, so kann man die letztere Bedingung auch so stellen:

$$m^2c^2 = (1-m^2)c^2\,\mathrm{tang}^2 a,$$

$$\mathrm{tang}^2 a = \frac{m^2}{1-m^2}.$$

Setzt man $\mathrm{tang}\,a = \frac{\sin a}{\cos a}$, so hat man:

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{\sin^2 a}{1-\sin^2 a} = \frac{m^2}{1-m^2}$$

und somit $\sin a = m$. Man kann daher der obigen Bedingung auch diese letztere substituiren.

§. 5. Das Brechungs-Gesetz des Snellius ist eine blosse Anwendung eines rein mathematischen Satzes.

Die Geometrie lehrt, dass die Seiten eines Dreieckes sich verhalten, wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel; lässt man daher das Verhältniss der Seiten konstant sein, so wird es auch das Verhältniss der Sinusse bleiben. Es sei das Dreieck BOA (Fig. 6) und man beschreibe um A als Mittelpunkt mit AO und ebenso mit BA Kreise. Setzt man Winkel $ABO = b$ und $AOR = a$, so hat man $\frac{AB}{AO} = \frac{\sin a}{\sin b}$. Aendert man nun den Winkel BAO, indem man die Halbmesser in verschiedene andere Lagen bringt, so werden für jedes solche neu entstandene Dreieck die Winkel a und b andere Werthe haben, aber das Verhältniss ihrer Sinusse bleibt konstant, weil die gegenüberliegenden Seiten als Halbmesser ihre anfänglichen Grössen beibehalten. In dem Dreiecke DAC z. B. wird $\frac{\sin a'}{\sin b'} = \frac{\sin a}{\sin b}$ sein.

Welches von den unzähligen Dreiecken, in welchen das Verhältniss der Sinusse das nemliche ist, in einem bestimmten Brechungsfalle zur Anwendung kommt, wird offenbar durch die Lage der Trennungsfläche mn bestimmt, denn auf dieser Trennungsfläche muss die dritte Seite des Dreiecks, nemlich BO senkrecht stehen, wenn die Halbmesser AO und BA die Grössen und Richtungen des einfallenden und gebrochenen Strahles vorstellen sollen, denn alsdann ist ja der Winkel $a =$ dem Einfallswinkel OAx und $b =$ dem Brechungswinkel BAx. Ist ebenso in dem Dreiecke DAC die Seite $DC \perp mn$, so wird, falls CA den einfallenden Strahl vorstellt, der andere Halbmesser DA den gebrochenen Strahl sowohl der Richtung als Grösse nach darstellen, und es ist in diesem Falle $a' =$ dem Einfallswinkel CAx und $b' =$ dem Brechungswinkel DAx.

Die beiden einfallenden Strahlen OA und CA kommen natürlich von verschiedenen leuchtenden Punkten her. Will man aber haben, dass sie von demselben leuchtenden Punkte herkommen, so braucht man nur $OE \parallel CA$ und $EF \parallel AD$ zu ziehen. Alsdann ist das Dreieck $FEO \sim DAC$ und somit $\frac{FE}{OE} = \frac{DA}{AC}$. Ist nun $\frac{DA}{AC} = m$, so ist auch $\frac{FE}{OE} = m$. Wenn also OE ein einfallender ist, so ist EF der zugehörige gebrochene.

Aber es gibt immer zwei Dreiecke, die einander korrespondi-

ren und zwar aus dem Grunde, weil die Sinusse supplementärer Winkel einander gleich sind. So hat das Dreieck ABG mit dem Dreiecke ABO den Brechungswinkel $ABO=b$ gemeinsam; beide Dreiecke sind also auf denselben gebrochenen Strahl AB zu beziehen, aber während in dem einen der Winkel AOB mit dem Einfallswinkel a supplementär ist, ist in dem anderen der Winkel AGB diesem Einfallswinkel a selbst gleich. Wenn nun aber in dem Dreiecke BAO die Seite AO die Grösse und Richtung des einfallenden Strahles angibt, so gilt dieses nicht auch von der Seite AG des zweiten Dreiecks. Diese Seite AG gibt vielmehr die Richtung und Grösse des im Punkte A nach Az reflektirten Strahles an; denn es ist ja Winkel $OAR = RAG = zAm$. Das Brechungs-Gesetz hängt also innig zusammen mit dem Reflexions-Gesetze.

Beschreibt man um einen beliebigen Einfallspunkt E, der in der Trennungsfläche mn liegt, mit dem von dem leuchtenden Punkte O herkommenden Strahle OE einen Kreis, so wird dadurch die Normale OR nicht bloss in O, sondern, wenn sie hinreichend verlängert wird, auch in G geschnitten und diese Durchschnittspunkte bleiben dieselben, ich mag mit beliebigen anderen auffallenden Strahlen um ihre Einfallspunkte solche Kreise beschreiben. Der reflektirte Strahl AG ist also gewissermassen aequivalent dem einfallenden OA und es ist insofern gleichgiltig, auf welchen von beiden der gebrochene BA bezogen wird.

So wie die von O zu den respektiven Einfallspunkten gezogenen Geraden die einfallenden Strahlen vorstellen, so werden die von G zu eben diesen Einfallspunkten gezogenen Geraden die reflektirten Strahlen bedeuten, welche letztere immer dieselbe Grösse haben, wie die ersteren. Der Punkt G wird also das Spiegelbild von O sein.

Es wurde an einem früheren Orte bereits hervorgehoben, dass durch die Brechung die scheinbare Entfernung des leuchtenden Punktes von der Trennungsfläche geändert werde, wie denn eigentlich alles Gesagte diesen Gedanken zur Grundlage hat. Es sei mir nun hier erlaubt, denselben durch ein Paar Beispiele zu beleuchten.

Hängt man ein Pendel, z. B. ein an einem Faden hängendes Kügelchen in Wasser, so erscheint der eingetauchte Theil des Fadens in der Verlängerung des herausragenden, zugleich aber kürzer, als er wirklich ist. Hier werden also die scheinbaren Abstände eines jeden Punktes des eingetauchten Theiles von der Trennungsfläche vermindert, und indem diese Abstände in eine

$$OC = c + d - c - \frac{d \cos a}{m . \cos b},$$

und $\frac{\cos b}{\cos a} = n$ gesetzt, gibt:

$$OC = d\left(1 - \frac{1}{mn}\right).$$

Es hängt demnach OC, wie diese Gleichung zeigt, nicht nur von der Dicke des Mediums und dem Brechungs-Exponenten ab, sondern auch von dem Verhältnisse der Cosinusse des Brechungs- und Einfallswinkels.

In Müller's Lehrbuch der Physik, 6. Auflage, findet man pag. 545 für den Brechungs-Exponenten m beim Uebergange von Luft in Wasser, drei verschiedene Fälle angegeben, nemlich:

$$m = \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin 15^0}{\sin 11\frac{1}{5}^0} = \frac{\sin 30^0}{\sin 22^0} = \frac{\sin 60^0}{\sin 40^0} = \frac{4}{3}.$$

Nehmen wir nun in allen 3 Fällen das Verhältniss der Cosinusse des Brechungs- und Einfallswinkels, so bleibt dieses nicht beständig, denn es ist:

$$\frac{\cos 11\frac{1}{5}^0}{\cos 15^0} = 1.015,$$

$$\frac{\cos 22^0}{\cos 30^0} = 1.070,$$

$$\frac{\cos 40^0}{\cos 60^0} = 1.532.$$

Wir sehen daraus, je grösser der Einfallswinkel a wird, also je schiefer die Strahlen auf das Medium fallen, desto grösser wird auch n. Aber mit der Zunahme von n nimmt auch OC zu. Daraus ergibt sich also, dass jeder Strahl nach seinem Austritte in einem anderen Punkte die Normale schneide, welcher von dem leuchtenden Punkte um so weiter entfernt ist, je schiefer der auffallende Strahl genommen wird.

Obgleich nun gegen die Richtigkeit der obigen Rechnung nichts einzuwenden sein dürfte, so gewährt sie doch keine Einsicht in die Umstände, die ein solches Resultat veranlassen, und es wird daher der Mühe werth sein, diesen Gegenstand von einer anderen Seite zu beleuchten.

Es sei wiederum ein von parallelen Ebenen mn und pl begrenztes Medium (Fig. 10 für $m > 1$ und Fig. 11 für $m < 1$). Von

dem leuchtenden Punkte O falle darauf ein Strahl OA, der nach AC gebrochen wird, und nach seinem Austritte die Richtung CF annimmt, welche parallel ist zu dem einfallenden Strahle OA und verlängert die Normale in E schneidet. Unter diesen Umständen müssen die Dreiecke OAR und ECP ähnlich sein. Man hat daher die Proportion:

$$OR:EP = AR:CP.$$

Durch diese Proportion ist also der Parallelismus des ein- und austretenden Strahles bedingt.

Denken wir uns nun einen zweiten einfallenden Strahl OB. Von diesem wollen wir annehmen, dass er nach seinem Austritte in demselben Punkte E, wie der vorige, die Normale schneide. Zieht man daher durch den Punkt E eine Parallele EJ zu dem zweiten einfallenden Strahle OB, so wird diese die Austrittsfläche in dem Punkte D schneiden; verbindet man nun B mit D, so gibt die Linie BD die Richtung an, welche der gebrochene Strahl innerhalb des Mediums haben müsste, wenn der austretende Strahl DJ in demselben Punkte E die Normale schneiden soll, wo der austretende Strahl CF sie schneidet. Da nun wiederum $OBR \sim EDP$ ist, so hat man auch:

$$OR:EP = BR:DP,$$

und indem man diese Proportion mit der früheren zusammenhält, ergibt sich:

$$AR:CP = BR:DP.$$

Diese letztere Proportion enthält die Bedingung, unter welcher alle austretenden Strahlen die Normale in demselben Punkte E schneiden würden.

AR und BR sind die Entfernungen der Einfallspunkte von der Normalen an der Eintrittsfläche; CP und DP sind ebenso die Entfernungen der Einfallspunkte von der Normalen für die Austrittsfläche. Man kann daher die Bedingung in folgende Worte kleiden. Sollen alle austretenden Strahlen die Normale in einem einzigen Punkte schneiden, so muss das Verhältniss der Entfernungen der Auffallspunkte von der Normalen an den beiden Trennungsflächen ein konstantes sein. Es muss $\frac{AR}{CP} = \frac{BR}{DP}$ ...sein; Nennen wir dieses Verhältniss kurz das Distanzenverhältniss.

Man sieht also, dass der blosse Parallelismus jedes austretenden Strahles mit seinem zugehörigen einfallenden noch nicht

hinreicht, um zu bewirken, dass die Normale von allen austretenden Strahlen in dem nämlichen Punkte geschnitten werde, sondern es ist dazu auch noch erforderlich, dass das Distanzenverhältniss ein konstantes sei. Aber unter dieser letzteren Bedingung werden auch die Richtungen, welche die an der Eintrittsfläche gebrochenen Strahlen, wie BD, AC, RP, innerhalb des brechenden Mediums haben, gehörig verlängert, in einem und demselben Punkte G die Normale schneiden. Denn da $\frac{AR}{CP} = \frac{GR}{GP}$ ist, so ist auch $\frac{BR}{DP} = \frac{GR}{GP}$. Das rein geometrische Gesetz des Distanzenverhältnisses wird nun aber von der Natur nicht befolgt. Die Brechung geschieht nicht nach diesem Gesetze, sondern nach dem Gesetze des konstanten Verhältnisses der Sinusse des Einfalls- und Brechungswinkels, welches letztere mit dem ersteren völlig unvereinbarlich ist, wie aus folgender Betrachtung erhellen dürfte.

Ist für den einfallenden Strahl OA der zugehörige gebrochene AG, so kann der einem zweiten einfallenden Strahle OB entsprechende gebrochene, wie bereits bekannt, nicht in dem nemlichen Punkte G die Normale schneiden, wie der erstere, sondern er thut diess in einem höheren oder tieferen Punkte L, je nachdem $m > 1$ oder $m < 1$ ist. Es ist also BL der dem einfallenden OB entsprechende gebrochene Strahl. Verlängert man nun BL nach abwärts, so wird die Austrittsfläche davon in K getroffen, welcher Punkt wiederum der Normalen näher liegt als D, wenn $m > 1$, und entfernter, wenn $m < 1$ ist. Zieht man durch K die $KS \parallel OB$, so gibt diese die Richtung des austretenden Strahles, und man sieht, dass der Punkt S, wo sie die Normale schneidet, unterhalb E liegt, wenn $m > 1$, und oberhalb, wenn $m < 1$ ist.

Da nun unter solchen Umständen dem Einfallspunkte B an der ersten Fläche nicht mehr der Punkt D, sondern K an der Austrittsfläche entspricht, so wird dadurch das Gesetz des konstanten Distanzenverhältnisses beseitigt.

§. 7. Einfluss der Dicke des brechenden Mediums.

Für den einfallenden Strahl OA war AE der entsprechende gebrochene. (Fig. 9.). Verlängert man nun den gebrochenen Strahl AE bis er die Austrittsfläche in B trifft, so ist für die letztere EB als einfallender Strahl zu betrachten und es ist dieser Strahl um den Weg AB, den das Licht innerhalb des Mediums zurücklegt, grösser als AE.

Nimmt man aber die Dicke des Mediums unendlich klein an, so wird der Austrittspunkt B mit dem Einfallspunkte A als zusammenfallend betrachtet werden können. Alsdann wird, da $AB=0$ ist, der einfallende Strahl an der Austrittsfläche dieselbe Grösse haben, wie der gebrochene Strahl an der Eintrittsfläche: er wird $= AE$ sein. Ebenso wird der gebrochene Strahl an der Austrittsfläche dieselbe Grösse haben, wie der einfallende an der Eintrittsfläche; er wird somit $= AO$ sein. Betrachtet man also den leuchtenden Punkt durch ein sehr dünnes Medium, so erscheint er an seinem wahren Orte.

Daran lässt sich die folgende Betrachtung anschliessen.

Man setze die Grösse eines beliebigen einfallenden Strahles an der Eintrittsfläche $= q$ und die entsprechende Grösse des gebrochenen $= q'$. Das Medium sei z. B. aus Glas und der Brechungs-Exponent $= m$. Wird es unendlich dünn gedacht, so ist die Grösse des einfallenden Strahles an der Austrittsfläche $= q'$ und die Grösse des an dieser Fläche gebrochenen $= q$. Den Brechungs-Exponenten beim Uebergange aus dem Glase in die Luft wollen wir $= m'$ setzen. Wir haben demnach:

$$m = \frac{q'}{q} \text{ und } m' = \frac{q}{q'},$$

folglich:

$$mm' = 1 \text{ und } m' = \frac{1}{m}.$$

Hat das Medium eine angebbare Dicke, so wird der einfallende Strahl an der Austrittsfläche die Grösse $= \mu q'$ haben, wo μ einen von der Dicke des Mediums abhängigen Faktor vorstellt; der an derselben Fläche gebrochene wird demgemäss die Grösse $= \mu q$ haben, und es wird in diesem Falle $m' = \frac{\mu q}{\mu q'}$ und somit ebenfalls $mm' = 1$.

Lässt man einen Lichtstrahl durch zwei unmittelbar auf einander folgende unendlich dünne Schichten zweier Stoffe, z. B. Glas und Wasser, hindurchgehen, so gibt es 3 Trennungsflächen, und es seien wiederum q und q' die Grössen des einfallenden und gebrochenen Strahles an der ersten Trennungsfläche und m der Brechungs-Exponent beim Uebergange aus der Luft in Glas; für die zweite Trennungsfläche ist der einfallende Strahl $= q'$, der gebrochene sei $= q''$, und der Brechungs-Exponent beim Uebergange aus Glas in Wasser $= m'$; für die dritte Trennungs-

fläche ist der einfallende $= q''$, der gebrochene $= q$, und der Brechungs-Exponent beim Uebergange aus Wasser in die Luft $= m''$. Wir haben demnach $m = \frac{q'}{q}$, $m' = \frac{q''}{q'}$ und $m'' = \frac{q}{q''}$, somit $mm'm'' = 1$ und $m' = \frac{1}{mm''}$. Setzt man den Brechungs-Exponenten beim Uebergange aus der Luft in Wasser $= n$, so ist $m'' = \frac{1}{n}$ und somit $m' = \frac{n}{m}$.

§. 8. Ueber die Ablenkung der Lichtstrahlen.

Es sei OA (Fig. 1) ein einfallender Strahl. Geschieht die Brechung zum Einfallslothe, so ist Az die Richtung des gebrochenen Strahles. Ist ferner Ar die Verlängerung des einfallenden Strahles, so gibt der Winkel zAr, welchen die Richtung des gebrochenen mit jener des einfallenden bildet, die Grösse der Ablenkung, welche das Medium bewirkt. Nun ist aber:

$$zAr = GAO = AOR - AGR = a - b.$$

Der Ablenkungswinkel ist also gleich dem Einfalls- weniger dem Brechungswinkel.

Wird der Strahl DA nach AB (Fig. 12) und ein anderer Strahl CA nach AE gebrochen, so ist für den ersteren, wenn er nach z verlängert wird, die Ablenkung $= BAz$ und für den letzteren, dessen Verlängerung Ar ist, hat man die Ablenkung $= EAr$. Es ist aber letztere Ablenkung stets grösser, als die erstere, denn es ist zu bemerken, dass der Winkel $zAr = CAD$ ist; der Winkel BAE aber, den die zwei gebrochenen Strahlen bilden, ist stets $< CAD$, aus dem Grunde, weil alle einfallenden Strahlen, die innerhalb des Winkels CAD liegen, durch die Brechung dichter an einander gerückt werden. Man hat nun:

$$\begin{gathered} EAz = EAz \\ BAE < zAR \\ \overline{EAz + BAE} < \overline{EAz + zAr} \text{ und} \\ BAz < EAr. \end{gathered}$$

Darnach wird also ein Strahl desto mehr von der ursprünglichen Richtung abgelenkt, je schiefer er auffällt.

In Müller's Lehrbuch der Physik S. 552 findet man für den Uebergang aus Luft in Glas, wobei $m = \frac{3}{2}$ ist, für a und b olgende Werthe:

a	b	$a-b$
7°30′	5°	2°30′
15°. 5′	10°	5° 5′
22°50′	15°	7°50′
30°52′	20°	10°52′
39°21′	25°	14°21′
48°35′	30°	18°35′
59°12′	35°	24°12′
74°34′	40°	34°34′.

Man sieht daraus, dass $a-b$ immer grösser wird, je schiefer die Strahlen auffallen. Die Brechungswinkel wachsen in dieser Reihe immer um 5°. Die entsprechende Zunahme des Einfallswinkels bleibt aber nicht konstant, sondern sie wird immer grösser. Daraus geht umgekehrt hervor, dass wenn man die Einfallswinkel um gleiche Grössen wachsen lässt, die entsprechende Zunahme der Brechungswinkel immer kleiner werden muss.

Bilden also zwei einfallende Strahlen DA und CA (Fig. 12) einen Winkel von etwa 5° mit einander, $DAC = 5°$, und denkt man sich dieses System von zwei Strahlen um den Punkt A schraubenlinks gedrehet, so dass der Winkel $CAD = 5°$ unverändert bleibt, so werden auch die entsprechenden gebrochenen Strahlen AB und AE in demselben Sinne eine Drehung erleiden, aber der von ihnen eingeschlossene Winkel BAE wird desto kleiner, je mehr die Drehung beträgt.

Wiewohl nun an der Richtigkeit des obigen Beweises und der damit in Verbindung gebrachten Folgerungen nicht gezweifelt werden kann, so gibt doch Alles das keine Einsicht in den Zusammenhang, welcher zwischen dem Ablenkungswinkel und dem Gesetze des Snellius Statt finden muss.

In dieser Hinsicht dürfte die folgende Betrachtung nicht überflüssig sein. Es sei OA ein einfallender Strahl (Fig. 13) und AB der zugehörige gebrochene. Wir setzen eine Brechung zum Einfallslothe voraus. Man denke sich nun den einfallenden Strahl bis C verlängert und ziehe $CD \parallel AB$ Man hat alsdann:

$$\frac{BA}{OA} = \frac{DC}{OC} = m.$$

Jetzt werde das Dreieck OCD, das gleichsam über dem Dreiecke OAB liegt, um den Punkt O so lange gedrehet, bis C in die Trennungsfläche nach E zu liegen kommt; es ist dann die

Seite OC um den Winkel COE gedrehet worden, und um einen gleich grossen Winkel ist auch die Seite OD gedrehet, die jetzt in der Lage OF sich befindet, und es ist daher, wenn man mit OD einen Kreis um O beschreibt, der Bogen $FD = pq$, welcher letztere Bogen die Grösse des Winkels COE angibt. Die dritte Seite CD des gedreheten Dreiecks befindet sich jetzt in der Lage FE.

Jetzt kann OE einen zweiten einfallenden Strahl vorstellen; der dazu gehörige gebrochene wird natürlich die Grösse FE haben, aber seine Richtung ist eine andere. Man bekommt sie, wenn man mit FE um E einen Bogen beschreibt, bis die Normale in G geschnitten wird. GE gibt dann die Richtung und Grösse des gebrochenen Strahles, welcher dem einfallenden OE entspricht. Durch die Drehung des Dreiecks ist zunächst der Winkel $ROA = a$, welcher der Einfallswinkel für den Strahl OA ist, um den Winkel $COE = \mu$ vergrössert worden. Es ist daher $ROE = a + \mu$ der Einfallswinkel für den Strahl OE.

Zieht man $EB' \parallel AB$, so ist der Brechungswinkel $BAx = B'Ex' = b$ für den im Punkte A gebrochenen Strahl AB. Kommt nun durch die Drehung des Dreiecks die Seite DC in die Lage FE, so bildet sie mit dem Einfallslothe den Winkel $FEx' = B'Ex' + B'EF = b + \mu$, denn $B'EF$ ist offenbar $= \mu$, denn es wird b durch die Drehung des Dreiecks um ebensoviel vergrössert wie a.

Weil nun aber FE wieder in die Lage GE gedrehet wird, so wird der Winkel $FEB' = \mu$ wieder um den Winkel $FEG = \nu$ vermindert. Es ist daher der Brechungswinkel GEx' für den im Punkte E gebrochenen Strahl $GE = b + \mu - \nu$.

Aendert sich also der Einfallswinkel a um μ, so ändert sich der Brechungswinkel b um weniger, nemlich um $\mu - \nu$.

Bei dem ersten Strahle ist der Ablenkungswinkel $OAB = OEF = d$; für den zweiten Strahl ist aber der Ablenkungswinkel $d' = OEG = OEF + FEG = d + \nu$. Die Ablenkung des zweiten Strahles ist also um ν grösser, als die des ersten.

Man hat übrigens auch $d = a - b$ für den ersten Strahl und $d' = a + \mu - (b + \mu - \nu) = a - b + \nu$ für den zweiten.

Dieser Zuwachs ν ist aber für die auf einander folgenden Strahlen nich konstant, sondern er wird immer grösser, wie aus Folgendem erhellet.

Nennt man g die Grösse eines Grades im Bogenmasse für

den Halbmesser = 1, so ist $r'g$ die Grösse eines Grades für den Halbmesser $OD = r'$ und wenn der Bogen FD μ solche Grade enthält, so hat man:

$$FD = \mu r' g.$$

Da der andere Bogen FG einem Kreise angehöret, dessen Halbmesser $FE = DC = R$ ist, so ist die Grösse eines Grades $= Rg$, und wenn dieser Bogen ν solche Grade enthält, so ist:

$$FG = \nu . R . g,$$

somit:

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{r'}{R} \cdot \frac{FG}{FD},$$

$$\nu = \mu \cdot \frac{r'}{R} \cdot \frac{FG}{FD}.$$

Ist der Drehungswinkel FOD unendlich klein, so kann man die Bögen FD und FG, als geradlinig betrachten, und es wird dann der Winkel DFG von den Tangenten gebildet, welche durch den Punkt F zu beiden Kreisen gelegt werden. Aber der Winkel, den die Tangenten bilden, ist offenbar gleich dem Winkel, den die zum Berührungspunkte gezogenen Halbmesser OF und EF einschliessen, also:

$$GFD = OFE = b.$$

Da man ferner das Dreieck GED als ein rechtwinkliges betrachten kann, so hat man:

$$FD = FG . \cos b$$

und somit:

$$\nu = \mu \cdot \frac{r'}{R} \cdot \frac{FG}{FG . \cos b} = \mu \cdot \frac{r'}{R} \cdot \frac{1}{\cos b}.$$

Man sieht also, dass die Anzahl Grade, welche der Bogen FG enthält, also die Grösse des Winkels FEG dem Cosinus des Brechungswinkels b verkehrt proportionirt ist. Es wird also jedenfalls ν grösser ausfallen, wenn der Brechungswinkel b ein grösserer ist. Hierbei setzen wir voraus, dass bei dem Uebergange von einem Strahle zum andern der Drehungswinkel FOD immer gleich viel betrage, also μ eine konstante Grösse sei. Das Verhältniss $\frac{r'}{R}$ ist jedoch nicht konstant, denn wenn ich von dem zweiten einfallenden Strahle OE zu einem folgenden dritten übergehe, so

ist unter $\frac{r'}{R}$ das Verhältniss $\frac{OG}{GE} = \frac{OG}{FE} = \frac{OG}{DC}$ zu verstehen. Nun ist aber $\frac{OG}{DC} > \frac{OD}{DC}$. Es wird demnach ν auch aus diesem Grunde zu nehmen müssen.

Geschieht die Brechung vom Einfallslothe, so wird im Allgemeinen das Nemliche gelten. Die Fig. 14 versinnlicht diesen Fall.

OA ist der einfallende Strahl, AB der entsprechende gebrochene. Man verlängere den ersteren bis C und ziehe durch diesen Punkt die $CD \parallel AB$, so hat man $\frac{BA}{OA} = \frac{DC}{OC} = m$, wo $m < 1$ ist. Drehet man das Dreieck ODC um den Punkt O, bis C in die Trennungsfläche nach E zu liegen kommt, so erhält es die Lage OFE. Dabei hat natürlich die Seite OD einen Bogen DF beschrieben, welcher $= pq = \mu$ ist. OE stellt jetzt einen zweiten einfallenden Strahl vor, dessen zugehöriger gebrochener die Grösse, EF hat. Die Richtung des letzteren findet man wieder, wenn man mit EF um den Punkt E einen Bogen beschreibt, der die Normale in G schneidet. Es gibt sodann EG sowohl die Grösse als auch die Richtung des gebrochenen Strahles für den Punkt E der Trennungsfläche. Die Ablenkung in dem Punkte E ist $d' = GEO = FEO + GEF$; aber $FEO = DCO = BAO = d$ und $GEF = \nu$, somit $d' = d + \nu$.

§. 9. Formel für die Aenderung des Brechungswinkels.

Wir wollen nun versuchen die eben behandelte Aufgabe auch noch im Sinne der Fig. 6 zu lösen. Da müssen aber zuerst ein paar geometrische Sätze bewiesen werden.

Denken wir uns demnach (Fig. 15) zwei konzentrische Kreise und ziehen wir die zu einander parallelen Geraden AE und BG, welche Sekanten dieser Kreise sind. Es ist nun zu beweisen, dass von den beiden Bögen, die zwischen den Parallelen liegen, der Bogen EG des grösseren Kreises kleiner sei, als der Bogen AB des kleineren Kreises. Setzt man den Halbmesser des grösseren Kreises $OE = R$ und den des kleineren $OA = r$, so hat man in dem Sektor EOF:

$$EF : AB = R : r,$$

$$EF = \frac{R}{r} . AB.$$

Der Winkel FBG ist $= BOA = \mu_1$ und man beschreibe nun mit $BF = R - r$ um B als Mittelpunkt den Kreisbogen Fg. Da in den Sektoren BFg und AOB die Centri-Winkel gleich sind, so hat man:

$$Fg : AB = R - r : r,$$

$$Fg = \frac{(R-r)}{r} . AB.$$

Nun ist aber offenbar $FG > Fg$ oder $FG > \frac{R-r}{r} . AB$. Wir haben also:

$$EF = \frac{R}{r} . AB,$$

$$FG > \frac{R-r}{r} . AB,$$

somit:

$$EF - FG < \frac{R}{r} . AB - \left(\frac{R}{r} - 1\right) . AB,$$

$$EG < AB \text{ w. z. b. w.}$$

Sind ebenso HC und JD Sekanten, welche parallel zu den früheren gezogen wurden, so wird auch $GH < BC$ und $HJ < CD$ sein.

Trägt man nun auf der Periferie des kleineren Kreises mehrere gleiche Bögen auf $AB = BC = CD$ und zieht man durch die Theilungspunkte A, B, C, D, die schon oben erwähnten Parallelen, so wird durch letztere die Periferie des grösseren Kreises nicht auch in gleiche Bögen getheilt, sondern wenn man von E ausgehet, wird jeder folgende Bogen kleiner, als der vorhergehende: $EG > GH > HJ$ u. s. w., und das ist nun auch zu beweisen.

Bezeichnen wir die um O liegenden Centri-Winkel mit μ_1, μ_2, μ_3. Diese sind natürlich einander gleich und die Zeiger haben nur anzudeuten, in welcher Ordnung diese Winkel auf einander folgen.

Hierauf ziehen wir durch den Theilungspunkt D die $DL \parallel OC$, ferner $DK \parallel OB$ und $DJ \parallel OA$. Es ist nun klar, dass diese durch den Punkt D zu den Halbmessern des kleineren Kreises parallel gezogenen Geraden dieselben, unter sich gleichen Winkeln bilden, wie die Halbmesser selbst.

Ihre Aufeinanderfolge ist aber natürlich die umgekehrte im Vergleich mit den am Mittelpunkte O liegenden Winkeln. Man sieht nun deutlich, dass die von D aus gezogenen Linien die Pe-

riferie des grösseren Kreises nicht in gleiche Bögen theilen können, obgleich die Winkel MDL, LDK und KDJ einander gleich sind, denn D ist ja nicht der Mittelpunkt dieses Kreises. Sie sind nothwendig ungleich und zwar ist, wenn man von M ausgehet, jeder folgende Bogen grösser als der unmittelbar vorhergehende. Es ist $ML < KL < JK$ u. s. w.

Der Kürze wegen wollen wir diese Bögen in derselben Ordnung mit t_1, t_2, t_3 u. s. w. bezeichnen. Wir haben nun:

$$EJ = EM - JM,$$
$$EJ = 3.EF - (t_1 + t_2 + t_3).$$

Das gilt also in Bezug auf die durch den Theilungspunkt D gezogene Parallele.

Für die durch den Theilungspunkt C gezogene Parallele werden wir ebenso haben:

$$EH = 2.EF - (t_1 + t_2),$$

und für die durch B gezogene Parallele:

$$EG = EF - t_1.$$

Schliesslich hat man:

$$GH = EH - EG = 2.EF - (t_1 + t_2) - (EF - t_1),$$
$$GH = EF - t_2.$$

Da nun aber $t_2 > t_1$, so ist auch $GH < EG$.

Ebenso hat man:

$$HJ = EJ - EH = 3.EF - (t_1 + t_2 + t_3) - [2.EF - (t_1 + t_2)],$$
$$HJ = EF - t_3.$$

Nun ist $EF - t_3 < EF - t_2$, weil $t_3 > t_2$, somit $HJ < GH$ w. z. b. w.

Wir kommen jetzt zu der Anwendung dieser Sätze und diese wird nicht schwer fallen.

Die Fig. 16 ist für den Fall entworfen, wenn $m > 1$ ist. Ist BO der einfallende Strahl, so ist $BOA = \mu_1$ der Einfallswinkel und $GOE = \varrho$ der Brechungswinkel; lässt man nun den Einfallswinkel um $\mu_2 = \mu_1$ wachsen, indem man den einfallenden Strahl in die Lage OC bringt, so dass $BOC = AOB$ wird, so kommt der gebrochene Strahl in die Lage OH und es hat sich somit der Brechungswinkel um $GOH = \varrho'$ geändert.

Die Aenderung ϱ' des Brechungswinkels muss nun für's

Erste immer kleiner sein als die Aenderung μ_2 des Einfallswinkels, denn es wäre der Winkel GOH selbst in dem Falle kleiner als BOC, wenn der Bogen $GH = BC$ wäre, weil von zwei gleich grossen Bögen, die in verschiedenen Kreisen liegen, demjenigen ein kleinerer Centri-Winkel entspricht, der in dem grösseren Kreise liegt. Da nun aber $GH < BC$ ist, so muss aus diesem Grunde der Winkel GOH umsomehr kleiner sein als BOC.

Da nun aber der Bogen GH auch kleiner ist als EG, so muss auch der Winkel $GOH = \varrho'$ kleiner sein als $GOE = \varrho$.

Drehet man ferner den einfallenden Strahl in die Lage OD, wodurch der Einfallswinkel wieder um $COD = \mu_2$ vergrössert wird, so kommt der gebrochene Strahl in die Lage OJ und es wird dadurch der Brechungswinkel um $HOJ = \varrho''$ vergrössert. Weil nun wieder $HJ < GH$, so muss auch $\varrho'' < \varrho'$ sein.

Die Zunahme des Brechungswinkels wird daher immer kleiner, während die des Einfallswinkels immer gleich bleibt.

Dieselbe Fig. 16 gibt uns auch eine deutliche Vorstellung, wie gleichzeitig auch der Ablenkungswinkel sich ändert.

Für den Einfallswinkel AOD ist nemlich der Ablenkungswinkel $= JOD$. Dieser Winkel kann aber gemessen werden durch den Bogen JM. Von diesem Bogen wissen wir aber, dass er aus den Theilen $ML = t_1$, $KL = t_2$ und $JK = t_3$ bestehet, wovon jeder folgende grösser ist als der vorhergehende und deren jeder einer gleich grossen Aenderung des Einfallswinkels entspricht. Verbindet man daher die Punkte M, L, K mit dem Centro O, so werden die Winkel MOL, KOL, JOK u. s. w. die aufeinander folgenden Aenderungen des Ablenkungswinkels vorstellen und diese müssen daher ebenfalls immer grösser und grösser werden.

Ist die Aenderung des Einfallswinkels unendlich klein, so kann man den Bogen CD und ebenso HJ (Fig. 16) als gerade Linien ansehen, und wenn man Hf und Cg senkrecht auf die Sekante DJ zieht, so hat man:

$$Hf = HJ.\cos JHf$$

und

$$Cg = CD.\cos DCg.$$

Nun ist aber der Winkel $JHf = EOH = b$, weil die Schenkel des einen senkrecht stehen auf jenen des andern, und aus demselben Grunde ist auch $DCg = AOC = a$. Man hat also:

$$Hf = HJ.\cos b,$$
$$Cg = CD.\cos a.$$

Weil nun $Hf = Cg$, so ist:

$$HJ.\cos b = CD.\cos a,$$
$$\frac{HJ}{CD} = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Ferner ist $HJ = \varrho Rg$ und $CD = \mu rg$, wenn ϱ und μ die Anzahl Grade der Bögen HJ und CD bedeuten und g die frühere Bedeutung hat. Demnach ist:

$$\frac{\varrho Rg}{\mu rg} = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Aber $\frac{R}{r} = m$, somit:

$$\frac{\varrho}{\mu}.m = \frac{\cos a}{\cos b},$$
$$\varrho = \frac{\mu}{m}.\frac{\cos a}{\cos b}.$$

Diese Formel enthält nun das Gesetz, nach dem sich der Brechungswinkel ändert.

Gehet der Einfallswinkel a in $a+\mu$ und der Brechungswinkel b in $b+\varrho$ über, so ist die Ablenkung:

$$a+\mu-(b+\varrho) = (a-b)+(\mu-\varrho).$$

Hier stellt $\mu-\varrho$ die entsprechende Aenderung der Ablenkung vor, die vorhin mit ν bezeichnet wurde. Es ist somit:

$$\nu = \mu-\varrho, \quad \text{oder:} \quad \mu = \nu+\varrho.$$

Substituirt man nun für ν und ϱ die vorhin gefundenen Werthe und setzt der Einfachheit wegen $\frac{r'}{R} = n$, so erhält man:

$$\mu = \mu.n.\frac{1}{\cos b}+\frac{\mu}{m}.\frac{\cos a}{\cos b},$$
$$1 = \frac{n}{\cos b}+\frac{\cos a}{m\cos b},$$
$$mn = -\cos a + m\cos b.$$

Und da $m = \frac{R}{r}$ und $n = \frac{r'}{R}$ ist, so ist $mn = \frac{r'}{r}$, wo r' dieselbe Bedeutung hat, wie v in Fig. 5 und r den einfallenden Strahl vorstellt. Wir haben somit:

$$\frac{r'}{r} = -\cos a + m\cos b.$$

Diese Gleichung kann man auch unmittelbar aus Fig. 5 erhalten, denn es ist in den rechtwinkligen Dreiecken *PBA* und *POA*:

$$BP = AB.\cos b = m.AO.\cos b$$

und

$$OP = AO.\cos a,$$

$$BP - OP = v = AO.(m\cos b - \cos a),$$

somit:

$$\frac{v}{AO} = \frac{r'}{r} = -\cos a + m\cos b.$$

§. 10. Unter welcher Bedingung bleibt die Richtung des gebrochenen Strahles konstant?

Die Grösse eines Einfallswinkels wie *DAx* (Fig. 12) kann auf zwei Arten geändert werden, entweder durch Drehung des einfallenden Strahles *DA* oder des Einfallslothes *Ax* um den Einfallspunkt *A*. Die Drehung des Einfallslothes ist natürlich äquivalent der Drehung der Trennungsfläche.

Es ist in Bezug auf die Richtung des gebrochenen Strahles nicht gleichgiltig, auf welche von diesen zwei Arten der Einfallswinkel geändert, z. B. vergrössert wird.

Drehe ich den einfallenden Strahl *DA* schraubenlinks, während das Einfallsloth in seiner Lage verbleibt, so wird dadurch auch der gebrochene Strahl schraubenlinks gedrehet. Das bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Bringe ich aber das Einfallsloth aus der Lage *xy* in die Lage *x'y'*, während wieder der einfallende Strahl *DA* seine Richtung beibehält, so wird dadurch der ursprüngliche Einfallswinkel *DAx* um $xAx' = q$ vergrössert; würde nun bei dieser Drehung des Einfallslothes der gebrochene Strahl, als welchen wir *AE* annehmen wollen, in seiner Lage verbleiben, so würde der anfängliche Brechungswinkel *yAE* um $yAy' = q$ vergrössert, also um ebensoviel, wie der Einfallswinkel. Nun wissen wir aber, dass die Aenderung des Brechungswinkels weniger betragen müsse, als jene des Einfallswinkels. Es muss also der gebrochene Strahl aus der Lage *AE* näher an das Einfallsloth rücken, indem er etwa die Lage *AB* annimmt. Weil der anfängliche Brechungswinkel *yAE* durch Drehung des Einfallslothes auf seiner linken Seite um etwas zu viel vergrössert wurde, so muss er auf seiner rechten Seite wieder eine entsprechende Verminderung um den Winkel *BAE*

erleiden. Daraus gehet aber hervor, dass, wenn das Einfallsloth schraubenrechts gedrehet wird, auch der gebrochene Strahl in demselben Sinne gedrehet werde.

Werden also der einfallende Strahl und das Einfallsloth gleichzeitig nach entgegengesetzten Richtungen gedreht, so kann bei einem gewissen Verhältnisse dieser Drehungen ihre Wirkung auf den gebrochenen Strahl sich aufheben und dieser wird somit seine anfängliche Lage unverrückt beibehalten. So wurde oben der gebrochene Strahl AE durch Drehung des Einfallslothes in die Lage AB gebracht; er kann nun in die Lage AE wieder zurück versetzt werden, wenn der einfallende Strahl DA etwa in die Lage CA gedrehet wird.

Behält nun aber der gebrochene Strahl unverrückt seine Richtung bei, so wird durch den Drehungswinkel q des Einfallslothes offenbar blos der Brechungswinkel, und durch den Drehungswinkel μ des einfallenden Strahles wird ebenso blos die Ablenkung geändert.

Das Gesagte lässt sich auch im Sinne der Fig. 6 erläutern.

In dieser Figur wurde der auffallende Strahl OA in die Lage CA gedrehet und so kam der gebrochene aus der anfänglichen Lage AB in die Lage AD. Wenn wir nun die Trennungsfläche mn in die Lage $m'n'$ bringen, so dass die Verbindungslinie $BC \perp m'n'$ steht, so ist dadurch der gebrochene Strahl wieder in die Lage AB zurück versetzt.

Der anfängliche Ablenkungswinkel war $= BAO$, jetzt ist er $= BAC$; er ist also um OAC grösser; aber OAC ist der Winkel, um welchen der einfallende Strahl gedrehet wurde. Ferner ist OBC der Winkel, um welchen der Brechungswinkel zugenommen hat und es ist $OBC = nAn'$, d. h. gleich dem Winkel, um welchen die Trennungsfläche oder das Einfallsloth gedrehet wurde.

Bei der Brechung vom Einfallslothe verhält es sich anders. Da muss bei konstant bleibender Richtung des gebrochenen Strahles der einfallende in demselben Sinne gedrehet werden, wie das Einfallsloth. Denn wenn jetzt CA (Fig. 6) den gebrochenen Strahl vorstellt und DA den einfallenden, so befindet sich der letztere mit dem Einfallslothe Ax auf der nemlichen, hier linken Seite des gebrochenen Strahles; während sie bei der Brechung zum Einfallslothe auf entgegengesetzten Seiten des gebrochenen Strahles lagen. Drehet man demnach die Trennungsfläche mn schraubenlinks in die Lage $m'n'$, so wird auch das Einfallsloth Ax um gleichviel schraubenlinks gedrehet. Ziehet man nun durch den Endpunkt C des gebrochenen Strahles die $BC \perp m'n'$ und

verbindet dann B d. i. den Punkt, wo jene Senkrechte die Periferie des grösseren Kreises schneidet, mit A, so gibt BA die Richtung an, welche der einfallende Strahl bei der neuen Lage $m'n'$ der Trennungsfläche haben muss, wenn der gebrochene seine ursprüngliche Lage CA beibehält. Da nun der einfallende Strahl Anfangs die Lage DA hatte, so muss er offenbar schraubenlinks, also in demselben Sinne, wie das Einfallsloth gedrehet werden, um in die neue Lage BA zu gelangen.

§. 11. Das Verhältniss des Brechungs- zum Ablenkungswinkel ändert sich mit dem Brechungs-Exponenten m.

Wir wissen, dass der gebrochene Strahl bei konstanter Richtung erhalten wird, wenn man sowohl den einfallenden Strahl als auch die Trennungsfläche nach entgegengesetzten Richtungen drehet. Es frägt sich nun, ob diese entgegengesetzten Drehungen gleich viel betragen oder nicht.

Beschreiben wir demnach aus dem Punkte A (Fig. 17) der Trennungsfläche zwei Kreise, den einen mit dem Halbmesser $= AO$, den andern mit dem Halbmesser $= AB$ und es sei $OA = \frac{AB}{2}$, so dass also O der Halbirungspunkt von AB ist. Durch diesen Punkt O ziehe man $uw \perp AB$; es ist dann uw eine Tangente des kleineren Kreises.

Wird nun $m = \frac{AB}{AO} = 2$ angenommen und stellt OA den einfallenden Strahl vor, der die Trennungsfläche mn senkrecht trifft, so wird der gebrochene Strahl AB ebenfalls senkrecht auf mn stehen. Bringt man hierauf den einfallenden Strahl in die Lage AC, so muss man die Trennungsfläche, damit der gebrochene AB unverrückt bleibe, in die Lage $m'n'$ bringen, so dass $BC \perp m'n'$ sei. Alsdann ist der Brechungswinkel $= OBC$ und der Ablenkungswinkel $= OAC$. Da aber $BC > AC$ ist, so wird $OAC > OBC$ sein.

Wenn also $m=2$ ist, wird stets der Ablenkungswinkel grösser sein, als der Brechungswinkel oder, was dasselbe ist, ich muss den einfallenden Strahl um einen grösseren Winkel drehen, als die Trennungsfläche, damit der gebrochene unverrückt bleibe. Das wird um so mehr der Fall sein, wenn $m > 2$ ist, in welchem Falle die uw den kleineren Kreis nicht mehr berühren wird.

Beschreibt man hierauf über AB als Durchmesser einen Halbkreis, der die uw in D schneidet, so wird das Dreieck BDA nicht nur rechtwinklig, sondern auch gleichschenklig sein.

Beschreiben wir ferner auch mit AD einen Kreis um den Mittelpunkt A, so wird dieser Kreis in dem Punkte D von der Verbindungslinie BD tangiret. Wir haben es jetzt mit einem Stoffe zu thun, dessen Brechungs-Exponent $m = \frac{BA}{EA}$ ist. Die Richtung des einfallenden Strahles ist AD; da aber $BD \perp AD$ stehet, so gibt AD auch die Lage der Trennungsfläche an. Wir haben also den Fall, wo der Einfallswinkel $= 90^0$ ist, denn es ist ja dieser Winkel mit ADB supplementär. Da nun $BD = AD$ ist, so ist auch der Brechungswinkel $OBD =$ dem Ablenkungswinkel OAD.

Ist der Einfallswinkel $< 90^0$, wenn z. B. der einfallende Strahl die Lage AF hat, so wird in dem Dreiecke BFA die Seite $BF < AF$, somit der Ablenkungswinkel OAF schon kleiner als der Brechungswinkel OBF. Der Brechungs-Exponent $m = \frac{BA}{EA}$ stellt daher wiederum einen Grenzwerth vor, welchen man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABD ausmitteln kann, denn es ist:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2,$$
$$\overline{AB}^2 = 2.\overline{AD}^2 = 2.\overline{AE}^2,$$
$$m^2.\overline{AE}^2 = 2.\overline{AE}^2,$$
$$m^2 = 2,$$
$$m = \sqrt{2}.$$

Für solche Stoffe also, deren Brechungs-Exponent $< \sqrt{2}$ ist, wird der Brechungswinkel stets grösser sein als der Ablenkungswinkel oder, was dasselbe ist, man wird bei konstanter Richtung des gebrochenen Strahles die Trennungsfläche um einen grösseren Winkel zu drehen haben als den einfallenden Strahl.

Für Stoffe, deren Brechungs-Exponent zwischen $m = 2$ und $m = \sqrt{2}$ liegt, wird, wenn man den Einfallswinkel, von Null angefangen, wachsen lässt, Anfangs der Brechungswinkel grösser sein als der Ablenkungswinkel; bei einem gewissen Einfallswinkel werden beide gleich sein und über diese Grenze hinaus wird der erstere kleiner sein als der letztere. Denn man setze den Brechungs-Exponenten $= \frac{AB}{AH}$, wo $AH > OA$ und $< EA$ ist und beschreibe mit AH einen Kreis um A, so schneidet dieser die uw in r. Verbindet man nun irgend einen Punkt G des Bogens Hr, der ganz oberhalb uw liegt, mit B und A, so wird in dem

so entstehenden Dreiecke BGA die Seite BG stets $< AG$, hiemit auch der Winkel $ABG > BAG$ sein.

Hat aber der einfallende Strahl die Richtung Ar, so wird der Brechungswinkel bereits gleich sein dem Ablenkungswinkel, denn in dem Dreiecke ArB ist bereits $Ar = Br$.

Drehet man nun aber weiter den einfallenden Strahl in die Lage As, so dass der Punkt s bereits unterhalb uw liegt, so wird stets in dem Dreiecke ABs die $Bs > As$, hiemit auch Winkel $BAs > ABs$ sein.

In §. 8. wurde aus Müller's Lehrbuch der Physik eine Reihe von Ablenkungswinkeln angeführt, für einen Stoff, dessen Brechungs-Exponent $m = 1.5$ ist. Dieser liegt zwischen $\sqrt{2} = 1.414213$ und 2; aber er kommt der $\sqrt{2}$ sehr nahe. Wiewohl nun die in §. 8. angeführten Ablenkungswinkel sämmtlich kleiner sind als die entsprechenden Brechungswinkel, so muss es doch bei diesem Brechungs-Exponenten auch Ablenkungswinkel geben, die grösser sind als die entsprechenden Brechungswinkel. In der That, setzt man $b = 41°30'$, so ist $a = 83°43'$, somit $a - b = 42°12$, und es ist demnach $a - b > b$.

Setzt man den Ablenkungswinkel $= d$, so hat man, da stets $a = b + d$ ist:

$$m = \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin(b+d)}{\sin b},$$

und für den Fall, wo $b = d$ wird:

$$m = \frac{\sin 2b}{\sin b} = \frac{2\sin b \cos b}{\sin b},$$

$$m = 2\cos b, \quad \text{oder} \quad \cos b = \frac{m}{2}.$$

Diese letzte Gleichung drückt demnach die Bedingung aus, unter welcher der Brechungs- und Ablenkungswinkel einander gleich werden. Dem Gesagten zu Folge zerfallen alle Stoffe in drei Kathegorien: Erstens stark brechende, wenn $m > 2$; zweitens schwach brechende, wenn $m < \sqrt{2}$, und drittens Stoffe von mittlerem Brechungsvermögen, wenn m zwischen $\sqrt{2}$ und 2 liegt.

Derjenige Werth von a, bei welchem $b = d$ wird, hängt innig mit dem Brechungs-Exponenten zusammen und er ändert sich, wenn sich dieser ändert. Wir wollen ihn desshalb den Exponentialwinkel nennen. Er ist desto kleiner, je grösser m ist.

Diese ganze Betrachtung lässt sich mit Hilfe des Carnot'schen Lehrsatzes auch allgemein und zwar auf folgende Art durchführen.

Es sei in dem Dreiecke BFA (Fig. 17) der Kürze wegen:

$$AB = R, \quad AF = r \text{ und } BF = v.$$

Man hat demnach:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2 - 2AF.BF\cos BFA,$$
$$R^2 = r^2 + v^2 - 2vr\cos BFA,$$

und da BFA mit a supplementär ist:

$$R^2 = r^2 + v^2 + 2vr\cos a;$$

weil ferner $R = mr$ ist, so folgt:

$$m^2r^2 = r^2 + v^2 + 2vr\cos a,$$
$$\cos a = \frac{(m^2-1)r^2 - v^2}{2vr}.$$

Führt man in diese Gleichung die Bedingung ein, dass der Ablenkungswinkel = dem Brechungswinkel sei, so muss man $v = r$ setzen. Man bekommt alsdann:

$$\cos a = \frac{m^2-2}{2} = \frac{m^2}{2} - 1.$$

Für $m = 2$ ist $\cos a = 1$, somit $a = 0$;

und für $m = \sqrt{2}$ ist $\cos a = 0$, somit $a = 90^0$.

Ist $m < \sqrt{2}$, somit $m^2 < 2$, so wird $\cos a$ negativ, also $a > 90^0$, was nicht mehr statthaft ist, da der Einfallswinkel nicht grösser als 90^0 sein kann; setzt man ferner für m Werthe ein, die grösser sind als 2, so wird $\cos a$ imaginär.

Aus derselben Formel folgt auch von selbst, dass der Exponentialwinkel a im Allgemeinen desto kleiner wird, je grösser m genommen wird.

Es lässt sich übrigens die Bedingung: $\cos a = \frac{m^2}{2} - 1$ auch auf die früher erhaltene: $\cos b = \frac{m}{2}$ zurückführen, wie aus Folgendem erhellet:

$$\cos a = \frac{m^2-2}{2},$$

$$\sqrt{1-\sin^2 a} = \frac{m^2-2}{2},$$

und da $m = \frac{\sin a}{\sin b}$:

$$\sqrt{1-m^2\sin^2 b} = \frac{m^2-2}{2},$$

$$\sqrt{1-m^2(1-\cos^2 b)} = \frac{m^2-2}{2},$$

somit:

$$\cos b = \frac{m}{2}.$$

§. 12. Ein geometrischer Satz, der eine vielseitige Anwendung zu versprechen scheint.

In dem Dreiecke OCD (Fig. 18) sei $AB \| CD$; man errichte über AB als Grundlinie ein beliebiges Dreieck ABE, ziehe dann durch C die $CF \| AE$ und durch D die $DF \| BE$; so ist das Dreieck $CDF \sim ABE$. Wir haben daher:

$$AB : CD = AE : CF$$

und

$$AB : CD = OA : OC,$$

daher:

$$OA : OC = AE : CF.$$

In den Dreiecken OAE und OCF sind daher zwei Seiten des einen proportionirt zu zwei Seiten des andern und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel sind gleich; $OAE = OCF$. Es sind daher diese Dreiecke ähnlich und es muss Winkel $AOE = COF$ sein. Wenn aber diess, so muss die Seite OE mit OF zusammenfallen. Wenn ich daher O mit E verbinde, so muss diese Verbindungslinie auch durch F gehen.

Das ist der Satz und nun ein paar Anwendungen.

Der leuchtende Punkt O (Fig. 19) habe die Entfernung OR von der Trennungsfläche mn zweier Medien. Die Brechung geschehe zum Einfallslothe. Denkt man sich zwei auffallende Strahlen OA und OB, so mögen AE und BF ihre respektiven gebrochenen sowohl der Richtung als Grösse nach darstellen. Diese gebrochenen Strahlen hinreichend verlängert schneiden sich in dem Punkte M.

Nun wollen wir die Trennungsfläche aus der Lage *mn* in die parallele Lage *pl* versetzen. Dadurch werden die einfallenden Strahlen eine entsprechende Verlängerung erfahren. *OA* geht über in *OJ* und *OB* in *OK*. Um nun die gebrochenen Strahlen, die diesen verlängerten einfallenden entsprechen, zu erhalten, muss man durch *J* die $JG \parallel AE$ und durch *K* die $KH \parallel BF$ ziehen. Alsdann sind *JG* und *KH* die gesuchten gebrochenen Strahlen, welche hinreichend verlängert sich in *N* schneiden.

Nun ist aber in dem Dreiecke *OJK* die $AB \parallel JK$; ferner ist das Dreieck $AMB \sim JNK$, weil die Seiten des einen parallel sind zu den Seiten des anderen. Wenn man daher den leuchtenden Punkt *O* mit dem Scheitel *M* des einen Dreiecks verbindet, so muss diese Verbindungslinie auch durch den Scheitel *N* des anderen Dreieckes gehen.

Daraus gehet hervor, dass, wenn man die Trennungsfläche parallel zu sich, von dem leuchtenden Punkte immer mehr und mehr entfernt, der Durchschnittspunkt *M* zweier gebrochenen, auf die nemlichen einfallenden zu beziehenden Strahlen, stets in der nemlichen durch *O* gezogenen Geraden vorrücke.

Ferner sind auch die Dreiecke *MEF* und *NGH* ähnlich und da das Dreieck $NGH > MEF$ ist, so ist auch $GH > EF$. Wir sehen somit, dass der Abstand zweier Durchschnittspunkte in der Normalen, welche sich auf die nemlichen einfallenden Strahlen beziehen, desto grösser ausfällt, je weiter die Trennungsfläche von dem leuchtenden Punkte entfernt wird.

Es sei wiederum (Fig. 20) in *H* ein leuchtender Punkt, der die Strahlen *HA* und *HB* auf die Trennungsfläche *pq* sendet. Geschieht die Brechung zum Einfallslothe, so seien *AG* und *BJ* die entsprechenden gebrochenen Strahlen, die verlängert sich in *F* schneiden. Wir wollen jetzt annehmen, die Richtungen dieser gebrochenen Strahlen seien fix und es sei uns bloss gestattet, ihre Grössen abzuändern, was dadurch geschieht, indem man die Trennungsfläche *pq* in verschiedene andere, jedoch parallele Lagen bringt. Bringen wir demnach die Trennungsfläche in die Lage *mn*, so werden hiedurch gedachte Strahlen verkürzt. Ihre Längen sind jetzt *CG* und *DJ*. Es entsteht jetzt die Frage, welches die einfallenden Strahlen seien, die diesen verkürzten gebrochenen entsprechen? Man findet sie einfach so, wenn man von *C* die $Cb \parallel AH$ und von *D* die $Da \parallel HB$ ziehet. Es sind dann *bC* und *aD* die gesuchten einfallenden Strahlen, welche verlängert sich in *E* schneiden. Dieser Punkt *E* liegt links von

der Normalen, denn er muss ja bekanntlich in die Gerade FH fallen, welche den Durchschnittspunkt F mit H verbindet.

Einen anderen Fall der Anwendung bietet die Fig. 21. Von dem leuchtenden Punkte O fallen zwei Strahlen OD und OE auf ein von parallelen Ebenen mn und pq begrenztes Medium und geben die gebrochenen DM und EN an der Eintrittsfläche; verlängert man diese bis zur Austrittsfläche, so dass sie die Grössen MK und NL erhalten, so liefern sie in Folge der Brechung an dieser letzteren Fläche wiederum die gebrochenen Strahlen UK und VL, von denen $UK \parallel OD$ und $VL \parallel OE$ ist. Verbindet man nun den Punkt α, wo sich die an der Eintrittsfläche gebrochenen Strahlen schneiden, mit dem leuchtenden Punkte O, so muss diese Verbindungslinie αO auch durch den Punkt β hindurchgehen, wo sich die an der Austrittsfläche gebrochenen schneiden.

Auch die bekannte Erscheinung, die ein in Wasser getauchter Stab darbietet, lässt sich hier subsumiren. AE (Fig. 22) stellt einen solchen Stab vor, der schief gegen die Oberfläche mn des Wassers gehalten wird und mit dem Theile AB aus demselben herausragt. Man ziehe von den Punkten C, D und E des eingetauchten Theiles die zu einander parallelen Strahlen CF, DG und EH. Diese werden an der Trennungsfläche mn gebrochen und treten in den ebenfalls parallelen Richtungen FM, GN und HO heraus. Fällt man hierauf von den Punkten C, D und E Senkrechte auf die Trennungsfläche mn, so werden diese von den austretenden Strahlen, sobald man selbe verlängert, hintereinander in J, K, L geschnitten und diese Durchschnittspunkte sind die Orte, an welchen das Auge die Punkte C, D und E des eingetauchten Theiles sehen würde, wenn es nacheinander jeden der austretenden Strahlen aufnähme. In diesem Falle liegen aber die Punkte L, K und J in Folge des an der Spitze dieses §. bewiesenen Satzes in einer durch den Punkt B gehenden Geraden.

Würde also das Auge gleichzeitig alle parallel austretenden Strahlen aufnehmen können, so müsste ihm der eingetauchte Theil des Stabes gerade erscheinen. Das ist nur in einem Falle möglich, wenn nemlich das Auge knapp oberhalb des herausragenden Theiles AB (Fig. 23) sich befindet und längs desselben nach dem eingetauchten hinschaut, denn da werden die parallel austretenden Strahlen so nahe an einander gerückt sein, dass sie den Cylinder $ABhi$ bilden, der so dünn ist, dass ihn die Pupille aufzunehmen vermag. In allen anderen Lagen des Auges muss der eingetauchte Theil EB des Stabes gekrümmt erscheinen und zwar wird er seine konkave Seite der Oberfläche mn des Was-

sers zuwenden, weil das Auge dann die einzelnen Punkte desselben nur mittelst solcher Strahlen sieht, die gegen dasselbe konvergiren. Man wird sich von dem Gesagten überzeugen, wenn man einen etwas längeren, wenigstens zwei Schuh langen Stab zu dem Versuche nimmt.

§. 13. Ein zu lösendes Problem.

Man denke sich das Medium, in welches die von dem leuchtenden Punkte *O* (Fig. 20) herkommenden Strahlen *OC* und *OD* eintreten, hinsichtlich seiner materiellen Beschaffenheit, wie durch Zauberei, in stetiger Veränderung begriffen, so dass dadurch der Brechungs-Exponent (von $m = 1$ angefangen) in den Zustand stetigen Wachsens versetzt wird. Die den obigen einfallenden Strahlen, die wir als unveränderlich beibehalten, entsprechenden gebrochenen *CG* und *DJ* werden alsdann immer grösser und grösser und es wird ihr Durchschnittspunkt *F* fortwährend den Ort verändern und somit eine gewisse Bahn beschreiben.

Alles, namentlich eine, wenngleich nur für einige wenige Werthe des Brechungs-Exponenten, jedoch mit Genauigkeit ausgeführte Konstruktion der gebrochenen Strahlen, deutet darauf hin, dass diese Bahn eine Kurve sei, die ihre hohle Seite der verlängerten Normalen *KO* zuwendet.

Es ist mir jedoch bis jetzt nicht gelungen, dieses durch die Rechnung zu beweisen. Dass ich aber dieses Problem jetzt schon, obgleich ungelöst, in die Oeffentlichkeit bringe, dazu bestimmt mich die Erwägung, dass es von den mathematischen Genien der Gegenwart, die so Grosses leisten, früher, leichter und sicherer gelöst werden dürfte, als ich es vermöchte.

Dass aber dieses Problem von hoher Wichtigkeit für die Optik sei, erhellet aus folgendem Beispiele.

Man stelle sich wieder ein von parallelen Ebenen *mn* und *pq* (Fig. 20) begrenztes Medium z. B. Glas vor. Die Strahlen *OC* und *OD*, (die der besseren Uebersicht wegen in der Figur nicht gezeichnet wurden), kommen aus der Luft, da sich der leuchtende Punkt, als welchen wir *O* annehmen, in Luft befindet.

Die entsprechenden gebrochenen Strahlen seien *CG* und *DJ*, welche verlängert sich in *F* schneiden.

Diese letzteren Strahlen sind bekanntlich, wenn sie gehörig verlängert werden, für die Austrittsfläche des Mediums als einfallende zu betrachten. Je nach der Dicke des Mediums, das sie durchwandern,

wird ihre Verlängerung bald mehr bald weniger betragen. Wir können nun von der Brechung an der ersten Fläche auch ganz absehen, können uns auch die durch die letztere Brechung erhaltenen Strahlen ihrer ganzen Länge nach, d. i. bis zu den Durchschnittspunkten G und J, in der Glasmasse liegend denken. Wir werden es jetzt bloss mit der Austrittsfläche des Mediums zu thun haben, unterhalb welcher sich aber nicht Luft, sondern irgend ein anderer Stoff, den wir mit T benennen wollen, befindet, der aber das Licht etwas weniger stark bricht, als Glas. An der zweiten Fläche des Mediums werden also genannte Strahlen aus dem Glase in diesen Stoff T einzutreten haben.

Denkt man sich das Glasmedium zuerst unendlich dünn, so ist es gerade so, als würden die Strahlen OC und OD direkt aus der Luft in das Medium T eintreten. Wir werden somit die durch Brechung in diesem Medium T sich ergebenden, gebrochenen Strahlen ganz auf die bekannte Weise konstruiren. Da der Brechungs-Exponent des Stoffes T kleiner angenommen wurde, als jener des Glases, so werden die auf den ersteren sich beziehenden gebrochenen Strahlen auch entsprechend kleiner sein. Sie seien Cb und Da; verlängert schneiden sie sich in E. Verbindet man nun diesen Punkt E mit F und verlängert diese Verbindungslinie nach abwärts, so wird dadurch die Normale in H geschnitten. Die Verbindungslinie EF kann nicht durch O gehen, denn gemäss der an der Spitze dieses §. stehenden Erörterung liegen die Punkte O, E und F in einer Kurve. Von diesem Punkte H wollen wir nun die $HB \parallel ED$ ziehen, welche den verlängerten Strahl JD in B durchschneidet und ebenso die $HA \parallel EC$, wodurch die Verlängerung des anderen Strahles GC in A geschnitten wird. Die Punkte A und B liegen nothwendig in einer zu mn parallelen Geraden pq, denn es ist ja:

$$HF : EF = BF : DF$$

und

$$HF : EF = AF : CF,$$

somit auch:

$$BF : DF = AF : CF.$$

Da also in dem Dreiecke AFB die Seiten durch die Gerade mn proportionirt geschnitten werden, so ist sie parallel zu pq.

Wird demnach pq als Austrittsfläche des Glasmediums genommen, dessen Dicke $= KL$, so stellen AH und BH die Grössen und auch die Richtungen der an dieser Fläche beim Austritte aus dem Glase in das Medium T gebrochenen Strahlen

vor. Aber nicht nur diese zwei, sondern auch alle anderen austretenden Strahlen werden sich in dem nemlichen Punkte H schneiden, so dass also ein innerhalb des Mediums T sich befindendes Auge den leuchtenden Punkt auch nur als einfachen Punkt in H erblickt. Die Dicke des Glasmediums wird sich zu diesem Behufe natürlich nach dem Brechungs-Exponenten von T richten. Je schwächer T das Licht bricht, desto kleiner wird KL sein müssen und wenn der Brechungs-Exponent von T jenem der Luft gleichkommt, muss KL unendlich klein genommen werden.

Wiewohl nun dieser Beweis, was seine Durchführungsweise anbelangt, mit allem Vorhergehenden im Einklange stehet, so kommt mir doch das erhaltene Resultat so merkwürdig oder eigentlich sonderbar vor, dass ich gewünscht hätte, es durch einen Versuch stützen zu können. Allein einen solchen Versuch herzustellen, dürfte schwer fallen.

IV.

Sur le mouvement rectiligne d'une molécule, soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique rationnelle et entière de la distance d'un centre fixe

par

Monsieur *C. F. E. Björling* jun.,

Lector à l'école supérieure de Halmstad en Suède.

(Figures v. Tab V.)

1.

Nous désignons par x la distance de la molécule au centre fixe, par t le temps et par $f(x)$ une fonction algébrique, rationnelle et entière. L'équation fondamentale devient alors:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^2x}{dt^2} = f(x),$$

qui donne par une première intégration:

$$(2) \ldots \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int_i^x f(x)\,dx + V^2 = F(x) - F(i) + V^2,$$

si nous désignons par $F(x)$ la fonction primitive de $2f(x)$, par i l'abscisse initiale de la molécule et par V sa vitesse initiale. Pour trouver la relation entre x et t il faut aussi effectuer la quadrature:

$$(3) \ldots\ldots\ldots \int \frac{dx}{\sqrt{F(x) - F(i) + V^2}},$$

ce qui ne peut se faire généralement en des termes finis, quand le degré de $f(x)$ surpasse 1.

La vitesse de la molécule se peut au contraire toujours exprimer en fonction finie de x moyennant l'équ. (2), qui donne:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{F(x) - F(i) + V^2}.$$

Mais il reste encore des difficultés, qui proviennent surtout de la circonstance qu'il existe presque toujours une infinité de valeurs du radical qui ne regardent point la question dynamique. Ainsi par exemple le radical tend souvent à l'infini avec x, tandis que la vitesse et la distance du mobile ne surpassent pas des bornes finies.

Ces difficultés s'agrandissent considérablement, si l'on veut généraliser le problème et chercher les espèces de mouvement qui correspondent à des circonstances initiales diverses.

Il m'a donc semblé de quelque intérêt de trouver une méthode générale pour faciliter le traitement des questions de ce genre.

2.

Dans le Tome XLVIII No. XXVIII. p. 363. de ce journal j'ai employé une construction géométrique très-simple pour trouver les conditions de la réalité des racines d'équations algébriques, et j'y ai montré que pour découvrir l'espèce des racines d'une équation donnée il suffit de connaître les valeurs des racines réelles de l'équation dérivée.

Je vais maintenant employer des constructions analogues pour la résolution du problème ci-dessus proposé, et je montrerai que pour trouver l'espèce de mouvement de la molécule il suffit de connaître les valeurs des racines réelles de l'équ. $f(x) = 0$.

Considérons les trois courbes qui représentent en des coordonnés cartésiennes rectangulaires les trois équations:

$$z = f(x), \quad \eta = F(x) - F(i) + V^2, \quad y^2 = F(x) - F(i) + V^2,$$

x étant pris pour abscisse, et z, η, y pour ordonnées. Nous les appellons respectivement courbe de force, courbe auxiliaire et courbe de vitesse, ou simplement, courbe z, c. η et c. y.

En faisant coïncider les axes verticaux des trois systèmes, on parcourt d'un seul coup d'oeil les valeurs des trois ordonnées qui corréspondent à une même abscisse.

Les deux premières courbes sont continues, elles s'étendent infiniment à gauche et à droite et sont coupées dans un seul point par chaque droite verticale. Elles ne possèdent donc aucune tangente verticale, ni d'autres singularités que des inflexions et en général des contacts d'ordre supérieur avec des droites.

La fonction z étant déterminée, la forme de la courbe auxiliaire l'est aussi. Car z est la dérivée de η, divisée par 2; et en augmentant ou diminuant la constante, ajoutée à l'intégration, on ne fait que transporter l'axe des x de la courbe η en bas ou en haut parallèlement à lui-même.

La troisième courbe ne ressemble point aux deux précédentes. D'abord elle est symétrique par rapport à l'axe des x. Elle ne s'étend pas tout le long de cet axe; elle ne possède en effet de points que pour η positif. Ainsi p. ex. dans la fig. 1., où sont tracées une courbe de vitesse (A) et la courbe auxiliaire corréspondante (B), on voit qu'il ne corréspond de points de celle-là qu'à ces parties de celle-ci qui sont supérieures à l'axe des x. Les valeurs numériques des deux ordonnées η et y croissent et décroissent à la même fois, donc elles ont les mêmes maxima et minima. A $\eta = 0$ il corréspond toujours $y = 0$.

Nous allons examiner la courbe y dans ces derniers points. Soit $x = a$ une racine réelle de l'équ. $\eta = 0$; posons:

$$\eta = (x-a)^n \varphi(x). \quad (\varphi(a) \text{ point zéro ou infini.})$$

On a donc:

$$\frac{d\eta}{dx} = (x-a)^{n-1}[(x-a)\varphi'(x) + n\varphi(x)],$$

et puisque $$y \text{ est } = \pm\sqrt{\eta},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{2\sqrt{\eta}}\cdot\frac{d\eta}{dx};$$

par suite:

$$\frac{dy}{dx} = \pm(x-a)^{\frac{1}{2}(n-2)}\cdot\frac{(x-a)\varphi'(x)+n\varphi(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}}.$$

Donc la valeur $x = a$ donne

pour $n = 1$, $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$,

$n = 2$, $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\varphi(a)}$,

$n > 2$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

On voit donc que la courbe y coupe l'axe des x perpendiculairement ou non dans les zéros, selon que les abscisses correspondantes sont des racines simples ou multiples de l'équation $\eta=0$.

Ainsi on voit dans la fig. I. que la courbe de vitesse est perpendiculaire à l'axe des x aux points a, b, b', c, c'', d, d', e, f, dont les abscisses sont des racines simples de l'équ. $\eta = 0$; qu'elle forme un angle aigu avec l'axe au point c', dont l'abscisse est une racine double, et qu'elle le touche au point e', dont l'abscisse est une racine triple de cette même équation.

Après avoir ainsi étudié sommairement les propriétés géométriques principales des trois courbes, nous allons examiner la signification géométrique de la première et de la troisième.

3.

La courbe z forme, comme nous l'avons vu, un trait continu. Dans les régions où elle est supérieure à l'axe des x, la force est positive, c. à d. qu'elle tend à augmenter l'abscisse du mobile; si la courbe est inférieure à cet axe, la force agit au contraire. Les racines réelles de l'équ. $z = 0$ déterminent les points où il n'agit pas de force.

La courbe z est symétrique par rapport à l'axe des x. Si la vitesse du mobile dans un moment est représentée par une ordonnée positive, p. ex. gh (fig. I.), il ne faut pour connaître sa

vitesse future que suivre la courbe à droite; si l'on commence au contraire par une ordonnée négative, p. ex. gh', on suivra la courbe à gauche.

Supposons que l'on soit dans le premier cas et qu'on parvienne ainsi au point b', où la vitesse est nulle. La courbe est dans ce point perpendiculaire à l'axe des x; donc l'abscisse correspondante est une racine simple de l'équ. $\eta = 0$. La force z n'y est donc pas zéro, et l'on voit facilement qu'elle est négative, puisque η y décroît. Le mobile y tournera donc, sa vitesse sera représentée par les ordonnées de la branche inférieure, et il parviendra ainsi à b. Ici la force est positive, le mobile tournera de nouveau, et ne pouvant jamais dépasser les deux limites b et b', il oscillera toujours entre ces deux points.

Il faut pourtant démontrer que le temps qu'emploie la molécule pour aller de g à b', ou de ce dernier point à b, n'est pas infini.

Soient α, β les abscisses des points g et b'. La dernière quantité est une racine simple de l'équ. $\eta = 0$.

Le temps du trajet de g à b' est donné par l'intégrale:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{\eta}}.$$

Si nous posons maintenant:

$$\eta = \frac{\beta - x}{[\varphi(x)]^2},$$

il est évident que la fonction:

$$\varphi(x), \quad \text{c. à d.} \quad \pm \sqrt{\frac{\beta - x}{\eta}},$$

ne devient ni nulle ni infinie, pendant que x varie de α à β. Nous pouvons aussi choisir le signe supérieur et admettre que $\varphi(x)$ est positif durant tout le trajet.

Par cette transformation l'intégrale (1) prend la forme:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\beta - x}}.$$

Si nous désignons maintenant par M une constante quelconque $>$ la plus grande valeur que prend $\varphi(x)$, quand x varie de α à β, nous aurons pour de telles valeurs:

$$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\beta-x}} < \frac{M}{\sqrt{\beta-x}},$$

et par suite:

$$\int_a^\beta \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\beta-x}} < M\int_a^\beta \frac{dx}{\sqrt{\beta-x}}.$$

Le second membre de cette inégalité étant fini, le premier l'est aussi à plus forte raison.

On démontre de la même manière que le temps du trajet entre g et b, par suite aussi la somme de ces deux intégrales, ou le temps d'une demi-oscillation, est finie.

Une ovale fermée, telle que $bhb'h'$, représente donc un mouvement oscillatoire. Pendant chaque demi-oscillation la vitesse passe une seule fois par maximum.

La courbe fermée dd' représente aussi un mouvement périodique, mais plus compliqué, parce que la vitesse passe pendant chaque demi-oscillation par deux maxima.

4.

Nous supposons maintenant que la molécule se trouve au point k, et que sa vitesse soit représentée par l'ordonnée positive kl. Elle ira à droite et s'approchera du point e'. Supposons qu'elle y soit arrivée. La courbe n'y est pas perpendiculaire à l'axe, donc l'abscisse corréspondante est une rac. multiple de l'équ. $\eta = 0$. La force z y est donc zéro; par suite la molécule y restera pour toujours.

Mais en effet elle n'y parvient même pas. Car si nous désignons les abscisses des points k et e' par γ et δ, le temps qu'emploie la molécule pour le trajet entre ces deux points, est donné par l'intégrale:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \int_\gamma^\delta \frac{dx}{\sqrt{\eta}},$$

et nous allons démontrer que celle-ci est toujours infinie, quand δ est une rac. multiple de l'équ. $\eta = 0$.

Soit n le nombre des racines égales δ; si nous posons:

$$\eta = \frac{(\delta-x)^n}{[\varphi(x)]^2},$$

il est évident que la fonction:

$$\varphi(x), \text{ c. à d. } \pm\sqrt{\frac{(\delta-x)^n}{\eta}},$$

ne devient ni nulle ni infinie, quand x varie de γ à δ. Nous pouvons aussi choisir le signe supérieur.

Par cette substitution l'intégrale (I) prend la forme:

$$\int_\gamma^\delta \frac{\varphi(x)\,dx}{(\delta-x)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Si nous désignons maintenant par m une constante positive quelconque $<$ la plus petite valeur que prend $\varphi(x)$, quand x varie de γ à δ, nous aurons pour de telles valeurs:

$$\frac{\varphi(x)}{(\delta-x)^{\frac{1}{2}n}} > \frac{m}{(\delta-x)^{\frac{1}{2}n}},$$

et par suite:

$$\int_\gamma^\delta \frac{\varphi(x)\,dx}{(\delta-x)^{\frac{1}{2}n}} > m\int_\gamma^\delta \frac{dx}{(\delta-x)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Le second membre de cette inégalité étant infini, le premier l'est aussi à plus forte raison.

La molécule s'approchera donc infiniment du point e' sans y parvenir jamais.

Si la vitesse initiale du mobile était représentée par l'ordonnée négative kl', il irait d'abord à e, pour y tourner et ensuite se rapprocher du point e'.

Si la molécule était au commencement placée quelquepart entre c et c'', on voit facilement qu'elle finirait par se rapprocher indéfiniment du point e', dont l'abscisse est une rac. multiple de l'équ. $\eta = 0$.

5.

Il nous reste encore à considérer une troisième espèce de mouvement. Si la molécule est placée au commencement dans le point f, où la branche infinie coupe l'axe, ou à droite de lui, elle s'éloignera infiniment à droite avec une vitesse croissante. Si la vitesse initiale est nulle ou positive, la molécule ira toujours à droite; si elle est négative, elle ira d'abord au point f pour y tourner.

Si le mobile se trouve à gauche du point a, la chose se passera de la même manière, excepté que le mouvement se fera en sens contraire.

En vertu des propriétés de la courbe auxiliaire, mentionnées ci-dessus, il est évident que la courbe de vitesse ne peut présenter de formes qui ne se laissent ranger dans les trois catégories que nous avons étudiées. Donc il ne peut avoir lieu d'autres espèces de mouvement que les trois ci-dessus décrites.

6.

Nous allons appliquer ce qui précède à la question suivante: Trouver le mouvement d'une molécule, soumise à la force:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k(x-a)(x-b), \quad (k>0,\ b>a>0)$$

si elle se trouve à l'origine avec la vitesse V.

La courbe de force:

$$z = k(x-a)(x-b)$$

est une parabole ordinaire à l'axe vertical.

La courbe auxiliaire.

$$\eta = 2\int_0^x z\,dx + V^2 = F(x) + V^2,$$

qui est du troisième degré, a un maximum pour $x = a$, et un minimum pour $x = b$. $F(a)$ est positif, car $F(0)$ est $= 0$, et z positif depuis $x = 0$ à $x = a$, donc la fonction primitive $F(x)$ croissante dans le même intervalle. Quant à $F(b)$, nous nous restreignons au cas où il est négatif.

La fig. 2, représente ces deux courbes en A et B, et là-dessus les courbes de vitesse qui correspondent à des valeurs diverses de V.

Nous distinguons les quatre cas suivants.

Soit d'abord $V^2 = 0$. L'axe horizontal de la courbe η est signé par 1, la courbe de vitesse correspondante par 1'. La molécule, placée au commencement à l'extrémité gauche de l'ovale, parcourra toujours l'espace op d'un mouvement périodique.

Soit maintenant $V^2 > 0$, mais $< -F(b)$. L'axe horizontal de

la courbe auxiliaire est signée par 2, la courbe de vitesse est représentée en 2'. Le mouvement sera de la même espèce qu'au cas précédent, excepté que l'espace que parcourt le mobile, sera d'une étendue plus grande, savoir limitée des points dont les abscisses sont les deux moindres racines de l'équ. $F(x) + V^2 = 0$.

La chose se passera toujours de la même manière, quelque grande que soit la vitesse initiale, jusqu'à V^2 atteint la valeur $-F(b)$. Dans ce cas $x = b$ est une racine double de l'équ. $\eta = 0$, la courbe auxiliaire touche l'axe des x au point corréspondant, comme on le voit dans 3. L'ovale fermée de la courbe y (3') se combine par le point multiple l avec les branches infinies. La molécule s'approchera indéfiniment de ce point sans y parvenir. Si V est positif ($= oh$), la molécule commencera par aller à droite, elle passera un maximum de vitesse pour $x = a$, et se rapprochera ensuite à vitesse décroissante du point l. Si V est négatif ($= oh'$), la molécule ira d'abord à gauche, tournera au point k, déterminé par l'équation:

$$\frac{F(x) - F(b)}{(x-b)^2} = 0,$$

et se portera ensuite comme ci-dessus.

Supposons enfin $V^2 > -F(b)$. La courbe y, tracée à 4', montre que le mobile finira toujours par s'éloigner à droite avec une vitesse croissante. Auparavant la vitesse passe par un maximum pour $x = a$, un minimum pour $x = b$.

8.

La solution de tels problèmes ne consiste donc qu'en la construction de la courbe de vitesse. Mais cette courbe dépendant tout-à-fait de l'auxiliaire, il ne nous faut qu'étudier celle-ci; il suffit même de tracer seulement la partie d'elle qui, située au-dessus de l'axe des x, renferme entre ses intersections avec cet axe la place initiale du mobile. Car aux autres parties de la courbe auxiliaire corréspondent ou des valeurs imaginaires de y, ou de telles valeurs réelles qui ne regardent point la question dynamique.

Pour $x = i$ nous avons $\eta = V^2$. Donc si la vitesse initiale du mobile est nulle, la courbe auxiliaire passera par sa position initiale, et i sera une racine réelle de l'équ. $\eta = 0$. Si cette racine est multiple, $z = \frac{d^2x}{dt^2}$ est aussi zéro dans le même point,

donc la molécule y restera en repos. Nous pouvons donc toujours omettre ce cas dans la recherche suivante.

Si la vitesse initiale du mobile n'est pas zéro, l'ordonnée de la courbe auxiliaire sera toujours positive pour $x = i$.

Si i n'est pas une racine multiple, le mobile se mettra en route et sa vitesse ne changera point de direction, jusqu'il parvient à un point dont l'abscisse est une racine de l'équ. $\eta = 0$. Le mobile s'y arrêtera, et si la racine est simple, il retournera sur ses pas. S'il parvient, pendant ce mouvement rétrograde, à un autre point dont l'abscisse est une racine simple, il retournera encore une fois et continuera ainsi toujours d'aller et venir.

Nous pouvons donc énoncer ce

Théorème I. Si les deux racines de l'équation $\eta = 0$ qui renferment entre elles l'abscisse initiale, sont simples, la molécule oscillera toujours entre les deux points qu'elles déterminent.

Supposons maintenant que ces deux racines soient multiples. La molécule s'approchera infiniment d'un des deux points correspondants sans y parvenir jamais. Si l'une des deux racines est multiple, l'autre simple, et que la vitesse initiale est dirigé vers ce dernier point, le mobile y ira une seule fois pour tourner.

On obtient donc ce

Théorème II. Si l'une des deux racines qui renferment l'abscisse initiale, est multiple, l'autre réelle quelconque, le mobile tournera tout au plus une seule fois; il finira toujours par s'approcher d'un point dont l'abscisse est une racine multiple, sans y parvenir jamais.

S'il n'y a pas de racine réelle d'un côté de l'abscisse initiale, la molécule, en avançant vers ce côté, ne s'arrêtera jamais, et la valeur numérique de sa vitesse croîtra infiniment. Si la vitesse initiale est dirigée vers l'autre côté, deux cas peuvent se présenter. Si la racine la plus prochaine est simple, la molécule, après être parvenue au point corréspondant, tournera, elle repassera sa position initiale et se portera ensuite comme ci-dessus. Mais si cette racine est multiple, la molécule ne fera que s'approcher indéfiniment du point corréspondant.

Nous avons donc ce

Théorème III. S'il n'y a parmi les racines réelles

aucune plus grande (r. plus petite) que l'abscisse initiale, la molécule finira par s'éloigner à droite (r. à gauche) avec une vitesse croissante, pourvu que la plus grande (r. la plus petite) racine réelle ne soit pas multiple, et la vitesse initiale négative (r. positive). Dans ce dernier cas la molécule s'approchera indéfiniment du point dont l'abscisse est une racine multiple.

Enfin il ne faudra certainement pas démontrer ce

Théorème IV. S'il n'y a pas de racine réelle, la molécule s'éloignera avec une vitesse infiniment croissante à droite ou à gauche, selon que la vitesse initiale est positive ou négative.

Par ces théorèmes la question dynamique est ramenée à la discussion des racines de l'équ. $\eta = 0$. Mais cette discussion, comme je l'ai montré dans mon mémoire cité dans le paragraphe 2, pouvant se faire toujours, quand on connaît les valeurs des racines réelles de l'équation dérivée, il suffira, pour trouver l'espèce du mouvement de la molécule dans chaque cas spécial, de connaître les racines réelles de l'équ. $f(x) = 0$.

8.

Nous allons enfin appliquer ces théorèmes au cas où la fonction de force:

$$f(x) \text{ est } = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

(a, b, c, d réels et rangés par rapport à leur grandeur)

et que les maxima et les minima de $F(x)$ satisfont aux inégalités

$$F(a) > F(c) > F(b) > F(d).$$

Nous désignons les racines de l'équ. $\eta = 0$ par α, β, γ, δ, ε.

La courbe auxiliaire est tracée dans la fig. 3. Les droites horizontales désignent les diverses positions de l'axe des x. Elles sont signées des mêmes nombres que les cas correspondants qui suivent.

1. $F(a) - F(i) + V^2 < 0$ ou $F(a) < F(i) - V^2 = W$.

Il n'y a qu'une seule racine réelle ($\varepsilon > d$) de l'équ. $\eta = 0$. Il faut donc que i soit $\geqq \varepsilon$. Si V est positif, le mobile s'éloigne infiniment à droite; pour V négatif, il commence par aller à gauche,

il tourne pour $x = \varepsilon$, repasse sa position initiale et s'éloigne ensuite infiniment à droite.

2. $F(a) - F(i) + V^2 = 0$, ou $F(a) = W$.

(Trois racines réelles de l'équ. $\eta = 0$: $\alpha = a = \beta$, $d < \varepsilon$).

a) $i = a$; Mouvement nul.

b) $i \geqq \varepsilon$. Voir 1.

3. $F(a) > W > F(c)$.

(3 rac. réelles: $\alpha < a < \beta$, $d < \varepsilon$).

a) $\alpha \leqq i \leqq \beta$. Le mobile oscillera toujours entre les points, déterminés par α et β.

b) $i \geqq \varepsilon$. Voir 1.

4. $F(c) = W$.

(5 rac. réelles: $\alpha < a < \beta$, $\gamma = c = \delta$, $d < \varepsilon$).

a) $\alpha \leqq i \leqq \beta$. Voir 3. a).

b) $i = c$. Mouvement nul.

c) $i \geqq \varepsilon$. Voir 1.

5. $F(c) > W > F(b)$.

(5 rac. réelles: $\alpha < a < \beta < b < \gamma < c < \delta < d < \varepsilon$).

a) $\alpha \leqq i \leqq \beta$. Voir 3. a).

b) $\gamma \leqq i \leqq \delta$. Le mobile oscillera entre les deux points γ et δ.

c) $i \geqq \varepsilon$. Voir 1.

6. $F(b) = W$.

(5 rac. réelles: $\alpha < a$, $\beta = b = \gamma$, $\delta < d < \varepsilon$).

a) $\alpha \leqq i < \beta$. La molécule s'approchera infiniment du point β sans y parvenir. Si V est négatif, elle ira d'abord à gauche pour tourner au point α.

b) $\gamma < i \leqq \delta$. La molécule s'approchera infiniment du point γ.

Si V est positif, elle ira d'abord à droite pour tourner au point δ.

c) $i \geqq \varepsilon$. Voir 1.

7. $F(c) > W > F(d)$.

(3 rac. réelles: $\alpha < a$, $\delta < d < \varepsilon$).

a) $\alpha \leqq i \leqq \delta$. La molécule oscillera entre α et δ. La vitesse passera pendant chaque demi-oscillation par deux maxima (a et c) et un minimum (b).

b) $i \geqq \varepsilon$. Voir 1.

8. $F(d) = W$.

(3 rac. réelles: $\alpha < a$, $\delta = d = \varepsilon$).

a) $\alpha \leqq i < \delta$. La molécule s'approchera infiniment du point δ, sans y parvenir. Si V est négatif, elle ira d'abord au point α pour y tourner.

b) $i > \varepsilon$. Si V est négatif, la mol. s'approchera infiniment du point ε. Si V est positif, elle s'éloignera infiniment à droite.

9. $F(d) > W$.

(Une seule racine réelle: $\alpha < a$).

Un seul cas possible $i \geqq a$. La mol. s'éloignera infiniment à droite. Si V est négatif, elle commencera pourtant par aller à gauche pour tourner au point α. Si elle passe les points a, c, b, d, la vitesse passera un maximum aux deux premiers, un minimum aux derniers.

V.

Ueber die gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte und ihrer Krümmungskreise, insbesondere auch über die Maxima und Minima dieser Sehnen.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Die Theorie der gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte und ihrer Krümmungskreise erfordert, wenn sie mit möglichster Kürze und Eleganz entwickelt werden soll, wenigstens im Falle der Ellipse und Hyperbel, die Anwendung verschiedener Kunstgriffe; insbesondere aber gestattet dieselbe im Falle der Hyperbel eine sehr zweckmässige und lehrreiche Anwendung der Theorie der hyperbolischen Functionen, welche dieser letzteren, noch nicht oft genug in Anwendung gebrachten Theorie nach meiner Meinung sehr zur Empfehlung zu weiterer und allgemeinerer Anwendung gereicht; dies sind die Gründe, welche mir Veranlassung gegeben haben, in dieser Abhandlung die Theorie der gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte und ihrer Krümmungskreise, insbesondere auch die Theorie der Maxima und Minima dieser Sehnen, einer ausführlicheren Entwickelung zu unterwerfen und dabei namentlich auch die in Rede stehende Anwendung der hyperbolischen Functionen zu zeigen.

I. Die Parabel.

§. 1.

Wenn (xy) ein beliebiger Punkt der Parabel ist, so sind

bekanntlich die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises der Parabel in diesem Punkte:

$$3x + \tfrac{1}{2}p, \quad -\frac{4x^2}{y};$$

und der Halbmesser des Krümmungskreises ist:

$$\frac{4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}.$$

Bezeichnen nun u, v die veränderlichen oder laufenden Coordinaten, so ist die Gleichung des Krümmungskreises:

$$(u - (3x + \tfrac{1}{2}p))^2 + (v + \frac{4x^2}{y})^2 = \frac{(4y^2 + p^2)^3}{4p^4}.$$

Weil aber der Krümmungskreis durch den Punkt (x,y) geht, so kann man in dieser Gleichung für u, v beziehungsweise x, y setzen, wodurch man die Gleichung:

$$(x - (3x + \tfrac{1}{2}p))^2 + (y + \frac{4x^2}{y})^2 = \frac{(4y^2 + p^2)^3}{4p^4}$$

erhält. Daher ergiebt sich durch Subtraction der beiden vorstehenden Gleichungen als Gleichung des Krümmungskreises offenbar die Gleichung:

1)
$$\left.\begin{aligned}&(u - x)(u + x) - 2(3x + \tfrac{1}{2}p)(u - x)\\ &+ (v - y)(v + y) + \frac{8x^2}{y}(v - y)\end{aligned}\right\} = 0.$$

Bezeichnen von jetzt an aber u, v die Coordinaten der Durchschnittspunkte des Krümmungskreises mit der Parabel, so hat man zu deren Bestimmung, ausser der vorstehenden Gleichung, noch die Gleichung:

2) . . . . . $v^2 = pu$.

Multiplicirt man jetzt, um u, v zu bestimmen, die Gleichung 1) mit $v + y$, so wird dieselbe:

$$\left.\begin{aligned}&(u - x)(v + y)(u + x) - 2(3x + \tfrac{1}{2}p)(u - x)(v + y)\\ &+ (v^2 - y^2)(v + y) + \frac{8x^2}{y}(v + y)\end{aligned}\right\} = 0;$$

also, weil wegen der Gleichung 2) und wegen der Gleichung $y^2 = px$, da ja (x,y) ein Punkt der Parabel ist,

$$v^2 - y^2 = pu - px = p(u - x)$$

ist:

$$\left.\begin{aligned}&(u-x)(v+y)\{(u+x)-2(3x+\tfrac{1}{2}p)\}\\&+p(u-x)\{(v+y)+\frac{8x^2}{y}\}\end{aligned}\right\}=0.$$

Weil nun

$$x=\frac{y^2}{p},\quad u=\frac{v^2}{p};$$

folglich:

$$u+x=\frac{v^2+y^2}{p},\quad 2(3x+\tfrac{1}{2}p)=\frac{6y^2+p^2}{p},\quad \frac{8x^2}{y}=\frac{8y^3}{p^2}$$

ist; so wird die vorstehende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&(u-x)(v+y)\left\{\frac{v^2+y^2}{p}-\frac{6y^2+p^2}{p}\right\}\\&+p(u-x)\{v+y+\frac{8y^3}{p^2}\}\end{aligned}\right\}=0.$$

Mittelst leichter Rechnung findet man:

$$\begin{aligned}&(v+y)\left\{\frac{v^2+y^2}{p}-\frac{6y^2+p^2}{p}\right\}+p(v+y)+\frac{8y^3}{p}\\&=\frac{(v+y)(v^2+y^2)-6y^2(v+y)+8y^3}{p}\\&=\frac{(v+y)(v^2-5y^2)+8y^3}{p}\\&=\frac{v^3+yv^2-5y^2v+3y^3}{p},\end{aligned}$$

und die obige Gleichung wird also offenbar:

3) . . . . . $(u-x)(v^3+yv^2-5y^2v+3y^3)=0.$

Es erhellet aber auf der Stelle, dass die Grösse

$$v^3+yv^2-5y^2v+3y^3$$

für $v=y$ verschwindet und daher durch $v-y$ ohne Rest theilbar ist. In der That findet man leicht:

$$v^3+yv^2-5y^2v+3y^3=(v-y)(v^2+2yv-3y^2);$$

wo nun wieder sogleich erhellet, dass auch die Grösse

$$v^2+2yv-3y^2$$

für $v=y$ verschwindet und daher durch $v-y$ ohne Rest theilbar ist. In der That findet man leicht:

$$v^2 + 2yv - 3y^2 = (v - y)(v + 3y),$$

und die Gleichung 3) nimmt daher jetzt die folgende Form an:

$$4) \ldots\ldots\ldots (u - x)(v - y)^2(v + 3y) = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch $u = x$, und die Gleichung $v^2 = pu$ giebt dem entsprechend $v^2 = px = y^2$, also $v = \pm y$.

Die Gleichung 4) wird ferner erfüllt durch $v = y$, und die Gleichung $v^2 = pu$ giebt dem entsprechend $pu = y^2 = px$, also $u = x$.

Endlich wird die Gleichung 4) erfüllt durch $v = -3y$, und die Gleichung $v^2 = pu$ giebt dem entsprechend $pu = 9y^2 = 9px$, also $u = 9x$.

Da nun die Gleichung 1) nicht, wie es erforderlich ist, durch $u = x$, $v = -y$ erfüllt wird *), so bleiben uns bloss die beiden Auflösungen:

$$u = x, \quad v = y \quad \text{und} \quad u = 9x, \quad v = -3y$$

der Gleichung 4) übrig, und der Krümmungskreis der Parabel in dem Punkte (xy) schneidet dieselbe also nur in den beiden durch die Coordinaten

$$x, \ y \quad \text{und} \quad 9x, \ -3y$$

bestimmten Punkten, von denen der eine natürlich der Punkt der Parabel, durch welchen der Krümmungskreis gelegt worden ist, selbst ist.

Hiernach giebt es also nur **eine** Sehne, welche der Parabel und ihrem Krümmungskreise in dem Punkte (xy) gemeinschaftlich ist, welche daher schlechthin die der Parabel und ihrem Krümmungskreise in dem Punkte (xy) gemeinschaftliche Sehne genannt wird.

§. 2.

Bezeichnen wir die Länge der Sehne, welche der Parabel und ihrem Krümmungskreise in dem Punkte (xy) gemeinschaftlich ist, durch s; so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

---

*) Die übrigen Gleichungen im Obigen werden natürlich durch $u = x$, $v = -y$ sämmtlich erfüllt, da dieselben aus der Gleichung 1) durch Multiplication dieser Gleichung mit $v + y$ abgeleitet worden sind.

$$s^2 = (9x-x)^2 + (-3y-y)^2$$
$$= 64x^2 + 16y^2$$
$$= 64x^2 + 16px = \frac{64y^4}{p^2} + 16y^2,$$

also:

5) . . . . . $s^2 = 16x(4x+p) = \frac{16y^2(4y^2+p^2)}{p^2}$.

Um den Punkt (xy) der Parabel zu bestimmen, für welchen die gemeinschaftliche Sehne der Parabel und ihres Krümmungskreises in diesem Punkte ein Maximum oder ein Minimum wird, müssen wir die vorstehende Gleichung etwa nach x differentiiren, wodurch wir die Gleichung:

$$s\frac{\partial s}{\partial x} = 8(8x+p)$$

erhalten. Ist nun

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

so ist, insofern s einen endlichen völlig bestimmten Werth hat, auch

$$s\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

also nach Vorstehendem:

$$8x+p = 0, \quad \text{folglich} \quad x = -\tfrac{1}{8}p,$$

und daher:

$$y^2 = px = -\tfrac{1}{8}p^2,$$

also y imaginär, woraus sich ergiebt, dass es im eigentlichen, nämlich im Sinne der Differentialrechnung, keinen Punkt der Parabel giebt, für welchen die der Parabel und ihrem Krümmungskreise gemeinschaftliche Sehne ein Maximum oder ein Minimum wird.

In der That ist auch nach 5):

$$s = 4\sqrt{x(4x+p)},$$

woraus man sieht, dass, wenn x von Null an in's Unendliche wächst, auch s von Null an fortwährend in's Unendliche wächst, was das vorhergehende Ergebniss vollständig bestätigt.

II. Die Ellipse.

§. 3.

Wenn (xy) ein beliebiger Punkt der Ellipse ist, so setze man *):

*) M. s. die Abhandlung Thl. XXIV. Nr. XXIX.

1) . . . . . $x = a\cos u, \quad y = b\sin u;$

dann sind *):

$$\frac{a^2-b^2}{a}\cos u^3, \quad -\frac{a^2-b^2}{b}\sin u^3$$

die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises der Ellipse in dem Punkte (xy), und der Halbmesser des Krümmungskreises ist:

$$\frac{(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Bezeichnen wir nun die veränderlichen oder laufenden Coordinaten durch X, Y; so ist:

$$(X - \frac{a^2-b^2}{a}\cos u^3)^2 + (Y + \frac{a^2-b^2}{b}\sin u^3)^2 = \frac{(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^3}{a^2b^2}$$

die Gleichung des Krümmungskreises.

Bezeichnen aber von jetzt an X, Y die Coordinaten der Durchschnittspunkte des Krümmungskreises mit der Ellipse; so können wir:

2) . . . . . $X = a\cos U, \quad Y = b\sin U$

setzen, und erhalten daher nach dem Vorhergehenden zur Bestimmung von U die Gleichung:

$$(a\cos U - \frac{a^2-b^2}{a}\cos u^3)^2 + (b\sin U + \frac{a^2-b^2}{b}\sin u^3)^2 = \frac{(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^3}{a^2b^2}.$$

Da nun aber der durch die Coordinaten 1) bestimmte Punkt ein der Ellipse und dem Krümmungskreise gemeinschaftlicher Punkt ist, so kann man in der vorstehenden Gleichung u für U setzen, wodurch man die Gleichung:

$$(a\cos u - \frac{a^2-b^2}{a}\cos u^3)^2 + (b\sin u + \frac{a^2-b^2}{b}\sin u^3)^2 = \frac{(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^3}{a^2b^2}$$

erhält. Durch Subtraction der beiden vorstehenden Gleichungen ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} &a(\cos U - \cos u)\{a(\cos U + \cos u) - 2\frac{a^2-b^2}{a}\cos u^3\} \\ &+ b(\sin U - \sin u)\{b(\sin U + \sin u) + 2\frac{a^2-b^2}{b}\sin u^3\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

*) M. s. die Abhandlung Thl. XXXVII. Nr. X.

also durch Zerlegung in Factoren:

$$\left.\begin{array}{c} a\sin\frac{1}{2}(U-u)\sin\frac{1}{2}(U+u) \\ \times\{a\cos\frac{1}{2}(U-u)\cos\frac{1}{2}(U+u)-\frac{a^2-b^2}{a}\cos u^3\} \\ -b\sin\frac{1}{2}(U-u)\cos\frac{1}{2}(U+u) \\ \times\{b\cos\frac{1}{2}(U-u)\sin\frac{1}{2}(U+u)+\frac{a^2-b^2}{b}\sin u^3\} \end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(U-u)\left\{\begin{array}{c}(a^2-b^2)\sin\frac{1}{2}(U+u)\cos\frac{1}{2}(U+u)\cos\frac{1}{2}(U-u) \\ -(a^2-b^2)[\sin\frac{1}{2}(U+u)\cos u^3+\cos\frac{1}{2}(U+u)\sin u^3]\end{array}\right\}=0,$$

und folglich:

$$\sin\tfrac{1}{2}(U-u)\left\{\begin{array}{c}\sin\frac{1}{2}(U+u)\cos\frac{1}{2}(U+u)\cos\frac{1}{2}(U-u) \\ -[\sin\frac{1}{2}(U+u)\cos u^3+\cos\frac{1}{2}(U+u)\sin u^3]\end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(U-u)\left\{\begin{array}{c}\sin\frac{1}{2}(U+u)\cos\frac{1}{2}(U+u)\cos[\frac{1}{2}(U+u)-u] \\ -[\sin\frac{1}{2}(U+u)\cos u^3+\cos\frac{1}{2}(U+u)\sin u^3]\end{array}\right\}=0,$$

also, wie man leicht übersieht:

$$\sin\tfrac{1}{2}(U-u)\left\{\begin{array}{c}\sin\frac{1}{2}(U+u)\cos u[\cos\frac{1}{2}(U+u)^2-\cos u^2] \\ +\cos\frac{1}{2}(U+u)\sin u[\sin\frac{1}{2}(U+u)^2-\sin u^2]\end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(U-u)\left\{\begin{array}{c}\sin\frac{1}{2}(U+u)\cos u[\cos\frac{1}{2}(U+u)^2-\cos u^2] \\ -\cos\frac{1}{2}(U+u)\sin u[\cos\frac{1}{2}(U+u)^2-\cos u^2]\end{array}\right\}=0,$$

also, weil

$$\sin\tfrac{1}{2}(U+u)\cos u-\cos\tfrac{1}{2}(U+u)\sin u=\sin\tfrac{1}{2}(U-u)$$

ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}(U-u)^2\{\cos\tfrac{1}{2}(U+u)^2-\cos u^2\}=0,$$

und folglich, weil

$$\begin{aligned}&\cos\tfrac{1}{2}(U+u)^2-\cos u^2\\ =&\ \{\cos\tfrac{1}{2}(U+u)-\cos u\}\{\cos\tfrac{1}{2}(U+u)+\cos u\}\\ =&-2\sin\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(U+u)-u\}\sin\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(U+u)+u\}\\ &\times 2\cos\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(U+u)-u\}\cos\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(U+u)+u\}\\ =&-\sin\{\tfrac{1}{2}(U+u)-u\}\sin\{\tfrac{1}{2}(U+u)+u\}\\ =&-\sin\tfrac{1}{2}(U-u)\sin\tfrac{1}{2}(U+3u)\end{aligned}$$

ist:

$$3) \ldots\ldots \sin\tfrac{1}{2}(U-u)^3 \sin\tfrac{1}{2}(U+3u) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$\sin\tfrac{1}{2}(U-u) = 0 \quad \text{und} \quad \sin\tfrac{1}{2}(U+3u) = 0,$$

die wir jetzt, jede für sich, einer weiteren Untersuchung unterwerfen wollen.

Aus der Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}(U-u) = 0$$

ergiebt sich, wenn k eine ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(U-u) = k\pi, \quad \text{also} \quad U-u = 2k\pi;$$

folglich:

$$U = 2k\pi + u.$$

Bekanntlich ist:

$$0 \leqq u \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq U \leqq 2\pi.$$

Wäre nun $k < 0$, so wäre offenbar

$$U \leqq 0,$$

wo das obere Zeichen für $k = -1$, $u = 2\pi$ gelten würde, in welchem Falle man aber offenbar auch $U = 2\pi$, also $U = u$ setzen könnte. Wäre ferner $k > 0$, so wäre offenbar

$$U \geqq 2\pi,$$

wo das obere Zeichen für $k = +1$, $u = 0$ gelten würde, in welchem Falle man aber offenbar auch $U = 0$, also $U = u$ setzen könnte. Hieraus ergiebt sich im Allgemeinen, dass nur $k = 0$ gesetzt werden kann, oder nur $k = 0$ gesetzt zu werden braucht, und also nur

$$U = u$$

sein kann.

Aus der Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}(U+3u) = 0$$

ergiebt sich, wenn wieder k eine ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(U+3u) = k\pi, \quad \text{also} \quad U+3u = 2k\pi;$$

folglich:

$$U = 2k\pi - 3u.$$

Bekanntlich ist

$$0 \leqq u \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq U \leqq 2\pi;$$

also:

$$0 \leqq 3u \leqq 6\pi,$$

wo wir nun die drei Fälle:

$$0 \leqq 3u \leqq 2\pi, \quad 2\pi \leqq 3u \leqq 4\pi, \quad 4\pi \leqq 3u \leqq 6\pi$$

unterscheiden wollen.

Zuerst sei

$$0 \leqq 3u \leqq 2\pi.$$

Wäre $k \leqq 0$, so wäre offenbar

$$U \leqq 0,$$

wo das obere Zeichen für $k = 0$, $3u = 0$ gelten würde, in welchem Falle sich aber natürlich auch $U = 2\pi$ setzen lassen würde. Wäre ferner $k > +1$, so wäre offenbar

$$U \geqq 2\pi,$$

wo das obere Zeichen für $k = +2$, $3u = 2\pi$ gelten würde, in welchem Falle sich aber natürlich auch $U = 0$ setzen lassen würde. Hieraus ergiebt sich im Allgemeinen, dass nur $k = +1$ gesetzt werden kann oder nur $k = +1$ gesetzt zu werden braucht, und also nur

$$U = 2\pi - 3u$$

sein kann.

Ferner sei

$$2\pi \leqq 3u \leqq 4\pi.$$

Wäre $k \leqq +1$, so wäre offenbar

$$U \leqq 0,$$

ist, so giebt dies die Gleichung:

$$\sin 2u\{4\cos 2u(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)+(a^2-b^2)\sin 2u^2\}=0,$$

welche in die beiden Gleichungen:

$$\sin 2u=0 \quad \text{und} \quad 4\cos 2u(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)+(a^2-b^2)\sin 2u^2=0$$

zerfällt.

Die Gleichung

$$\sin 2u=0$$

führt, wenn k eine ganze Zahl bezeichnet, auf

$$2u=k\pi;$$

und weil nun bekanntlich

$$0 \leqq u \leqq 2\pi,$$

folglich

$$0 \leqq 2u \leqq 4\pi$$

ist, so ist:

$$0 \leqq k\pi \leqq 4\pi,$$

also:

$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

folglich:

$$2u=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$$

und daher:

$$u=0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi;$$

wo es aber offenbar genügt:

$$u=0,\ \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{1}{2}\pi$$

zu setzen. Weil nach 7) für $\sin 2u=0$, also für die vorstehenden Werthe von u, offenbar $s=0$ wird, die gemeinschaftliche Sehne also verschwindet, so ist dieselbe für die vorstehenden Werthe von u natürlich ein Minimum, wenigstens als ein solches zu betrachten.

Die zweite der beiden obigen Gleichungen, nämlich die Gleichung:

$$4\cos 2u(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)+(a^2-b^2)\sin 2u^2=0,$$

kann auf folgende Art umgeformt werden. Bekanntlich ist:

$$2\sin u^2=1-\cos 2u,\quad 2\cos u^2=1+\cos 2u;$$

was, in die vorstehende Gleichung eingeführt, die folgende Gleichung giebt:

$$2\cos 2u\{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos 2u\}+(a^2-b^2)\sin 2u^2=0,$$

folglich:

$$2(a^2+b^2)\cos 2u+(a^2-b^2)(\sin 2u^2-2\cos 2u^2)=0$$

oder

$$2(a^2+b^2)\cos 2u+(a^2-b^2)(1-3\cos 2u^2)=0,$$

und hieraus:

$$3(a^2-b^2)\cos 2u^2-2(a^2+b^2)\cos 2u=a^2-b^2,$$

oder:

$$9)\ldots\ldots\ \cos 2u^2-\frac{2(a^2+b^2)}{3(a^2-b^2)}\cos 2u=\tfrac{1}{3}.$$

Löst man diese Gleichung wie eine quadratische Gleichung auf, so erhält man nach leichter Rechnung für $\cos 2u$ den Ausdruck:

$$10)\ldots\ \cos 2u=\frac{a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}.$$

Um nun zu entscheiden, welches Zeichen in diesem Ausdrucke zu nehmen ist, bemerken wir Folgendes.

Die Bedingung:

$$\frac{a^2+b^2+2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}\lessgtr 1$$

führt nach und nach zu den folgenden Bedingungen:

$$a^2+b^2+2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\lessgtr 3a^2-3b^2,$$

$$2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\lessgtr 2(a^2-2b^2),$$

$$\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\lessgtr a^2-2b^2,$$

$$\sqrt{a^2(a^2-b^2)+b^4}\lessgtr a^2-2b^2;$$

was nur möglich ist, wenn

$$a^2-2b^2>0$$

ist. Dies vorausgesetzt, ist nun ferner:

$$a^4 - a^2b^2 + b^4 \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4,$$

$$0 \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} -3a^2b^2 + 3b^4,$$

$$0 \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} -3b^2(a^2 - b^2),$$

da doch bei der Ellipse offenbar

$$-3b^2(a^2 - b^2) < 0$$

ist. Hieraus ergiebt sich, dass nicht

$$\frac{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3(a^2 - b^2)} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} 1$$

sein kann, und folglich

$$\frac{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3(a^2 - b^2)} > 1$$

sein, also in der Gleichung 10) das untere Zeichen genommen werden muss.

Dass

$$\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} = \sqrt{a^2(a^2 - b^2) + b^4}$$

immer reell ist, braucht wohl nicht noch besonders bemerkt zu werden, wobei natürlich immer stillschweigend vorausgesetzt worden ist, dass von den beiden Halbaxen a und b der Ellipse die erste die grössere sei *).

Wenn wir nun auch uns überzeugt haben, dass in der Gleichung 10) das untere Zeichen genommen werden müsse, so frägt sich nun doch noch, ob der durch dieses Zeichen gelieferte Werth von $\cos 2u$, absolut genommen, die Einheit nicht übersteigt. Das Product der beiden Werthe von $\cos 2u$ in 10) ist aber:

$$\frac{(a^2 + b^2)^2 - 4(a^4 - a^2b^2 + b^4)}{9(a^2 - b^2)^2}$$

$$= \frac{-3(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)}{9(a^2 - b^2)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2} = -\frac{1}{3},$$

*) Uebrigens ist natürlich überhaupt

$$a^4 - a^2b^2 + b^4$$

stets positiv, weil

$$a^4 - a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 + a^2b^2$$

ist.

und da nun nach dem Obigen der Werth

$$\frac{a^2+b^2+2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)} > 1$$

und natürlich positiv ist, so ist der Werth

$$\frac{a^2+b^2-2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}$$

negativ und, absolut genommen, kleiner als die Einheit. Setzen wir also, wie es nach dem Vorhergehenden erforderlich ist:

11) . . . . $\cos 2u = \frac{a^2+b^2-2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}$,

so wird sich der Winkel $2u$ mittelst dieser Formel immer bestimmen lassen.

Mittelst der Formel

$$\sin 2u^2 = 1 - \cos 2u^2$$

erhält man hieraus ferner sehr leicht:

$$\sin 2u^2 = \frac{4(a^4-4a^2b^2+b^4)+4(a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{9(a^2-b^2)^2},$$

also:

12) $\sin 2u = \pm\frac{2\sqrt{\{a^4-4a^2b^2+b^4+(a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\}}}{3(a^2-b^2)}$;

und mittelst der Formeln:

$$2\cos u^2 = 1+\cos 2u, \quad 2\sin u^2 = 1-\cos 2u$$

ergeben sich eben so leicht aus 11) die Ausdrücke:

13) . . .
$$\begin{cases} \cos u^2 = \frac{2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}, \\ \sin u^2 = \frac{a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}. \end{cases}$$

Weil bekanntlich

$$0 \leqq u \leqq 2\pi, \quad \text{also} \quad 0 \leqq 2u \leqq 4\pi$$

und nach dem Obigen $\cos 2u$ negativ ist, so giebt es für $2u$ vier zwischen den Gränzen

$$\tfrac{1}{2}\pi,\ \pi;\quad \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi;\quad \tfrac{3}{2}\pi,\ 3\pi;\quad 3\pi,\ \tfrac{7}{2}\pi$$

liegende Werthe, so dass also, wenn wir diese vier Werthe von $2u$ respective durch v, v_1, v_2, v_3 bezeichnen:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi &< v &< \pi,\\ \pi &< v_1 &< \tfrac{3}{2}\pi,\\ \tfrac{3}{2}\pi &< v_2 &< 3\pi,\\ 3\pi &< v_3 &< \tfrac{7}{2}\pi\end{aligned}$$

ist. Offenbar ist aber:

$$\begin{aligned}v &= v,\\ v_1 &= 2\pi - v,\\ v_2 &= 2\pi + v,\\ v_3 &= 4\pi - v;\end{aligned}$$

und es kann daher:

$$\begin{aligned}2u &= v,\\ 2u &= 2\pi - v,\\ 2u &= 2\pi + v,\\ 2u &= 4\pi - v;\end{aligned}$$

also:

$$14)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} u = \tfrac{1}{2}v,\\ u = \pi - \tfrac{1}{2}v,\\ u = \pi + \tfrac{1}{2}v,\\ u = 2\pi - \tfrac{1}{2}v \end{cases}$$

gesetzt werden.

Dass die durch diese vier Werthe von u bestimmten Punkte der Ellipse in derselben ganz symmetrisch liegen, so dass also in diesen vier Punkten die gemeinschaftlichen Sehnen der Ellipse und ihres Krümmungskreises von gleicher Grösse sind, fällt auf der Stelle in die Augen. Auch ist klar, dass für diese vier Punkte beziehungsweise zu setzen ist:

15)

$$\cos u = +\sqrt{\frac{2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}},\quad \sin u = +\sqrt{\frac{a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}};$$

$$\cos u = -\sqrt{\frac{2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}},\quad \sin u = +\sqrt{\frac{a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}};$$

$$\cos u = -\sqrt{\frac{2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}},\quad \sin u = -\sqrt{\frac{a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}};$$

$$\cos u = +\sqrt{\frac{2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}},\quad \sin u = -\sqrt{\frac{a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}}.$$

Wir gehen nun zu der Entwickelung des zweiten Differentialquotienten von u über und nehmen dabei unseren Auslauf von der Gleichung 8), nämlich von der Gleichung:

$$s\frac{\partial s}{\partial u} = 2\sin 2u\{4\cos 2u(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2) + (a^2-b^2)\sin 2u^2\},$$

welche wir zu diesem Behuf auf die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}
& s\frac{\partial s}{\partial u} \\
= \;& 4a^2\sin 2u\sin u(2\cos 2u\sin u + \sin 2u\cos u) \\
+ \;& 4b^2\sin 2u\cos u(2\cos 2u\cos u - \sin 2u\sin u) \\
= \;& 4a^2\sin 2u\sin u(2\cos u^2\sin u - 2\sin u^3 + 2\sin u\cos u^2) \\
+ \;& 4b^2\sin 2u\cos u(2\cos u^3 - 2\sin u^2\cos u - 2\sin u^2\cos u) \\
= \;& 8a^2\sin 2u\sin u^2(2\cos u^2 - \sin u^2) \\
+ \;& 8b^2\sin 2u\cos u^2(\cos u^2 - 2\sin u^2) \\
= \;& 8a^2\sin 2u\sin u^2(\cos 2u + \cos u^2) \\
+ \;& 8b^2\sin 2u\cos u^2(\cos 2u - \sin u^2) \\
= \;& 8a^2\sin 2u\sin u^2(3\cos u^2 - 1) + 8b^2\sin 2u\cos u^2(1 - 3\sin u^2).
\end{aligned}$$

Durch Differentiation ergiebt sich nun leicht:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial.\sin 2u\sin u^2}{\partial u} &= 2\cos 2u\sin u^2 + 2\sin 2u\sin u\cos u \\
&= 2\sin u\sin 3u, \\
\frac{\partial.\sin 2u\cos u^2}{\partial u} &= 2\cos 2u\cos u^2 - 2\sin 2u\cos u\sin u \\
&= 2\cos u\cos 3u, \\
\frac{\partial(3\cos u^2-1)}{\partial u} &= -6\cos u\sin u = -3\sin 2u, \\
\frac{\partial(1-3\sin u^2)}{\partial u} &= -6\sin u\cos u = -3\sin 2u;
\end{aligned}$$

und es ist also nach dem Obigen, wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16}\{s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = \;& a^2\sin u\{\sin 3u(3\cos u^2-1) - 3\sin 2u\sin u^2\cos u\} \\
& + b^2\cos u\{\cos 3u(1-3\sin u^2) - 3\sin 2u\cos u^2\sin u\}.
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}\pi,\ \pi;\quad \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi;\quad \tfrac{3}{2}\pi,\ 3\pi;\quad 3\pi,\ \tfrac{7}{2}\pi$$

liegende Werthe, so dass also, wenn wir diese vier Werthe von $2u$ respective durch v, v_1, v_2, v_3 bezeichnen:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi &< v < \pi,\\ \pi &< v_1 < \tfrac{3}{2}\pi,\\ \tfrac{3}{2}\pi &< v_2 < 3\pi,\\ 3\pi &< v_3 < \tfrac{7}{2}\pi\end{aligned}$$

ist. **Offenbar ist aber:**

$$\begin{aligned}v &= v,\\ v_1 &= 2\pi - v,\\ v_2 &= 2\pi + v,\\ v_3 &= 4\pi - v;\end{aligned}$$

und es kann daher:

$$\begin{aligned}2u &= v,\\ 2u &= 2\pi - v,\\ 2u &= 2\pi + v,\\ 2u &= 4\pi - v;\end{aligned}$$

also:

$$14)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} u = \tfrac{1}{2}v,\\ u = \pi - \tfrac{1}{2}v,\\ u = \pi + \tfrac{1}{2}v,\\ u = 2\pi - \tfrac{1}{2}v \end{cases}$$

gesetzt werden.

Dass die durch diese vier Werthe von u bestimmten Punkte der Ellipse in derselben ganz symmetrisch liegen, so dass also in diesen vier Punkten die gemeinschaftlichen Sehnen der Ellipse und ihres Krümmungskreises von gleicher Grösse sind, fällt auf der Stelle in die Augen. Auch ist klar, dass für diese vier Punkte beziehungsweise zu setzen ist:

15)

$$\cos u = +\sqrt{\frac{2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}},\quad \sin u = +\sqrt{\frac{a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}};$$

$$\cos u = -\sqrt{\frac{2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}},\quad \sin u = +\sqrt{\frac{a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}};$$

$$\cos u = -\sqrt{\frac{2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}},\quad \sin u = -\sqrt{\frac{a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}};$$

$$\cos u = +\sqrt{\frac{2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}},\quad \sin u = -\sqrt{\frac{a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}}.$$

Wir gehen nun zu der Entwickelung des zweiten Differentialquotienten von u über und nehmen dabei unseren Auslauf von der Gleichung 8), nämlich von der Gleichung:

$$s\frac{\partial s}{\partial u} = 2\sin 2u\{4\cos 2u(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2) + (a^2-b^2)\sin 2u^2\},$$

welche wir zu diesem Behuf auf die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} & s\frac{\partial s}{\partial u} \\ = \;& 4a^2\sin 2u\sin u(2\cos 2u\sin u + \sin 2u\cos u) \\ & + 4b^2\sin 2u\cos u(2\cos 2u\cos u - \sin 2u\sin u) \\ = \;& 4a^2\sin 2u\sin u(2\cos u^2\sin u - 2\sin u^3 + 2\sin u\cos u^2) \\ & + 4b^2\sin 2u\cos u(2\cos u^3 - 2\sin u^2\cos u - 2\sin u^2\cos u) \\ = \;& 8a^2\sin 2u\sin u^2(2\cos u^2 - \sin u^2) \\ & + 8b^2\sin 2u\cos u^2(\cos u^2 - 2\sin u^2) \\ = \;& 8a^2\sin 2u\sin u^2(\cos 2u + \cos u^2) \\ & + 8b^2\sin 2u\cos u^2(\cos 2u - \sin u^2) \\ = \;& 8a^2\sin 2u\sin u^2(3\cos u^2 - 1) + 8b^2\sin 2u\cos u^2(1 - 3\sin u^2). \end{aligned}$$

Durch Differentiation ergiebt sich nun leicht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial.\sin 2u\sin u^2}{\partial u} &= 2\cos 2u\sin u^2 + 2\sin 2u\sin u\cos u \\ &= 2\sin u\sin 3u, \\ \frac{\partial.\sin 2u\cos u^2}{\partial u} &= 2\cos 2u\cos u^2 - 2\sin 2u\cos u\sin u \\ &= 2\cos u\cos 3u, \\ \frac{\partial(3\cos u^2-1)}{\partial u} &= -6\cos u\sin u = -3\sin 2u, \\ \frac{\partial(1-3\sin u^2)}{\partial u} &= -6\sin u\cos u = -3\sin 2u; \end{aligned}$$

und es ist also nach dem Obigen, wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16}\{s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = \;& a^2\sin u\{\sin 3u(3\cos u^2-1) - 3\sin 2u\sin u^2\cos u\} \\ & + b^2\cos u\{\cos 3u(1-3\sin u^2) - 3\sin 2u\cos u^2\sin u\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\sin 3u = \sin u\,(3\cos u^2 - \sin u^2),$$
$$\cos 3u = \cos u\,(\cos u^2 - 3\sin u^2);$$

also:

$$\sin 3u(3\cos u^2 - 1) - 3\sin 2u \sin u^2 \cos u$$
$$= \sin u\{(3\cos u^2 - \sin u^2)\,(3\cos u^2 - 1) - 6\sin u^2 \cos u^2\}$$
$$= \sin u\{\cos u^2(9\cos u^2 - 9\sin u^2 - 3) + \sin u^2\}$$
$$= \sin u\{6\cos u^2(1 - 3\sin u^2) + \sin u^2\},$$

$$\cos 3u(1 - 3\sin u^2) - 3\sin 2u \cos u^2 \sin u$$
$$= \cos u\{(\cos u^2 - 3\sin u^2)\,(1 - 3\sin u^2) - 6\sin u^2 \cos u^2\}$$
$$= \cos u\{\cos u^2 - \sin u^2(9\cos u^2 - 9\sin u^2 + 3)\}$$
$$= \cos u\{\cos u^2 - 6\sin u^2(3\cos u^2 - 1)\};$$

folglich:

16) . . . . . $\dfrac{1}{16}\left\{s\dfrac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \left(\dfrac{\partial s}{\partial u}\right)^2\right\}$

$$= a^2 \sin u^2\{6\cos u^2(1 - 3\sin u^2) + \sin u^2\}$$
$$+ b^2 \cos u^2\{6\sin u^2(1 - 3\cos u^2) + \cos u^2\}.$$

Auf folgende Art kann man noch einen anderen bemerkenswerthen Ausdruck dieser Gleichung finden.

Es ist:

$$\sin 3u(3\cos u^2 - 1) - 3\sin 2u \sin u^2 \cos u$$
$$= (\sin 2u \cos u + \cos 2u \sin u)\,(3\cos u^2 - 1) - 3\sin 2u \sin u^2 \cos u$$
$$= 3\{\sin 2u \cos u\,(\cos u^2 - \sin u^2) + \cos 2u \sin u \cos u^2\} - \sin 3u$$
$$= 3\cos 2u \cos u\,(\sin 2u + \sin u \cos u) - \sin 3u$$
$$= \tfrac{3}{2}\sin 2u \cos 2u \cos u - \sin 3u$$
$$= \tfrac{1}{4}(9\sin 4u \cos u - 4\sin 3u),$$

$$\cos 3u(1 - 3\sin u^2) - 3\sin 2u \cos u^2 \sin u$$
$$= (\cos 2u \cos u - \sin 2u \sin u)\,(1 - 3\sin u^2) - 3\sin 2u \cos u^2 \sin u$$
$$= \cos 3u - 3\{\cos 2u \cos u \sin u^2 + \sin 2u \sin u\,(\cos u^2 - \sin u^2)\}$$
$$= \cos 3u - 3\cos 2u \sin u\,(\sin u \cos u + \sin 2u)\}$$
$$= \cos 3u - \tfrac{3}{2}\sin 2u \cos 2u \sin u$$
$$= \tfrac{1}{4}(4\cos 3u - 9\sin 4u \sin u);$$

folglich:

17) . . . . . $\tfrac{1}{4}\left\{s\dfrac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \left(\dfrac{\partial s}{\partial u}\right)^2\right\}$

$$= a^2 \sin u\,(9\sin 4u \cos u - 4\sin 3u)$$
$$- b^2 \cos u\,(9\sin 4u \sin u - 4\cos 3u).$$

Führt man nun die Werthe 13) von $\cos u^2$ und $\sin u^2$ ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$1-3\sin u^2 = \frac{b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{a^2-b^2},$$

$$1-3\cos u^2 = -\frac{a^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{a^2-b^2};$$

und dann ergiebt sich ferner gleichfalls durch eine keiner Schwierigkeit unterliegende Rechnung:

$$6\cos u^2(1-3\sin u^2)+\sin u^2$$
$$=\frac{7a^4+3a^2b^2+2b^4-(11a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)^2},$$

$$6\sin u^2(1-3\cos u^2)+\cos u^2$$
$$=\frac{2a^4+3a^2b^2+7b^4-(a^2+11b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)^2}.$$

Also ist der Werth, welchen die Grösse

$$\frac{1}{16}\left\{s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2\right\},$$

und folglich, weil der Differentialquotient $\frac{\partial s}{\partial u}$ für die obigen Werthe von $\cos u^2$ und $\sin u^2$ bekanntlich verschwindet, der Werth, welchen die Grösse

$$\frac{1}{16}s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}$$

für die obigen Werthe von $\cos u^2$ und $\sin u^2$ erhält:

$$a^2\sin u^2.\frac{7a^4+3a^2b^2+2b^4-(11a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)^2}$$
$$+b^2\cos u^2.\frac{2a^4+3a^2b^2+7b^4-(a^2+11b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)^2}$$

oder, vollständig entwickelt:

$$a^2.\frac{a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}$$
$$\times\frac{7a^4+3a^2b^2+2b^4-(11a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)^2}$$
$$+b^2.\frac{2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)}$$
$$\times\frac{2a^4+3a^2b^2+7b^4-(a^2+11b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3(a^2-b^2)^2}.$$

Der rationale Theil des Zählers dieses Ausdrucks ist:

$$a^2(a^2-2b^2)(7a^4+3a^2b^2+2b^4)-a^2(11a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$$
$$+b^2(2a^2-b^2)(2a^4+3a^2b^2+7b^4)+b^2(a^2+11b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$$

oder:

$$a^2(a^2-2b^2)(7a^4+3a^2b^2+2b^4)$$
$$+b^2(2a^2-b^2)(2a^4+3a^2b^2+7b^4) \quad -11(a^4-b^4)(a^4-a^2b^2+b^4),$$

und folglich, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$-4\{(a^8-b^8)-a^2b^2(a^4-b^4)\},$$

oder:

$$-4(a^4-b^4)(a^4-a^2b^2+b^4).$$

Der rationale Factor des irrationalen Theils in dem Zähler des obigen Ausdrucks ist:

$$7a^6+3a^4b^2+2a^2b^4-a^2(a^2-2b^2)(11a^2+b^2)$$
$$-2a^4b^2-3a^2b^4-7b^6-b^2(2a^2-b^2)(a^2+11b^2),$$

also, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$-4(a^6-b^6)+20a^2b^2(a^2-b^2),$$

oder:

$$-4(a^2-b^2)(a^4-4a^2b^2+b^4),$$

und der irrationale Theil des Zählers ist folglich:

$$-4(a^2-b^2)(a^4-4a^2b^2+b^4)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}.$$

Daher ist der Zähler des obigen Ausdrucks:

$$-4(a^4-b^4)(a^4-a^2b^2+b^4)$$
$$-4(a^2-b^2)(a^4-4a^2b^2+b^4)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$$

oder:

$$-4(a^2-b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\{a^4-4a^2b^2+b^4+(a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\}.$$

Leicht findet man nun:

$$\{(a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\}^2-(a^4-4a^2b^2+b^4)^2$$
$$=(a^2+b^2)^2(a^4-a^2b^2+b^4)-(a^4-4a^2b^2+b^4)^2$$
$$=9a^2b^2(a^4-2a^2b^2+b^4)=9a^2b^2(a^2-b^2)^2,$$

so dass also

$$\{(a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\}^2-(a^4-4a^2b^2+b^4)^2$$

eine positive Grösse, und daher die positive Grösse

$$(a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$$

stets grösser als der absolute Werth von

$$a^4-4a^2b^2+b^4,$$

folglich

$$a^4-4a^2b^2+b^4+(a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$$

stets eine positive, daher

$$-4(a^2-b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}.\{a^4-4a^2b^2+b^4+(a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\}$$

stets eine negative Grösse ist. Hieraus, in Verbindung mit dem Obigen, sieht man, dass für die obigen Werthe von $\cos u^2$ und $\sin u^2$ der Werth von

$$\frac{1}{16}s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2},$$

also auch der Werth von $\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}$, negativ ist, wodurch bekanntlich das Maximum bedingt wird.

Nach 7) ist:

$$s^2=4\sin 2u^2(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2),$$

und nach 13) erhält man leicht:

$$a^2\sin u^2+b^2\cos u^2=\frac{(a^2-b^2)\{a^2+b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\}}{3(a^2-b^2)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{3};$$

folglich ist, wenn man der Kürze wegen:

$$Z=\{a^2+b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\}$$

$$\times\{a^4-4a^2b^2+b^4+(a^2+b^2)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\}$$

setzt, nach 12):

$$s^2=\frac{16}{27}\cdot\frac{Z}{(a^2-b^2)^2}.$$

Mittelst leichter Rechnung erhält man aber:

$$Z = (a^2+b^2)(2a^4-5a^2b^2+2b^4) + 2(a^4-a^2b^2+b^4)\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$$
$$= (a^2+b^2)(2a^2-b^2)(a^2-2b^2) + 2(a^4-a^2b^2+b^4)^{\frac{3}{2}},$$

und es ist folglich:

$$s^2 = \frac{16}{27}\cdot\frac{(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(a^2-2b^2)+2(a^4-a^2b^2+b^4)^{\frac{3}{2}}}{(a^2-b^2)^2},$$

also:

18)

$$s = \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\{(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(a^2-2b^2)+2(a^4-a^2b^2+b^4)^{\frac{3}{2}}\}^{\frac{1}{2}}}{a^2-b^2},$$

oder:

19)

$$s = \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\{2(a^4-a^2b^2+b^4)^{\frac{3}{2}}-(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)\}^{\frac{1}{2}}}{a^2-b^2},$$

welches also die grösste gemeinschaftliche Sehne der Ellipse und ihres Krümmungskreises ist.

III. Die Hyperbel.

§. 5.

Rücksichtlich der Theorie der hyperbolischen Functionen, deren sehr zweckmässige Anwendung wir in diesem Falle zu zeigen beabsichtigen, verweisen wir auf unsere Abhandlung über diese Functionen in Thl. XXXVIII. Nr. II., und werden uns auch hier der dort gebrauchten Bezeichnung bedienen, weil uns dieselbe unter allen in Vorschlag gebrachten Bezeichnungen die bequemste zu sein scheint *).

Wenn man φ von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig wachsen lässt, so nimmt bekanntlich die stets positive hyperbolische Function $\mathrm{Cos}\,\varphi$ zuerst von $+\infty$ bis 1 stetig ab und dann von 1 bis $+\infty$ stetig zu, dagegen wächst die hyperbolische Function $\mathrm{Sin}\,\varphi$ stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ und hat immer mit φ gleiches Vorzeichen.

Wenn man nun, was hier hinreicht, bloss den Zweig der durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

*) Die hyperbolischen Sinus, Cosinus u. s. w. bezeichnen wir durch Sin, Cos, ...; die cyclischen durch sin, cos, ...

charakterisirten Hyperbel betrachtet, für welchen die x positiv und nicht kleiner als a sind, so kann man, weil bekanntlich

$$\mathrm{Cos}\,u^2 - \mathrm{Sin}\,u^2 = 1$$

ist, offenbar:

$$\frac{x}{a} = \mathrm{Cos}\,u, \quad \frac{y}{b} = \mathrm{Sin}\,u;$$

also:

1) . . . . . $x = a\,\mathrm{Cos}\,u, \quad y = b\,\mathrm{Sin}\,u$

setzen, wo für negative und positive u immer x positiv, dagegen y beziehungsweise negativ und positiv ist.

Die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises der Hyperbel in dem Punkte (xy) sind bekanntlich:

$$\frac{a^2+b^2}{a^4}x^3 = \frac{a^2+b^2}{a}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^3, \quad -\frac{a^2+b^2}{b^4}y^3 = -\frac{a^2+b^2}{b}\cdot\left(\frac{y}{b}\right)^3;$$

also nach 1):

$$\frac{a^2+b^2}{a}\mathrm{Cos}\,u^3, \quad -\frac{a^2+b^2}{b}\mathrm{Sin}\,u^3;$$

und das Quadrat des Krümmungshalbmessers ist also:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a}\mathrm{Cos}\,u^3 - a\,\mathrm{Cos}\,u\right)^2 + \left(-\frac{a^2+b^2}{b}\mathrm{Sin}\,u^3 - b\,\mathrm{Sin}\,u\right)^2$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2}{a}\mathrm{Cos}\,u^2 - a\right)^2\mathrm{Cos}\,u^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{b}\mathrm{Sin}\,u^2 + b\right)^2\mathrm{Sin}\,u^2$$

$$= \left\{\frac{a^2(\mathrm{Cos}\,u^2-1)+b^2\mathrm{Cos}\,u^2}{a}\right\}^2\mathrm{Cos}\,u^2 + \left\{\frac{a^2\mathrm{Sin}\,u^2+b^2(\mathrm{Sin}\,u^2+1)}{b}\right\}^2\mathrm{Sin}\,u^2$$

$$= \frac{(a^2\mathrm{Sin}\,u^2 + b^2\mathrm{Cos}\,u^2)^2}{a^2}\mathrm{Cos}\,u^2 + \frac{(a^2\mathrm{Sin}\,u^2 + b^2\mathrm{Cos}\,u^2)^2}{b^2}\mathrm{Sin}\,u^2$$

$$= \frac{(a^2\mathrm{Sin}\,u^2 + b^2\mathrm{Cos}\,u^2)^3}{a^2b^2},$$

weil nach der Theorie der hyperbolischen Functionen bekanntlich

$$\mathrm{Cos}\,u^2 - 1 = \mathrm{Sin}\,u^2, \quad \mathrm{Sin}\,u^2 + 1 = \mathrm{Cos}\,u^2$$

ist; folglich ist der Krümmungshalbmesser selbst:

$$\frac{(a^2\mathrm{Sin}\,u^2 + b^2\mathrm{Cos}\,u^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Bezeichnen wir nun die veränderlichen oder laufenden Coordinaten durch X, Y, so ist die Gleichung des Krümmungskreises:

$$(X-\frac{a^2+b^2}{a}\operatorname{Cos}u^3)^2+(Y+\frac{a^2+b^2}{b}\operatorname{Sin}u^3)^2=\frac{(a^2\operatorname{Sin}u^2+b^2\operatorname{Cos}u^2)^3}{a^2b^2}.$$

Bezeichnen aber von jetzt an X, Y die Coordinaten der Durchschnittspunkte des Krümmungskreises mit der Hyperbel, so können wir

$$2)\ldots\ldots\ldots X=a\operatorname{Cos}U,\quad Y=b\operatorname{Sin}U$$

setzen und erhalten daher nach dem Vorhergehenden zur Bestimmung von U die Gleichung:

$$(a\operatorname{Cos}U-\frac{a^2+b^2}{a}\operatorname{Cos}u^3)^2+(b\operatorname{Sin}U+\frac{a^2+b^2}{b}\operatorname{Sin}u^3)^2 = \frac{(a^2\operatorname{Sin}u^2+b^2\operatorname{Cos}u^2)^3}{a^2b^2}.$$

Da nun aber der durch die Coordinaten 1) bestimmte Punkt ein der Hyperbel und dem Krümmungskreise gemeinschaftlicher Punkt ist, so kann man in der vorstehenden Gleichung u für U setzen, wodurch man die Gleichung:

$$(a\operatorname{Cos}u-\frac{a^2+b^2}{a}\operatorname{Cos}u^3)^2+(b\operatorname{Sin}u+\frac{a^2+b^2}{b}\operatorname{Sin}u^3)^2 = \frac{(a^2\operatorname{Sin}u^2+b^2\operatorname{Cos}u^2)^3}{a^2b^2}$$

erhält. Durch Subtraction der beiden vorstehenden Gleichungen ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} a(\operatorname{Cos}U-\operatorname{Cos}u)\{a(\operatorname{Cos}U+\operatorname{Cos}u)-2\frac{a^2+b^2}{a}\operatorname{Cos}u^3\} \\ +b(\operatorname{Sin}U-\operatorname{Sin}u)\{b(\operatorname{Sin}U+\operatorname{Sin}u)+2\frac{a^2+b^2}{b}\operatorname{Sin}u^3\} \end{array}\right\}=0,$$

also durch Zerlegung in Factoren:

$$\left.\begin{array}{c} a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(U-u)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(U+u) \\ \times\{a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(U-u)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(U+u)-\frac{a^2+b^2}{a}\operatorname{Cos}u^3\} \\ +b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(U-u)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(U+u) \\ \times\{b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(U-u)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(U+u)+\frac{a^2+b^2}{b}\operatorname{Sin}u^3\} \end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U-u)\left\{\begin{array}{l}(a^2+b^2)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U-u)\\ -(a^2+b^2)[\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+u)\mathrm{Cos}u^2-\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)\mathrm{Sin}u^2]\end{array}\right\}=0,$$

und folglich:

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U-u)\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U-u)\\ -[\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}\,u^2-\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Sin}\,u^2]\end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U-u)\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}[\tfrac{1}{2}(U+u)-u)]\\ -[\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}\,u^2-\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Sin}\,u^2]\end{array}\right\}=0,$$

also, wie man leicht übersieht:

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U-u)\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}\,u[\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)^2-\mathrm{Cos}\,u^2]\\ -\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Sin}\,u[\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+u)^2-\mathrm{Sin}\,u^2]\end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U-u)\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}\,u[\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)^2-\mathrm{Cos}\,u^2]\\ -\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Sin}\,u[\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)^2-\mathrm{Cos}\,u^2]\end{array}\right\}=0,$$

also, weil

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Cos}\,u-\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)\,\mathrm{Sin}\,u=\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U-u)$$

ist:

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U-u)^2\{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)^2-\mathrm{Cos}\,u^2\}=0,$$

und folglich, weil

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)^2-\mathrm{Cos}\,u^2\\ =\;&\{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)-\mathrm{Cos}\,u\}\{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(U+u)+\mathrm{Cos}\,u\}\\ =\;&2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(U+u)-u\}\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(U+u)+u\}\\ \times\;&2\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(U+u)-u\}\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(U+u)+u\}\\ =\;&\mathrm{Sin}\{\tfrac{1}{2}(U+u)-u\}\,\mathrm{Sin}\{\tfrac{1}{2}(U+u)+u\}\\ =\;&\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U-u)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+3u)\end{aligned}$$

ist:

3) . . . . . $\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U-u)^3\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+3u)=0.$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U-u)=0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(U+3u)=0.$$

Weil nun, wie wir schon bemerkt haben, die hyperbolische Function $\mathrm{Sin}\,\varphi$ von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig wächst, wenn man φ von

9)

$$\frac{\partial s}{\partial u} = 2\,\mathrm{Sin}\,2u\{4\,\mathrm{Cos}\,2u(a^2\,\mathrm{Sin}\,u^2 + b^2\,\mathrm{Cos}\,u^2) + (a^2+b^2)\,\mathrm{Sin}\,2u^2\},$$

und als gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums erhalten wir also wieder die Gleichung:

$$\mathrm{Sin}\,2u\{4\,\mathrm{Cos}\,2u(a^2\,\mathrm{Sin}\,u^2 + b^2\,\mathrm{Cos}\,u^2) + (a^2+b^2)\,\mathrm{Sin}\,2u^2\} = 0,$$

welche in die zwei Gleichungen:

$$\mathrm{Sin}\,2u = 0 \quad \text{und} \quad 4\,\mathrm{Cos}\,2u(a^2\,\mathrm{Sin}\,u^2 + b^2\,\mathrm{Cos}\,u^2) + (a^2+b^2)\,\mathrm{Sin}\,2u^2 = 0$$

zerfällt.

Aus der Gleichung

$$\mathrm{Sin}\,2u = 0$$

ergiebt sich aus den schon oben angegebenen Gründen:

$$2u = 0, \quad \text{also} \quad u = 0,$$

und daher $s = 0$ nach der Gleichung 7), welcher Werth von s wie bei der Ellipse auch hier als ein Minimum aufzufassen ist.

Die zweite der beiden obigen Gleichungen, nämlich die Gleichung:

$$4\,\mathrm{Cos}\,2u(a^2\,\mathrm{Sin}\,u^2 + b^2\,\mathrm{Cos}\,u^2) + (a^2+b^2)\,\mathrm{Sin}\,2u^2 = 0,$$

kann auf folgende Art umgeformt werden. Bekanntlich ist:

$$2\,\mathrm{Sin}\,u^2 = \mathrm{Cos}\,2u - 1, \quad 2\,\mathrm{Cos}\,u^2 = \mathrm{Cos}\,2u + 1;$$

was, in die vorstehende Gleichung eingeführt, die folgende Gleichung giebt:

$$2\,\mathrm{Cos}\,2u\{(a^2+b^2)\,\mathrm{Cos}\,2u - (a^2-b^2)\} + (a^2+b^2)\,\mathrm{Sin}\,2u^2 = 0,$$

folglich:

$$2(a^2-b^2)\,\mathrm{Cos}\,2u - (a^2+b^2)(\mathrm{Sin}\,2u^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,2u^2) = 0$$

oder:

$$2(a^2-b^2)\,\mathrm{Cos}\,2u - (a^2+b^2)(3\,\mathrm{Cos}\,2u^2 - 1) = 0,$$

und hieraus:

$$3(a^2+b^2)\,\mathrm{Cos}\,2u^2 - 2(a^2-b^2)\,\mathrm{Cos}\,2u = a^2+b^2,$$

oder:

$$10) \ldots\ldots \quad \mathrm{Cos}\,2u^2 - \frac{2(a^2-b^2)}{3(a^2+b^2)}\,\mathrm{Cos}\,2u = \tfrac{1}{3}.$$

Löst man diese Gleichung wie eine quadratische Gleichung auf, so erhält man nach leichter Rechnung für $\mathrm{Cos}\,2u$ den Ausdruck:

$$11) \ldots\ldots \mathrm{Cos}\,2u = \frac{a^2-b^2 \pm 2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)},$$

wo es sich nun wieder frägt, welches Zeichen in diesem Ausdrucke zu nehmen ist, was auf folgende Art entschieden werden kann.

Die Bedingung

$$\frac{a^2-b^2+2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)} \lessgtr 1$$

führt nach und nach zu den folgenden Bedingungen:

$$a^2-b^2+2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \lessgtr 3a^2+3b^2,$$

$$2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \lessgtr 2(a^2+2b^2),$$

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \lessgtr a^2+2b^2,$$

$$a^4+a^2b^2+b^4 \lessgtr a^4+4a^2b^2+4b^4,$$

$$0 \lessgtr 3b^2(a^2+b^2),$$

welche Bedingung immer erfüllt ist, so dass also stets

$$\frac{a^2-b^2+2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)} \lessgtr 1$$

ist. Offenbar ist aber in der Bedingung

$$0 \lessgtr 3b^2(a^2+b^2)$$

nur das untere Zeichen statthaft, insofern a, b als nicht verschwindend angenommen werden, und daher immer:

$$\frac{a^2-b^2+2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)} < 1.$$

Die Bedingung

$$\frac{a^2-b^2-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)} \lessgtr 1$$

führt nach und nach zu den folgenden Bedingungen:

$$a^2-b^2-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \leqq 3a^2+3b^2,$$

$$-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \leqq 2(a^2+2b^2),$$

$$-\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \leqq a^2+2b^2,$$

welche Bedingung wieder immer erfüllt ist, so dass also stets

$$\frac{a^2-b^2-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)} \leqq 1$$

ist. Offenbar ist aber in der Bedingung

$$-\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \leqq a^2+2b^2$$

nur das untere Zeichen stattheit, insofern a, b als nicht verschwindend angenommen werden, und daher immer:

$$\frac{a^2-b^2-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)} < 1.$$

Es erhellet also, dass stets

$$\frac{a^2-b^2+2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)} < 1$$

ist.

Das Product der Zähler dieser beiden Werthe ist:

$$(a^2-b^2)^2-4(a^4+a^2b^2+b^4) = -3(a^2+b^2)^2,$$

und daher stets negativ, woraus sich ergiebt, dass die beiden obigen Werthe entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Differenz

$$\frac{a^2-b^2+2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)} - \frac{a^2-b^2-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)}$$

dieser beiden Werthe ist

$$\frac{4\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)},$$

also positiv, folglich

$$\frac{a^2-b^2+2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)}$$ grösser als $$\frac{a^2-b^2-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)};$$

woraus sich, in Verbindung mit dem Obigen, ergiebt, dass

$$\frac{a^2-b^2+2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)}$$

positiv, dagegen

$$\frac{a^2-b^2-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)}$$

negativ ist.

Daher ist

$$\frac{a^2-b^2+2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)}$$

positiv und kleiner als die Einheit; dagegen ist

$$\frac{a^2-b^2-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)}$$

negativ und also natürlich auch kleiner als die Einheit. Die Bedingung

$$\frac{2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}-(a^2-b^2)}{3(a^2+b^2)} \gtreqless 1$$

führt nach und nach zu den folgenden Bedingungen:

$$2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}-(a^2-b^2) \gtreqless 3a^2+3b^2,$$

$$2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \gtreqless 2(2a^2+b^2),$$

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \gtreqless 2a^2+b^2,$$

$$a^4+a^2b^2+b^4 \gtreqless 4a^4+4a^2b^2+b^4,$$

$$0 \gtreqless 3a^2(a^2+b^2),$$

welche Bedingung, und also auch die Bedingung

$$\frac{2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}-(a^2-b^2)}{3(a^2+b^2)} \gtreqless 1,$$

nie erfüllt ist, so dass also der absolute Werth der negativen Grösse

$$\frac{a^2-b^2-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)}$$

immer kleiner als die Einheit ist.

Hieraus ergiebt sich also, dass der Werth

$$\frac{a^2-b^2+2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)}$$

positiv und kleiner als die Einheit, dagegen der Werth

$$\frac{a^2-b^2-2\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{3(a^2+b^2)}$$

negativ und, absolut genommen, kleiner als die Einheit ist.

Weil nun nach der Theorie der hyperbolischen Functionen $\mathrm{Cos}2u$ stets positiv und niemals kleiner als die Einheit ist, so sieht man, dass mittelst der Gleichung 11) die Grösse $2u$, also auch die Grösse u, nicht bestimmt werden kann, es also ein Maximum der gemeinschaftlichen Sehnen der Hyperbel und ihres Krümmungskreises nicht giebt.

Ich habe diese Rechnung, weil dieselbe mir lehrreich schien, in der obigen Weise hier vollständig durchgeführt; in der That ergiebt sich aber das vorher gefundene Resultat auch unmittelbar aus der in 7) gefundenen Formel:

$$s^2 = 4\,\mathrm{Sin}2u^2(a^2\,\mathrm{Sin}\,u^2 + b^2\,\mathrm{Cos}\,u^2).$$

Denn aus den aus der Theorie der hyperbolischen Functionen bekannten Formeln:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1....4} + \frac{\varphi^6}{1....6} + \ldots,$$

$$\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1....5} + \frac{\varphi^7}{1....7} + \ldots.$$

ergiebt sich auf der Stelle, dass, wenn man u von Null an bis $+\infty$ oder $-\infty$ respective zunehmen oder abnehmen lässt, die Grössen $\mathrm{Sin}\,u^2$ und $\mathrm{Cos}\,u^2$ respective von 0 und 1 an in's Unendliche wachsen, so wie auch $\mathrm{Sin}\,2u^2$ unter derselben Voraussetzung von 0 an in's Unendliche wächst; daher wird nach dem obigen Ausdruck von s^2 auch s offenbar von 0 an in's Unendliche wachsen, wenn u von 0 an bis $+\infty$ oder $-\infty$ in's Unendliche respective zunimmt oder abnimmt.

Ich wiederhole, dass die von mir im Vorhergehenden gemachte Anwendung der hyperbolischen Functionen mir sehr geeignet scheint, diese Functionen zu weiterer und allgemeinerer Anwendung zu empfehlen. Daher sind auch die Bemühungen verschiedener Mathematiker, — namentlich der Herren Gronau in Danzig, Hoüel in Bordeaux, Forti in Pisa, — möglichst vollständige und zugleich bequeme Tafeln dieser wichtigen Functionen zu publiciren, wiederholt als in jeder Beziehung höchst verdienstliche anzuerkennen; so viel zu meiner Kenntniss gelangt ist, be-

reitet Herr A. Forti eine neue Ausgabe seiner grossen Tafeln vor, deren erste Ausgabe unter dem Titel: „Tavole dei Logaritmi delle funzioni circolari ed iperboliche, costruite dal Dottore **Angelo Forti**, Professore di Algebra e Trigonometria nel R. Liceo di Pisa, e precedute da una sua descrizione intorno la loro costruzione e il loro uso non che dalla storia e teoria delle funzioni stesse del Prof. Commendatore **O. F. Mossotti**, Senatore del Regno d'Italia. Pisa, Tipografia Nistri. 1863. 4°." erschienen ist; so bald über diese neue Ausgabe etwas Weiteres zu meiner Kenntniss gelangt, wird darüber im Literarischen Bericht des Archivs berichtet werden. — Die kürzeren Tafeln des Herrn Hoüel finden sich in dem recht sehr zu empfehlenden „Recueil de Formules et de Tables numériques, par **J. Hoüel**, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Paris. 1866. N°. XIV. pag. 36 — pag. 55." — Die Tafeln des Herrn Gronau können in Deutschland als allgemein bekannt vorausgesetzt werden. — Ich habe diese Gelegenheit gern ergriffen, um auf alle diese sehr verdienstlichen Arbeiten von Neuem aufmerksam zu machen.

Nachtrag.

Wenn wir den Halbmesser der Ellipse, welcher der Berührenden in dem durch den Winkel u bestimmten Punkte der Ellipse parallel ist, durch R bezeichnen, so ist bekanntlich *):

1) . . . . . $R^2 = a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2.$

Weil nun nach §. 4. 7), wenn s die gemeinschaftliche Sehne in dem in Rede stehenden Punkte bezeichnet:

$$s^2 = 4 \sin 2u^2 (a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2)$$

ist, so ist:

2) . . . . . $s^2 = 4R^2 \sin 2u^2.$

Aus der Gleichung 1) folgt:

$$a^2 - (a^2 - b^2) \cos u^2 = (a^2 - b^2) \sin u^2 + b^2 = R^2,$$

also:

---

*) M. s. meine Abhandlung in Thl. XXIV. No. XXIX. S. 379.

$$\cos u^2 = \frac{a^2 - R^2}{a^2 - b^2}, \quad \sin u^2 = \frac{R^2 - b^2}{a^2 - b^2};$$

folglich:

$$\sin 2u^2 = 4 \sin u^2 \cos u^2 = \frac{4(a^2 - R^2)(R^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)^2},$$

und daher nach 2):

$$3) \ldots\ldots \quad s^2 = \frac{16R^2(a^2 - R^2)(R^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)^2}.$$

Für die grösste gemeinschaftliche Sehne ist nach §. 4. 15):

$$\cos u = \sqrt{\frac{2a^2 - b^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3(a^2 - b^2)}},$$

$$\sin u = \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3(a^2 - b^2)}};$$

also:

$$\cos u^2 = \frac{2a^2 - b^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3(a^2 - b^2)},$$

$$\sin u^2 = \frac{a^2 - 2b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3(a^2 - b^2)};$$

und folglich:

$$a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2 = \frac{a^4 - b^4 + (a^2 - b^2)\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3(a^2 - b^2)},$$

also nach 1) für die grösste gemeinschaftliche Sehne:

$$4) \ldots\ldots \quad R^2 = \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3},$$

daher:

$$5) \ldots\ldots \quad R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3}}.$$

Hiernach ist also:

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3},$$

$$a^2 - R^2 = \frac{2a^2 - b^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3},$$

$$R^2 - b^2 = \frac{a^2 - 2b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3};$$

folglich nach 3), wenn jetzt s die grösste gemeinschaftliche Sehne bezeichnet:

6)

$$s^2 = \frac{\left\{\begin{array}{r} 16(a^2+b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4})(2a^2-b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}) \\ \times(a^2-2b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}) \end{array}\right\}}{27(a^2-b^2)^2}.$$

Diese Bemerkungen, welche ich hier nicht weiter ausführen will, gehören im Wesentlichen Herrn J. J. Walker, M. A. in „The Educational Times. Vol. XXII. April 1, 1869. p. 21. No. 2869." — Man sieht, dass seine Formeln sich sehr leicht aus den von mir im Obigen entwickelten Formeln ergeben.

VI.

Bemerkungen über einen im Archiv besprochenen Lehrsatz.

Von

Herrn Professor *C. A. Bretschneider*

zu Gotha.

Der von Herrn Professor Fasbender in Thorn gefundene, von dem Lehrer Herrn M. Curtze am dortigen Gymnasium (m. s. Thl. XLVIII. S. 471.) mitgetheilte und auf verschiedene Arten von dem Herausgeber des Archivs in Thl. XLVIII. S. 474., von Herrn Professor Fasbender in Thl. XLIX. S. 115. und Herrn Professor P. Hackel in Böhmisch-Leipa in Thl. XLIX. S. 346.

bewiesene Satz bildet nur einen speciellen Fall des folgenden weit allgemeineren *):

Die Winkel, welche drei aus den Spitzen eines Dreieckes nach den Gegenseiten gezogene Transversalen mit letzteren, nach einerlei Richtung hin genommen, bilden, haben stets die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Cotangenten gleich Null ist, wenn die in den Scheiteln dieser Winkel auf die Seiten errichteten Lothe sich in einem Punkte schneiden.

Der Beweis wird ganz einfach auf folgende Weise geführt. Es sei (Taf. V. Fig. I.) ABC ein beliebiges Dreieck, in welchem die Transversalen AD, BE, CF aus den Spitzen nach den Gegenseiten gezogen sind. Man setze:

$$BC=a;\quad BD=a_{,}=\alpha a;\quad DC=a_{,,}=\alpha_{,}a;\quad \angle ADB=D;\quad AD=d;$$
$$CA=b;\quad CE=b_{,}=\beta b;\quad EA=b_{,,}=\beta_{,}b;\quad \angle BEC=E;\quad BE=e;$$
$$AB=c;\quad AF=c_{,}=\gamma c;\quad FB=c_{,,}=\gamma_{,}c;\quad \angle CFA=F;\quad CF=f;$$

so hat man:

$$d\cos D = a_{,}-c\cos B = b\cos C-a_{,,},$$
$$d\sin D = \quad c\sin B = b\sin C;$$

also:

$$\cot D=\frac{a_{,}}{c\sin B}-\cot B=\cot C-\frac{a_{,,}}{b\sin C}$$
$$=\frac{aa_{,}}{2\Delta}-\cot B \qquad =\cot C-\frac{aa_{,,}}{2\Delta}.$$

Bildet man hiernach die entsprechenden Werthe für $\cot E$ und $\cot F$ und addirt die sämmtlichen Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\cot D+\cot E+\cot F=\frac{aa_{,}+bb_{,}+cc_{,}}{2\Delta}-(\cot A+\cot B+\cot C) \quad (1)$$
$$=(\cot A+\cot B+\cot C)-\frac{aa_{,,}+bb_{,,}+cc_{,,}}{2\Delta} \quad (2)$$
$$=\frac{(a_{,}^2+b_{,}^2+c_{,}^2)-(a_{,,}^2+b_{,,}^2+c_{,,}^2)}{4\Delta}, \quad (3)$$

Ausdrücke, denen man leicht auch noch die folgenden anschliesst:

*) Auch meine Ableitung in Thl. XLVIII. S. 474. beruhet auf allgemeineren Betrachtungen.

$$\cot D + \cot E + \cot F = (\alpha + \beta + \gamma - 1)(\cot A + \cot B + \cot C) - (\alpha \cot A + \beta \cot B + \gamma \cot C)$$
$$= (1 - \alpha_{,} - \beta_{,} - \gamma_{,})(\cot A + \cot B + \cot C) + (\alpha_{,} \cot A + \beta_{,} \cot B + \gamma_{,} \cot C),$$

$$4\Delta(\alpha \cot D + \beta \cot E + \gamma \cot F) = (a_{,}^2 + b_{,}^2 + c_{,}^2) + (d^2 + e^2 + f^2) - (a^2 + b^2 + c^2),$$

$$4\Delta(\alpha_{,} \cot D + \beta_{,} \cot E + \gamma_{,} \cot F) = -(a_{,,}^2 + b_{,,}^2 + c_{,,}^2) - (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\cot A \cot D + \cot B \cot E + \cot C \cot F$$
$$= \frac{a a_{,} \cot A + b b_{,} \cot B + c c_{,} \cot C}{2\Delta} - 1$$
$$= 1 - \frac{a a_{,,} \cot A + b b_{,,} \cot B + c c_{,,} \cot C}{2\Delta}$$
$$= \frac{(a_{,}^2 - a_{,,}^2) \cot A + (b_{,}^2 - b_{,,}^2) \cot B + (c_{,}^2 - c_{,,}^2) \cot C}{4\Delta}.$$

Diese letzten Formeln ergeben sich unmittelbar aus den Werthen:

$$\cot D = \alpha_{,} \cot A'' - \alpha \cot A' = \alpha \cot C' - \alpha_{,} \cot B$$

u. s. w., in denen A' und A'' die den Strecken $a_{,}$ und $a_{,,}$ gegenüberliegenden Abschnitte des Winkels A bedeuten.

Die Gleichung (3) enthält den im Eingange ausgesprochenen Lehrsatz unmittelbar. Denn fällt man aus einem beliebigen Punkte der Dreiecksfläche Lothe auf die Seiten der Figur, welche auf denselben die Abschnitte $a_{,} a_{,,} b_{,} b_{,,} c_{,} c_{,,}$ erzeugen, so ist stets

$$a_{,}^2 + b_{,}^2 + c_{,}^2 = a_{,,}^2 + b_{,,}^2 + c_{,,}^2.$$

Es werden daher nicht nur die drei sogenannten Schwerlinien, welche die Dreiecksseiten halbiren, die Eigenschaft besitzen, dass $\cot D + \cot E + \cot F = 0$ ist, sondern eben so die drei Transversalen, die nach den Berührungspunkten des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises, ingleichen die nach den Berührungspunkten der drei angeschriebenen Kreise gezogen werden. Für die Schwerlinien hat man ausser der Relation

$$0 = \cot D + \cot E + \cot F$$

auch noch:

$$0 = \cot A \cot D + \cot B \cot E + \cot C \cot F.$$

Andere Folgerungen, die man aus den angegebenen Ausdrücken ableiten kann, indem man z. B. $\alpha=\beta=\gamma$ oder $\alpha+\beta+\gamma=1$ u. s. w. setzt, übergehe ich der Kürze halber. Dagegen bemerke ich noch die folgende Erweiterung des oben angeführten Satzes von den aus einem Punkte auf die Dreiecksseiten gefällten Lothen, da mir derselbe in Lehrbüchern und Zeitschriften noch nicht begegnet ist:

Zieht man von einem Punkte in der Ebene eines Dreiecks drei Gerade nach dessen Seiten, so dass sie mit letzteren, nach derselben Richtung genommen, Winkel von gleicher Grösse $=\varphi$ bilden, so ist stets (Taf. V. Fig. II.):

$$a_{,}^{2}+b_{,}^{2}+c_{,}^{2}-4\Delta\cot\varphi=a_{,,}^{2}+b_{,,}^{2}+c_{,,}^{2}.$$

Der Satz schliesst sich, wie man sofort sieht, unmittelbar an eine Reihe von Sätzen an über drei Kreise, die sich in einem Punkte schneiden, und führt zu mancherlei einfachen Folgerungen, die theils längst bekannt, theils aber auch neu, wenigstens von dem vorliegenden Gesichtspunkt aus noch nicht betrachtet worden sind.

Der auf Seite 237 des 49sten Bandes des Archivs mitgetheilte Satz von Walker, — die Bestimmung des Quadrates der dritten Diagonale eines Trapezoides aus den Strecken, in welche sich beide Diagonalen der Figur theilen, und aus dem Schnittwinkel der Diagonalen; — ist von mir bereits vor 22 Jahren gefunden worden und im 2ten Bande des Archivs s. 249 fast mit denselben Buchstaben, die Walker gebraucht, zu lesen.

C. A. Br.

Vorstehendes war von mir unbeachtet geblieben und ich danke Herrn Professor Bretschneider recht sehr für seine Bemerkung. Der Satz erscheint a. a. O. aber in Verbindung mit vielen anderen Sätzen, und er konnte daher hier wohl als eine isolirte oder für sich bestehende Uebungsaufgabe benutzt werden.

G.

VII.

Ueber einen Satz vom sphärischen Dreieck.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

Sind in der gewöhnlichen Bezeichnung a, b, c die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes ABC, so ist bekanntlich:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{ctg} a . \sin b}{\sin C} - \cos b . \operatorname{ctg} C,$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\operatorname{ctg} b . \sin c}{\sin A} - \cos c . \operatorname{ctg} A,$$

$$\operatorname{ctg} C = \frac{\operatorname{ctg} c . \sin a}{\sin B} - \cos a . \operatorname{ctg} B.$$

Bezeichnet man mit α, β, γ die drei Winkel $AA'B$, $BB'C$, $CC'A$, welche die seitenhalbirenden Transversalen mit den Seiten des Dreieckes einschliessen, so ist nach der citirten Gleichung auch:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg} c . \sin \frac{1}{2} a}{\sin B} - \cos \tfrac{1}{2} a . \operatorname{ctg} B,$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} a . \sin \frac{1}{2} b}{\sin C} - \cos \tfrac{1}{2} b . \operatorname{ctg} C,$$

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{\operatorname{ctg} b . \sin \frac{1}{2} c}{\sin A} - \cos \tfrac{1}{2} c . \operatorname{ctg} A.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen der Ordnung nach mit $2\cos\frac{1}{2}a$, $2\cos\frac{1}{2}b$, $2\cos\frac{1}{2}c$ und addirt, so folgt mit Rücksicht auf die vorhergehenden:

$$2(\cos\tfrac{1}{2}a.\operatorname{ctg}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}b.\operatorname{ctg}\beta + \cos\tfrac{1}{2}c.\operatorname{ctg}\gamma)$$
$$= \operatorname{ctg}A + \cos b.\operatorname{ctg}C - \operatorname{ctg}B(1 + \cos a)$$
$$+ \operatorname{ctg}B + \cos c.\operatorname{ctg}A - \operatorname{ctg}C(1 + \cos b)$$
$$+ \operatorname{ctg}C + \cos a.\operatorname{ctg}B - \operatorname{ctg}A(1 + \cos c)$$

oder

$$\cos\tfrac{1}{2}a.\operatorname{ctg}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}b.\operatorname{ctg}\beta + \cos\tfrac{1}{2}c.\operatorname{ctg}\gamma = 0.$$

Für das ebene Dreieck verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = 0,$$

welche Herr Fasbender im 49. Theil dieses Archivs S. 115. bewiesen hat.

Bezeichnen x, y, z dieselben drei Winkel für die winkelhalbirenden Transversalen, so gelten folgende Gleichungen:

$$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C,$$
$$\cos B = \sin A \sin C \cos b - \cos A \cos C,$$
$$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B;$$

$$\cos x = \sin\tfrac{1}{2}A \sin B - \cos\tfrac{1}{2}A \cos B,$$
$$\cos y = \sin\tfrac{1}{2}B \sin C - \cos\tfrac{1}{2}B \cos C,$$
$$\cos z = \sin\tfrac{1}{2}C \sin A - \cos\tfrac{1}{2}C \cos A.$$

Multiplicirt man die letzten drei der Ordnung nach mit $2\cos\frac{1}{2}A$, $2\cos\frac{1}{2}B$, $2\cos\frac{1}{2}C$ und addirt, so folgt mit Rücksicht auf die ersten nach kurzer Rechnung:

$$\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}x + \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}y + \cos\tfrac{1}{2}C \cos\tfrac{1}{2}z = 0,$$

welches Resultat unverändert auch für das ebene Dreieck giltig ist.

VIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wenn $ABCD$ (Taf. V. Fig. VII.) ein Trapez mit den parallelen Seiten AB und CD ist und AC und BD dessen Diagonalen sind, so ist sehr leicht zu beweisen, dass

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$$

ist.

E Morén, elev vid Örebro elem.-läroverk (Tidskrift för Matematik och Fysik. Januari 1869. pag. 15.)

---

1. Aus den Gleichungen:

$$R\sin x = r\sin y, \quad R\cos 2x\cos y = r\cos x\cos 2y$$

die Grössen x und y zu bestimmen.

2. Die Gleichungen:

$$x+y = 3+v, \quad u+z = 3-v, \quad x^2+y^2-u^2-z^2 = 6,$$
$$x^3+y^3+u^3+z^3 = 306, \quad x^4+y^4-u^4-z^4 = 606$$

aufzulösen.

Lektor Lindman (Tidskrift för Matematik och Fysik. Januari 1869. pag. 11.)

Zu beweisen, dass, wenn die Zahlen a, b, c die Seiten eines Dreiecks sind, immer

$$\tfrac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) > a^3+b^3+c^3+3abc$$

ist.

Collins.

Herr Collins bemerkt, dass das Theorem zuweilen auch richtig ist, wenn a, b, c nicht die Seiten eines Dreiecks sind; für $a=2, b=3, c=6$ ist dasselbe richtig, für $a=2, b=3, c=7$ ist es nicht richtig.

IX.

Miscellen.

Schreiben des Herrn Franz Unferdinger, Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien, an den Herausgeber.

Im 28. Theil Ihres geschätzten Archivs s. 97. habe ich durch rein stereometrische Betrachtungen gezeigt, dass zwischen den Halbmessern ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 der fünf Berührungskugeln einer dreiseitigen Pyramide immer die einfache Relation besteht:

$$\frac{1}{\varrho} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4}\right),$$

wenn sich ϱ auf die innere Berührungskugel bezieht. Vielleicht interessirt Sie die Mittheilung, dass dieselbe auch leicht aus den von Ihnen (Analytische Geometrie Bd. 1. s. 251.) entwickelten Formeln gefolgert werden kann.

Nimmt man eine Ecke der Pyramide zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems und sind x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' die Coordinaten der drei andern Ecken, so finden Sie, wenn

$$\alpha = (x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2) - (x'x''+y'y''+z'z'')^2,$$

$$\alpha' = (x^2+y^2+z^2)(x''^2+y''^2+z''^2) - (xx''+yy''+zz'')^2,$$

$$\alpha'' = (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) - (xx'+yy'+zz')^2;$$

$$\beta = (xx''+yy''+zz'')(xx'+yy'+zz') - (x^2+y^2+z^2)(x'x''+y'y''+z'z''),$$

$$\beta' = (x'x''+y'y''+z'z'')(xx'+yy'+zz') - (x'^2+y'^2+z'^2)(xx''+yy''+zz''),$$

$$\beta'' = (x'x''+y'y''+z'z'')(xx''+yy''+zz'') - (x''^2+y''^2+z''^2)(xx'+yy'+zz'),$$

$$\Delta = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'',$$

$$\lambda = \alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''$$

ist:

$$\varrho = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\alpha''}},$$

$$\varrho_1 = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'} - \sqrt{\alpha''}},$$

$$\varrho_2 = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\alpha''}},$$

$$\varrho_3 = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\alpha''}},$$

$$\varrho_4 = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\alpha''} - \sqrt{\lambda}},$$

worin die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem Δ positiv oder negativ ist.

Nimmt man die vier letzten Gleichungen reciprok und addirt, so folgt:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \pm \frac{2}{\Delta}(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\alpha''}),$$

oder mit Rücksicht auf die erste:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{2}{\varrho}.$$

Auch Steiner gibt in Crelle's Journal Bd. 2. s. 98. über die Radien der Berührungskugeln der dreiseitigen Pyramide verschiedene Beziehungsgleichungen, aber ich sehe nicht, wie sich die vorstehende, welche die einfachste ist, daraus ableiten lasse.

Ueber Fermat's geometrischen Satz.

Von Herrn Oberlehrer Dr. W. Stammer an der Realschule in Düsseldorf.

Folgende Beweise des mehrfach besprochenen Fermatschen Satzes scheinen mir die direktesten und einfachsten zu sein. (Taf. IV. Fig. A.)

1. $AG : GH = AD : EH$ oder $AG : AH = AD : EK$,

daher

$$AG = \frac{AH.AD}{EK}, \text{ folglich } BG = AB - \frac{AH.AD}{EK},$$

oder, wenn man den Radius des Kreises mit r bezeichnet,

$$BG = 2r - \frac{AH.r\sqrt{2}}{EK} = r(2 - \frac{AH}{EK}\sqrt{2});$$

ebenso:

$$AF = r(2 - \frac{BH}{EK}\sqrt{2}),$$

mithin:

$$BG^2 + AF^2 = r^2(8 - 4\sqrt{2}.\frac{AH + BH}{EK} + 2\frac{AH^2 + BH^2}{EK^2})$$

$$= 2r^2(4 - \frac{4r\sqrt{2}}{EK} + \frac{AH^2 + BH^2}{EK^2}).$$

Aber

$$AH^2 + BH^2 = AE^2 + EB^2 - 2EH^2 = 4r^2 - 2EH^2 = 2(2r^2 - (EK - HK)^2)$$

$$= 2[2r^2 - (EK^2 - 2EK.r\sqrt{2} + 2r^2)] = 2(-EK^2 + 2EK.r\sqrt{2}).$$

Folglich:

$$BG^2 + AF^2 = 2r^2(4 - \frac{4r\sqrt{2}}{EK} + \frac{4r\sqrt{2}}{EK} - 2) = 4r^2.$$

II. $$AF = AG + GF = \frac{1}{EK}(AH.AD + DC.EH)$$

$$= \frac{r}{EK}(AH.\sqrt{2} + 2EH),$$

$$BG = \frac{r}{EK}(BH.\sqrt{2} + 2EH),$$

$$AF^2 + BG^2 = \frac{2r^2}{EK^2}(BH^2 + AH^2 + 2EH.\sqrt{2}.(AH + BH) + 4EH^2)$$

$$= \frac{2r^2}{EK^2}(4r^2 - 2EH^2 + 2EH.2r\sqrt{2} + 4EH^2)$$

$$= \frac{4r^2}{EK^2}(2r^2 + 2r.EH.\sqrt{2} + EH^2) = \frac{4r^2}{EK^2}(r\sqrt{2} + EH)^2 = 4r^2.$$

Auszug aus einem Briefe des Herrn G. A. Vorsterman van Oyen in Aardenburg i. d. Niederland. an den Herausgeber.

Monsieur le Professeur!

Deux de mes éleves ont resolu deux des problèmes qui se

trouvent dans votre Archiv *). J'ai l'honneur de vous les envoyer ci-joints.

Agréez etc.

Aardenburg, 7. Fevrier 1869.

G. A. Vorsterman van Oyen.

I. Halbirt man in einem Dreieck einen Winkel oder den zugehörigen Aussenwinkel, so ist das Quadrat der Halbirungslinie gleich dem Rechteck aus den beiden Seiten, die den Winkel bilden, weniger dem Rechteck aus den Abschnitten, welche die Halbirungslinie auf der dritten Seite bildet, diese Differenz positiv oder negativ genommen, jenachdem der Winkel selbst oder der Aussenwinkel halbirt ist. In Taf. V. Fig. III und Taf. V. Fig. IV. hat man also:

$$+\overline{AD}^2 = \overline{AB}.\overline{AC} - \overline{BD}.\overline{DC}$$

und

$$-\overline{A'D'}^2 = \overline{A'B'}.\overline{A'C'} - \overline{B'D'}.\overline{D'C'}.$$

Beweis. (Taf. V. Fig. III.). Zieht man eine Linie $\overline{CE}$, welche mit $\overline{BC}$ einen Winkel $\overline{BCE} = \overline{BAD}$ bildet und welche die Verlängerung der Halbirungslinie in $\overline{E}$ schneidet, so ist:

Winkel $\overline{ADB}$ gleich Winkel $\overline{CDE}$,

„ $\overline{BAD}$ „ „ $\overline{DCE}$.

Also sind die Dreiecke $\overline{ADB}$ und $\overline{CDE}$ ähnlich, folglich Winkel $\overline{ABD}$ gleich Winkel $\overline{DEC}$ und $\overline{AD}:\overline{BD}::\overline{CD}:\overline{DE}$ oder

$$\overline{AD}.\overline{DE} = \overline{BD}.\overline{CD}. \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Weil Winkel $\overline{ABD} = \overline{AEC}$ und

„ $\overline{BAD} = \overline{EAC}$

ist, sind auch die Dreiecke $\overline{ABD}$ und $\overline{AEC}$ ähnlich, folglich:

$$\overline{AB}:\overline{AD}::\overline{AE}:\overline{AC}$$

oder

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AD}.\overline{AE},$$

$$\overline{BD}.\overline{CD} = \overline{AD}.\overline{DE}.$$

*) M. s. Archiv Thl. XLVIII. S. 480. G.

Also durch Subtraction

$$(\overline{AE}-\overline{DE}).\overline{AD}=\overline{AB}.\overline{AC}-\overline{BD}.\overline{CD}$$

oder

$$+\overline{AD}^2=\overline{AB}.\overline{AC}-\overline{BD}.\overline{CD}.$$

Beweis: (Taf. V. Fig. IV.). Zieht man eine Linie $\overline{B'E'}$, welche mit $\overline{A'B'}$ einen Winkel $\overline{A'B'E'}$ gleich Winkel $\overline{A'D'B'}$ bildet und welche die Verlängerung der Halbirungslinie $\overline{A'D'}$ in $\overline{E'}$ schneidet, so hat man:

Winkel $\overline{A'B'E'}$ gleich Winkel $\overline{A'D'C'}$

„ $\overline{E'A'B'}=\overline{F'A'D'}=$ „ $\overline{D'A'C'}$.

Also sind die Dreiecke $\overline{A'B'E'}$ und $\overline{A'C'D'}$ ähnlich, folglich Winkel $\overline{A'E'B'}$ = Winkel $\overline{A'C'D'}$ und

$$\overline{A'E'}:\overline{A'B'}::\overline{A'C'}:\overline{A'D'}$$

oder

$$\overline{A'E'}.\overline{A'D'}=\overline{A'B'}.\overline{A'C'}\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Weil man hat:

Winkel $\overline{A'C'D'}$ gleich Winkel $\overline{A'E'B'}$

und

„ $\overline{A'D'C'}$ „ „ $\overline{A'D'C'}$,

so sind auch die Dreiecke $\overline{A'C'D'}$ und $\overline{D'E'B'}$ ähnlich, folglich

$$\overline{A'D'}:\overline{C'D'}::\overline{B'D'}:\overline{D'E'}$$

oder

$$\overline{A'D'}.\overline{D'E'}=\overline{C'D'}.\overline{B'D'}$$

$$\overline{A'D'}.\overline{A'E'}=\overline{A'B'}.\overline{A'C'}\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Also durch Subtraction

$$\overline{A'D'}.(\overline{A'E'}-\overline{D'E'})=\overline{A'B'}.\overline{A'C'}-\overline{C'D'}.\overline{B'D'}$$

oder

$$-\overline{A'D'}^2=\overline{A'B'}.\overline{A'C'}-\overline{D'C'}.\overline{B'D'}.$$

W. Wondergem,
Schüler des Instituts Vorsterman van Oyen.

II. Halbirt man in einem Dreieck einen Winkel oder den zugehörigen Aussenwinkel, so ist (Taf. V. Fig. V. und Fig. VI.):

$$\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 : \overline{AD}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2.$$

Beweis. Nach dem Satze 1. haben wir:

$$\pm\overline{AD}^2 = \overline{AB}.\overline{AC} - \overline{BD}.\overline{DC},$$

also:

$$\overline{AD}^4 = \overline{AB}^2.\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.\overline{DC}^2 - 2.\overline{AB}.\overline{AC}.\overline{BD}.\overline{DC}.$$

Ferner verhalten sich die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ wie die Stücke $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$, d. h.:

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$$

oder:

$$\overline{AB}.\overline{DC} = \overline{AC}.\overline{BD};$$

deshalb können wir statt der obigen Gleichung auch schreiben:

$$\overline{AD}^4 = \overline{AB}^2.\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.\overline{DC}^2 - \overline{AB}^2.\overline{DC}^2 - \overline{AC}^2.\overline{BD}^2$$

oder:

$$\overline{AD}^4 = (\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2)(\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2)$$

und folglich:

$$\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 : \overline{AD}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2.$$

M. Scheele,
Schüler des Instituts Vorsterman van Oyen.

Ueber einen geometrischen Satz.

Von dem Herausgeber.

In der neuesten italienischen Uebersetzung der sechs ersten Bücher und des eilften und zwölften Buchs der Elemente des Euklides, durch deren Herausgabe die Herren Enrico Betti und Francesco Brioschi sich ein besonderes Verdienst erworben haben:

Gli Elementi d'Euclide con note, aggiunte ed esercizi, ad uso de'Ginnasi e de'Licei, per cura dei Professori Enrico Betti e Francesco Brioschi. Firenze. Successori Le Monnier. 1868.

sind den einzelnen Büchern eine grosse Anzahl sehr verdienstlicher „Esercizi" beigefügt, auf die ich die Leser des Archivs aufmerksam mache, und aus denen ich denselben öfters das Eine

oder das Andere mitzutheilen hoffe. Unter den dem vierten Buche beigegebenen „Esercizi" findet sich der folgende zu beweisen aufgegebene Satz:

Wenn um ein gleichseitiges Dreieck *ABC*, dessen Seite *a* sein mag, ein Kreis und ein zweiter mit diesem concentrischer Kreis mit dem beliebigen Halbmesser *r* beschrieben ist: so ist, wenn *P* ein beliebiger Punkt in diesem zweiten mit dem ersten concentrischen Kreise ist, die Summe der Quadrate der Entfernungen *PA*, *PB*, *PC* des Punktes *P* von den Spitzen *A*, *B*, *C* des gleichseitigen Dreiecks *ABC* eine constante Grösse, nämlich von der Lage des Punktes *P* in dem zweiten, dem ersten concentrischen Kreise unabhängig.

Ganz abgesehen davon, ob und in wie fern dieser Satz vielleicht schon bekannt ist, will ich hier einen einfachen analytischen Beweis desselben geben, weil ich glaube, dass sich auch in der analytischen Geometrie die Aufsuchung dieses Beweises sich zu einer zweckmässigen einfachen Uebungsaufgabe benutzen lässt.

Den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der beiden concentrischen Kreise bezeichnen wir durch *O*, und nehmen denselben als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der *xy* an. Der positive Theil der Axe der *x* sei *OA*, wo dann die Axe der *y* der Seite *BC* des gleichseitigen Dreiecks *ABC* parallel ist. Der Punkt *B* liege auf der positiven, der Punkt *C* auf der negativen Seite der Axe der *x*. Das Quadrat der Höhe des gleichseitigen Dreiecks *ABC* ist offenbar $a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$, und folglich $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ die Höhe. Der Halbmesser des um das Dreieck *ABC* beschriebenen Kreises ist nach einem bekannten Satze vom Dreieck offenbar $\frac{2}{3}$ der Höhe, also nach dem Vorhergenden $\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Die Entfernung des Mittelpunkts *O* von den Seiten des Dreiecks *ABC* ist nach demselben Satze vom Dreieck offenbar $\frac{1}{3}$ der Höhe, also nach dem Vorhergehenden $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Hiernach sind also offenbar:

die Coordinaten von *A*: . . . . $+\frac{a}{\sqrt{3}}$, 0;

„ „ „ *B*: . . . . $-\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $+\frac{a}{2}$;

„ „ „ *C*: . . . . $-\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $-\frac{a}{2}$.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Punktes P durch f, g; so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$PA^2 = (f - \frac{a}{\sqrt{3}})^2 + g^2,$$

$$PB^2 = (f + \frac{a}{2\sqrt{3}})^2 + (g - \frac{a}{2})^2,$$

$$PC^2 = (f + \frac{a}{2\sqrt{3}})^2 + (g + \frac{a}{2})^2;$$

folglich:

$$\begin{aligned} & PA^2 + PB^2 + PC^2 \\ = \; & (f - \tfrac{a}{\sqrt{3}})^2 + g^2 \\ & + (f + \tfrac{a}{2\sqrt{3}})^2 + (g - \tfrac{a}{2})^2 \\ & + (f + \tfrac{a}{2\sqrt{3}})^2 + (g + \tfrac{a}{2})^2 \\ = \; & f^2 - \frac{2af}{\sqrt{3}} + \frac{a^2}{3} + g^2 \\ & + f^2 + \frac{af}{\sqrt{3}} + \frac{a^2}{12} + g^2 - ag + \frac{a^2}{4} \\ & + f^2 + \frac{af}{\sqrt{3}} + \frac{a^2}{12} + g^2 + ag + \frac{a^2}{4}, \end{aligned}$$

also offenbar:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3(f^2 + g^2) + a^2.$$

Weil nun aber der Punkt P in dem zweiten, dem ersten concentrischen Kreise, dessen Halbmesser r ist, liegt: so ist

$$f^2 + g^2 = r^2,$$

also:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = a^2 + 3r^2,$$

und daher die Summe der Quadrate der Entfernungen PA, PB, PC eine constante Grösse, wie behauptet wurde.

Wenn nun um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt O mit den Halbmessern r und r' zwei concentrische Kreise, und in dieselben die gleichseitigen Dreiecke ABC und $A'B'C'$, deren Seiten a und a' sein mögen, beschrieben, in den beiden Kreisen aber beliebig die Punkte P und P' angenommen werden: so ist nach dem vorhergehenden Satze

$$PA'^2 + PB'^2 + PC'^2 = a'^2 + 3r^2,$$

$$P'A^2 + P'B^2 + P'C^2 = a^2 + 3r'^2;$$

also, weil nach dem Obigen

mittelst eines schon von Euler bemerkten recurrirenden Verfahrens erhalten werden können. Nennt man α_n und β_n ingleichen γ_n und δ_n irgend ein Paar zusammengehöriger Werthe, so ist:

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n \qquad \gamma_{n+1} = 2\gamma_n + \delta_n$$
$$\beta_{n+1} = 3\alpha_n + 2\beta_n \qquad \delta_{n+1} = 3\gamma_n + 2\delta_n.$$

Damit erhält man folgende Zusammenstellung:

n	α	β	γ	δ
1	1	2	1	1
2	4	7	3	5
3	15	26	11	19
4	56	97	41	71
5	209	362	153	265
6	780	1351	571	989
7	2911	5042	2131	3691

u. s. w.

Zwischen diesen Zahlen entdeckt man leicht die Relationen:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_n = \alpha_n \qquad \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{2n} = 6.\alpha_n^2$$
$$1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n = \beta_n \qquad \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{2n+1} = \delta_{n+1}^2$$

$$\alpha_1 + \alpha_{2n+1} = 2.\beta_n \,.\alpha_{n+1} \qquad \alpha_1 + \alpha_{2n} = \gamma_n . \delta_{n+1}$$
$$\alpha_2 + \alpha_{2n} = 2.\beta_{n-1}.\alpha_{n+1} \qquad \alpha_2 + \alpha_{2n-1} = \gamma_{n-1}.\delta_{n+1}$$
$$\alpha_3 + \alpha_{2n-1} = 2.\beta_{n-2}.\alpha_{n+1} \qquad \alpha_3 + \alpha_{2n-2} = \gamma_{n-2}.\delta_{n+1}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\alpha_n + \alpha_{n+2} = 2.\beta_1.\alpha_{n+1} \qquad \alpha_n + \alpha_{n+1} = \gamma_1.\delta_{n+1}$$

$$\delta_1 + \delta_{2n+1} = 2.\beta_n \,.\delta_{n+1} \qquad \delta_1 + \delta_{2n} = 6.\gamma_n.\alpha_n$$
$$\delta_2 + \delta_{2n} = 2.\beta_{n-1}.\delta_{n+1} \qquad \delta_1 + \delta_{2n-1} = 6.\gamma_{n-1}.\alpha_n$$
$$\delta_n + \delta_{n+2} = 2.\beta_1.\delta_{n+1} \qquad \delta_n + \delta_{n+1} = 6.\gamma_1.\alpha_n$$

und es dürfte eine zweckmässige Uebung für Schüler sein, die Richtigkeit dieser Relationen mittelst des aufgestellten Recursionsgesetzes allgemein zu beweisen.

Druckfehler.

Thl. XLIX. S. 240. „Zur Beachtung Z. 5." s. m. Nr. XVI. statt Nr. XIV.

Thl. XLIX. S. 326. Zl. 4. v. o. s. m. „welche" statt „welches".

Im Literar. Ber. Nr. CLXXXXIV. S. 17. Z. 4. v. o. setze man „$exi =$" für „$exi -$".

Thl. XLIX. S. 326. Z. 14. v. u. s. m. Nr. 34. statt Nr. 31.

X.

Die Gesetze der Lichtbrechung.

Von

Herrn Dr. *Jos. Kudelka*,

Kaiserlich Königlichem Lyceal-Professor zu Linz.

(Fortsetzung von Nr. III. S. 18.)

(Figuren s. Taf. VI. VII. VIII.)

§. 14. Brechung des Lichtes beim Durchgange durch ein Medium, das prismatisch geformt ist.

Nehmen wir zuerst ein von parallelen Ebenen mn und pl begrenztes Medium (Fig. 24) an, für welches $m > 1$ ist. Der auffallende Strahl AB nimmt in demselben die Richtung BC und tritt in der Richtung $CD \parallel AB$ aus dem Medium heraus.

Unter diesen Umständen ist der Einfallswinkel BCx an der zweiten Fläche gleich dem Brechungswinkel b an der ersten und der Austrittswinkel DCy ist gleich dem Einfallswinkel a an der ersten Fläche.

Drehen wir nun die zweite Trennungsfläche so, dass sie in die Lage Cn zu liegen kommt. Das Einfallsloth xy wird mitgedrehet und nimmt die Lage $x'y'$ an. Es bildet mit dem vorigen den Winkel xCx'. Beide Trennungsflächen bilden jetzt offenbar ein Prisma, dessen brechender Winkel $= p$ ist. Auch ist der Winkel der Einfallslothe $xCx' = p$, weil die Schenkel des einen senkrecht stehen auf jenen des anderen.

Jetzt ist der Einfallswinkel an der zweiten Fläche $= BCx'$, während er vorhin $= BCx$ war; er ist also um den Winkel, den die Einfallslothe bilden, somit um den brechenden Winkel des Prisma, kleiner als vorhin. Eine Verkleinerung des Einfallswinkels hat nothwendig auch eine Verminderung des Austrittswinkels zur Folge. Es wird jetzt der austretende Strahl die Richtung Cf' haben, welche nicht mehr parallel ist zu jener des einfallenden AB. War also vorhin der Austrittswinkel $= DCy$, so ist er jetzt $= FCy'$ und somit um $p + \nu$ kleiner als vorhin. Die Verminderung des Austrittswinkels geschieht daher gleichzeitig auf beiden Seiten desselben. Auf der linken Seite ist der Verlust $= yCy' = p$ und auf der rechten $= FCD = \nu$.

Hier haben wir den Fall, wo der gebrochene Strahl BC eine konstante Richtung beibehält, denn diese wird ja durch die Drehung der Austrittsfläche nicht affizirt. Eine Aenderung des Austrittswinkels kann daher, wie dies bereits bekannt ist, nur auf die Art erfolgen, dass das Einfallsloth und der austretende Strahl gleichzeitig entgegengesetzte Drehungen erleiden. Wird also, wie diess im vorliegenden Falle angenommen wurde, das Einfallsloth schraubenlinks gedrehet, so muss sich der austretende Strahl CD gleichzeitig schraubenrechts drehen, damit die Richtung von BC konstant verbleibe.

Sind also die Trennungsflächen gegen einander geneigt, so dass sie ein Prisma bilden, so erscheinen die Einfallswinkel an der zweiten Fläche, welche bei paralleler Lage der Flächen den respectiven Brechungswinkeln an der ersten Fläche gleich waren, sämmtlich um den Betrag des brechenden Winkels vermindert. Wird aber die Austrittsfläche pl entgegengesetzt gedrehet, so werden die Einfallswinkel um p vermehrt.

Denken wir uns wiederum die Trennungsflächen mn und pl (Fig. 25) in parallelen Lagen. Die untere Fläche pl werde bis auf eine sehr kleine, runde Oeffnung O mit undurchsichtigem Papiere bedeckt. Diese Oeffnung O sei der Mittelpunkt eines Halbkreises, dessen einzelne Punkte man sich als leuchtend vorzustellen hat.

Der Strahl MO, dessen Richtung fast parallel ist mit der Trennungsfläche pl (dessen Einfallswinkel $MON = 90^0$) wird in dem Medium zum Einfallslothe gebrochen und nimmt darin die Richtung OF, um dann in der Richtung $Fx \parallel MO$ auszutreten.

Ein anderer, von einem ähnlich liegenden Punkte R des Halbkreises ausgehender Strahl RO wird in dem Medium die Richtung

OC nehmen und in der Richtung Cy austreten, parallel zu OR. Alle von den einzelnen Punkten des Halbkreises durch die Oeffnung O dringenden Strahlen werden nach ihrer Brechung innerhalb des Mediums ein Dreieck COF bilden, in dessen Grundlinie CF die Austrittspunkte aller dieser Strahlen fallen. Die gebrochenen Strahlen sind jedoch über der Fläche dieses Dreiecks nicht gleichmässig vertheilt; sie liegen gegen die Seiten desselben OF und OC dichter aneinander und es nimmt ihre Dichte gegen die Höhenlinie OL des Dreiecks ab.

Weilt ein Auge oberhalb der Trennungsfläche mn, so kann es nacheinander alle Punkte des Halbkreises sehen, wenn es parallel zur Grundlinie FC sich fortbewegt.

Da in dem Punkte C der oberen Trennungsfläche eine Brechung vom Einfallslothe Statt findet und da der Austrittswinkel $= 90^0$ ist, so besitzt hier der Einfallswinkel $OCu = COL$ den grössten Werth, unter welchem noch ein Uebergang aus dem einen Medium in das andere Statt finden kann. Wir wollen diesen Grenzwerth des Einfallswinkels $= G$ setzen. OC ist dann der Grenzstrahl. Der Winkel $OCL = \gamma$ ist das Complement von G. Ein Strahl, dessen Einfallswinkel $> G$ ist, wird bereits total reflectirt.

Der Grenzwinkel G ist für das nehmliche Medium natürlich konstant und somit auch sein Complement γ.

Wird daher die obere Trennungsfläche um den Punkt C gedrehet, so dass sie aus ihrer ursprünglichen Lage mn in die neue CB kommt, und mit der anderen ein Prisma bildet, so wird der Werth des Grenzwinkels für diese neue Lage der Trennungsfläche derselbe verbleiben. Ist somit $OJH = \gamma$, so ist jetzt der Strahl OJ ein Grenzstrahl.

Zieht man von O eine Senkrechte OH auf die neue Trennungsfläche CB, so muss der Winkel, den dieser neue Grenzstrahl OJ mit der neuen Senkrechten OH bildet, nehmlich JOH, immer $= G$ sein, (so wie auch vorhin der Winkel COL, den der vorige Grenzstrahl mit der auf mn gefällten Senkrechten OL bildet $= G$ war); denn da der eine Winkel an der Hypotenuse, nehmlich γ, immer denselben Werth beibehält, so muss auch der andere JOH konstant bleiben. Durch Drehung der Trennungsfläche ist das Perpendikel aus der anfänglichen Lage OL in die Lage OH gekommen, es ist also um den Winkel LOH gedrehet worden, welcher gleich ist dem brechenden Winkel p des Prisma.

Der Winkel, den der neue Grenzstrahl JO mit dem vorigen CO macht, ist $= COJ$, und es muss $COJ = LOH = p$ sein, denn indem sich der Winkel COL in den gleich grossen JOH verwandelt, ist diess nicht anders möglich, als dass der Zuwachs LOH auf der rechten Seite gleich ist dem Verluste JOC auf der linken.

Die gebrochenen Strahlen aber, die innerhalb des Winkels COJ liegen, werden alle total reflektirt.

Entspricht nun dem gebrochenen Strahle OJ der einfallende SO, so kann von dem leuchtenden Halbkreise der Theil RS durch das Prisma nicht mehr gesehen werden. Dieser Theil RS kann aber mittelst der Strahlen, welche an der Fläche CJ die totale Reflexion erleiden, gesehen werden, wenn nemlich die dritte, dem brechenden Winkel p zugekehrte Prismenfläche diesen reflektirten Strahlen den Austritt gestattet. Ein Prisma vermindert also die Grösse des Gesichtsfeldes und zwar desto mehr, je grösser p ist.

Vergrössert man nemlich successive den brechenden Winkel p, so werden nach und nach alle gebrochenen Strahlen, von CO angefangen, an die Reihe kommen, Grenzstrahlen zu werden, und wenn endlich auch schon OE zum Grenzstrahl geworden ist, so wird durch ein solches Prisma kein Punkt des leuchtenden Halbkreises mehr gesehen.

In der That ist $p = COL$, so werden bereits alle Strahlen, die innerhalb dieses letzteren Winkels liegen, total reflektirt und es sind somit alle Punkte des Quadranten RN unsichtbar. In diesem Falle fällt der Grenzstrahl OT bereits in die Richtung OL, und OE steht senkrecht auf der Austrittsfläche.

Ist ferner $p = COF = 2G$, so werden bereits alle Strahlen, die von dem leuchtenden Halbkreise in das Prisma eindringen, die totale Reflexion erleiden.

Es ist noch ein Umstand zu besprechen, der ebenfalls einen wesentlichen Unterschied herbeiführt.

Als die beiden Trennungsflächen noch parallel waren, da ist der gebrochene Strahl OF in der Richtung Fx ausgetreten, welche fast parallel ist mit der Trennungsfläche selbst. Nachdem aber diese Trennungsfläche in die Lage CB gedrehet worden ist, wird derselbe Strahl schon bei E austreten. Hier aber ist der Einfallswinkel OEs kleiner als im Punkte F, und somit wird auch der Austrittswinkel rEK kleiner sein als in F.

Es bildet also der austretende Strahl EK mit der Trennungsfläche den Winkel KEB, welcher, wie natürlich, desto grösser ausfallen wird, je grösser der brechende Winkel p des Prisma wird.

Dieser Winkel hat nun die Eigenschaft, dass zu einem Auge, welches sich innerhalb dieses Winkels befindet, kein einziger von den durch die Oeffnung O eindringenden Strahlen gelangen kann. Man kann diesen Winkel einen dunklen nennen. Seinen Nebenwinkel KEC hingegen, innerhalb dessen alle jene Strahlen, die aus dem Prisma überhaupt austreten können, liegen, wird man einen hellen Winkel heissen können.

Der dunkle Winkel ist also immer derjenige, welchen der aus dem Prisma tretende Grenzstrahl mit demjenigen Theile der Austrittsfläche einschliesst, der auf der Seite des brechenden Winkels liegt.

Es sei nun ein Prisma ABC, (Fig. 26), dessen untere Fläche AB jetzt nicht mehr mit dem undurchsichtigen Papiere, worin sich die kleine Oeffnung befand, bedeckt wird. Offenbar kann jetzt jedes Element der Fläche, wie $O, P, R, \ldots$ eine solche kleine Oeffnung vorstellen, durch welche Lichtstrahlen von allen Seiten, wie vorhin von den Punkten des leuchtenden Halbkreises in das Prisma eindringen können.

Nehmen wir an, für das Element O wäre OJ die Richtung des Grenzstrahles; der diesem gebrochenen Strahle entsprechende einfallende wird also fast mit AO zusammenfallen. Der Einfachheit wegen wollen wir ferner auch annehmen, dass OJ die Austrittsfläche CB des Prisma senkrecht trifft, wesshalb dann bei J keine Aenderung in der Richtung mehr Statt findet. Es ist nun klar, dass für alle anderen Elemente der Eintrittsfläche die Grenzstrahlen, wie PK, RL, SM . . . parallel sein müssen zu OJ.

Der dunkle Winkel für das Element O ist $= DJB$; für das Element P ist er $= EKB$ u. s. f.

Befindet sich nun ein Auge an dem Orte z, so liegt es innerhalb all der dunklen Winkel, welche den Elementen von A bis P, oder, welche dem Stücke AP der Eintrittsfläche entsprechen. Dieses Stück AP der Prismenfläche bringt also keinen einzigen der gebrochenen Strahlen ins Auge nach z. Es ist in dieser Beziehung ganz unwirksam und es wirkt nur noch das Stück BP, denn in Betreff der Elemente dieses Stückes befindet sich das Auge in ihren hellen Winkeln, wie CLF, CMG u. s. w.

Da nun aber das Stück AP keine durchgelassenen Strahlen

ins Auge bringt, so verhält es sich gewissermassen, wie die Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers, welche als eine vollkommen ebene, ganz geeignet ist, das durch die dritte Prismenfläche CA eindringende Licht regelmässig zu reflektiren.

Das Stück AP wirkt also wie ein Spiegel. Bewegt sich das Auge von z gegen v, so wird der spiegelnde Theil immer grösser und endlich, wenn es in v angekommen ist, wo es sich auch schon innerhalb des dunklen Winkels des Kanten-Elementes B befindet, spiegelt die ganze Fläche AB.

Denkt man sich die andere Prismenfläche CB als Eintrittsfläche, so wird BN ein Schenkel des dem Kanten-Elemente B entsprechenden dunklen Winkels sein, wo wiederum $BN \perp AB$ ist. Die beiden Schenkel BH und BN schliessen einen Winkel HBN ein, welcher den dunklen Winkel des Prisma selbst vorstellt. Nimmt man nun an, dass in z ein leuchtender Punkt sich befindet, und dass unterhalb der Fläche AB das ihn betrachtende Auge ruhet, so wird, sobald man das Prisma um seine Axe schraubenlinks drehet, der Schenkel BH des dunklen Winkels immer näher an z heranrücken. Der wirksame Theil der Eintrittsfläche CB wird dabei immer kleiner, da die Zahl der Elemente, in deren dunkle Winkel der leuchtende Punkt bereits eingetreten ist, fortwährend zunimmt. Schliesslich, wenn BH durch z gehet, kann der leuchtende Punkt bloss noch durch das Kanten-Element B gesehen werden.

Geschieht aber die Drehung des Prisma umgekehrt, nemlich schraubenrechts, so nähert sich der Schenkel BN dem Auge, das wir unterhalb AB ruhend angenommen haben. Das Auge wird hiebei nach und nach in alle die dunklen Winkel, wie sie den in der Richtung von C gegen B aufeinanderfolgenden Elementen der Eintrittsfläche CB entsprechen, eintreten. Der spiegelnde Theil dieser Eintrittsfläche wird daher immer grösser und schliesslich, wenn BN durch das Auge gehet, wird das Auge den leuchtenden Punkt wieder nur mittelst des Kanten-Elementes B sehen, denn mit Ausnahme von B spiegeln alle anderen Elemente von BC.

Nicht uninteressant sind die Erscheinungen an einem Glaswürfel. Ist $ABCD$ (Fig. 27) ein solcher Würfel und ruhet das Auge oberhalb der Fläche AB in O, so dass es in das Innere des Würfels hineinsieht, so erscheint die Bodenfläche CD gehoben und die Seitenflächen wie AC und BD spiegeln im Innern. Es kann in der That durch die Seitenflächen hindurch kein äusserer Gegenstand, wie p oder q gesehen werden, denn ein von einem

solchen Gegenstande kommender Strahl qr, der in den Würfel eindringt, wird wegen der Grösse des brechenden Winkels B an der Fläche AB total reflektirt. Ein solcher Würfel macht also alle um ihn herumliegenden Gegenstände für das in O befindliche Auge unsichtbar. Alles, was unter der Basis CD liegt, wird sich in den spiegelnden Seitenflächen abbilden. Befindet sich das Auge seitwärts in O', so dass es z. B. bloss die Fläche AC betrachtet, so kann es wiederum nichts sehen, was unter der Basis CD liegt, denn das verhindert der brechende Winkel C. Die Basis selbst aber sieht es. Stellt DH den Grenzstrahl vor, der von dem Punkte D der Basis ausgeht, so wird dieser in der Richtung HO' ins Auge gelangen und es sieht das Auge diesen Punkt D in E, folglich die ganze Basis CD zusammengedrängt auf den Raum CE. Es muss aber CE natürlich spiegeln, weil von den Gegenständen, die darunter liegen, keine Strahlen in das Auge gelangen. Während nun durch den Theil HC der Seitenfläche bloss die Basis des Würfels gesehen wird, vermag das Auge durch den andern Theil AH dieser Fläche auch Gegenstände zu sehen, die jenseits von BD liegen, wie z. B. q.

§. 15. Man kann bezüglich der Ablenkung drei verschiedene Parthien von Strahlen bei einem Prisma unterscheiden.

Es falle von dem leuchtenden Punkte O ein Strahl in der Richtung OA auf die obere Fläche des Prisma (Fig. 28), so zwar, dass er nach der Brechung die Richtung AB annimmt, welche senkrecht stehet auf der unteren Fläche des Prisma, an welcher der Austritt erfolgt. Verlängert man diesen gebrochenen Strahl nach aufwärts, so schneidet er die von O auf die Eintrittsfläche des Prisma senkrecht gezogene OK in dem Punkte E. Wir wollen EK die erste und EB die zweite Normale nennen. Der Strahl OK, welcher die erste Fläche senkrecht trifft, erleidet erst an der zweiten Fläche bei L eine Ablenkung. Jeder der beiden Strahlen OA und OK erleidet also nur eine einmalige Brechung beim Durchgange durch das Prisma und es ist der Winkel KEA, den die beiden Normalen einschliessen, gleich dem brechenden Winkel p des Prisma.

Für den Strahl OA ist der Brechungswinkel $BAy = p$. Wird der diesem Werthe des Brechungswinkels entsprechende Einfallswinkel mit α bezeichnet, so ist die Ablenkung, welche dieser Strahl beim Durchgange durch das Prisma erleidet, $= \alpha - p$.

Für den Strahl OK, der nur an der zweiten Fläche eine Brechung erleidet, ist der Einfallswinkel $KLx = p$ und der diesem Werthe entsprechende Austrittswinkel $= \alpha$, somit die Ablenkung $= \alpha - p$.

Beide diese Strahlen erleiden also gleich grosse Ablenkungen durch das Prisma. Die Strahlenparthie, welche von diesen Normalstrahlen eingeschlossen wird, welche also innerhalb des Winkels KOA liegt, möge die mittlere heissen. Die Strahlen, welche rechts davon, gegen die brechende Kante C liegen, bilden die Kantenparthie und die links davon liegenden, welche zunächst der totalen Reflexion ausgesetzt sind, bilden die offene Parthie.

Betrachten wir nun einen Strahl in der Kantenparthie z. B. OD. Dieser liegt links vom Einfallslothe und der gebrochene Strahl DF, der als einfallender für die zweite Fläche zu betrachten ist, liegt als solcher auch links vom Einfallslothe. In dieser Parthie liegen also die einfallenden Strahlen bezüglich beider Flächen auf der linken Seite ihrer Einfallslothe.

Verlängert man den aus dem Prisma austretenden Strahl Fu bis er den in das Prisma eintretenden in G schneidet, so gibt der Winkel $FGD = z$ die totale Ablenkung, welche der Strahl OD beim Durchgange durch das Prisma erfährt. Diese Ablenkung resultirt aus den Ablenkungen an den beiden Flächen. Die Ablenkung an der ersten Fläche ist $= FDr = m$ und an der zweiten $DFG = n$, somit $z = m - n$. Es ist aber offenbar $m > n$ und es wird daher in dieser Parthie die Ablenkung, welche die Eintrittsfläche bewirkt, vermindert durch jene, welche die Austrittsfläche erzeugt.

Nehmen wir nun einen Strahl OH aus der Mittelparthie. Dieser liegt links vom Einfallslothe, der entsprechende gebrochene HJ, der als einfallender für die zweite Fläche zu betrachten ist, liegt als solcher rechts davon, und es ist $z = m + n$. Die Ablenkungen an beiden Flächen sind übereinstimmend und es wird somit die eine durch die andere vergrössert.

In der offenen Parthie befinden sich die einfallenden Strahlen OM und MN bezüglich beider Flächen auf der nemlichen, hier rechten Seite der Einfallslothe und es ist die resultirende Ablenkung $z = n - m$, wie aus dem Dreiecke SMN erhellet. Hier ist die Ablenkung an der zweiten Fläche grösser als an der ersten, d. h. $n > m$, und es wird wiederum die eine durch die andere vermindert.

Denkt man sich den brechenden Winkel p des Prisma immer grösser werdend z. B. auf die Art, dass die untere Fläche desselben um die Kante C entsprechend gedrehet wird, während die obere Fläche in ihrer Lage beharret, so wird auch der Winkel KEA der beiden Normalen in demselben Masse grösser, denn es wird ja der Schenkel EA dieses Winkels beständig näher rücken müssen an die Kante C des Prisma. In Folge dessen wird die Kantenparthie fortwährend vermindert und sie wird schliesslich ganz beseitigt, wenn die Normale EA durch die Kante C hindurchgeht, oder schon rechts davon liegt. Aber auch die offene Parthie erleidet einen immer grösseren Verlust durch die Vergrösserung des brechenden Winkels, weil immer neue Strahlen der totalen Reflexion anheim fallen. So geschieht es, dass bei einer bestimmten Grösse des brechenden Winkels nur mehr Strahlen der mittleren Parthie durchgelassen werden.

Versetzt man ferner den leuchtenden Punkt in immer grössere Entfernungen vom Prisma, jedoch so, dass er in der ersten Normalen KE verbleibt, so wird auch dadurch der Fusspunkt A der anderen Normalen der Kante C genähert, und somit die Kantenparthie vermindert und zuletzt auch ganz beseitigt. Daher kommt es, dass selbst bei kleinem brechenden Winkel in diesem Falle nur Strahlen der mittleren Parthie durch das Prisma hindurchgehen, vorausgesetzt, dass der leuchtende Punkt hinreichend weit entfernt wurde.

Wird hingegen das Prisma um seine Axe gedrehet, so wird nicht nur die Grösse des Perpendikels OK, also der Abstand des leuchtenden Punktes vom Prisma geändert, sondern es bekommt auch dieses Perpendikel immer andere Lagen. Ist das Prisma von der Art, dass es alle drei Strahlenparthien zulässt, so haben wir in der Drehung ein Mittel, eine Parthie nach der andern verschwinden zu machen und zwar in der einen oder entgegengesetzten Ordnung, jenachdem wir das Prisma schraubenrechts oder schraubenlinks drehen.

§. 16. Das Minimum der Ablenkung.

Findet bloss eine einmalige Brechung der von einem leuchtenden Punkte auf die Trennungsfläche zweier Medien auffallenden Strahlen Statt, so kann selbst in diesem Falle schon von einem Minimum der Ablenkung die Rede sein; denn der senkrecht auf die Trennungsfläche auffallende Strahl erleidet eben dieses Minimum der Ablenkung, welches $=0$ ist, und zu beiden Seiten dieses Strahles wächst die Ablenkung mit der Schiefe der Inzidenz.

Hier soll aber von jenem Minimum der Ablenkung die Rede sein, welches ein durch ein Prisma geleiteter Strahl erfährt.

Es sei demnach OA (Fig. 28) derjenige einfallende Strahl, der bloss an der ersten Fläche eine Brechung erleidet; alsdann ist sein Brechungswinkel $yAB = p$.

Nehmen wir jetzt einen anderen Strahl OD, der in der Kantenparthie liegt, so wird sein Brechungswinkel grösser sein als p; er sei somit $= p + \varrho$.

Würde nun die zweite Fläche parallel sein zur ersten, so würde der Einfallswinkel bei F gleich sein dem Brechungswinkel bei D, also $= p + \varrho$. Da jedoch die zweite Fläche um den Winkel p gedrehet ist, so wird demnach der Einfallswinkel bei F um die Grösse p kleiner sein, als er bei parallelen Flächen wäre. Es ist also der Einfallswinkel bei $F = \varrho$, d. h. der Einfallswinkel an der zweiten Fläche des Prisma beträgt gerade so viel, als die Zunahme des Brechungswinkels an der ersten.

Setzen wir die Ablenkung, welche der Strahl OA in Folge der Brechung an der ersten Fläche bei A erleidet, $= w$, so wird die Ablenkung des Strahles OD in dem Punkte D dieser Fläche grösser sein; setzen wir sie $= w + w'$.

An der zweiten Fläche ist die Ablenkung bei $B = 0$, weil der Strahl AB diese Fläche senkrecht trifft, und bei F wird sie ebenfalls grösser sein als bei B; sie sei daselbst $= 0 + u'$.

Obgleich sich nun der Brechungswinkel an der ersten Fläche und der Einfallswinkel an der zweiten um gleichviel, nemlich um ϱ geändert haben, so ist doch insofern ein Unterschied, als der erstere Winkel von p angefangen, der letztere aber von Null angefangen um ϱ zugenommen hat.

Es muss bemerkt werden, dass der Einfallswinkel an der zweiten Trennungsfläche, beim umgekehrten Gange des Strahles zum Brechungswinkel wird, welche Betrachtung zulässig ist, wenn es sich bloss um die Ablenkung handelt.

Wegen des eben angedeuteten Unterschiedes wird die Zunahme der Ablenkung bei D grösser sein, als die bei F, also $w' > u'$.

Da nun bei den Strahlen der Kanten-Parthie die resultirende Ablenkung gleich ist dem Unterschiede der Ablenkungen an jeder der beiden Flächen, so haben wir dafür den Ausdruck:

$$w + w' - u',$$

und da $w' - u'$ eine positive Grösse ist, so ist jedenfalls $w + (w' - u') > w$, d. h. die Ablenkung, die der Strahl OD durch das Prisma erleidet, ist grösser als jene des Strahles OA.

Nehmen wir jetzt einen Strahl OH, der in der Mittelpartie liegt. Ist z. B. der Brechungswinkel bei $A = 20^0$ (also auch $p = 20^0$), so wird der Brechungswinkel bei $H < 20^0$, etwa $= 15^0$ sein. Bei paralleler Lage der Austritts- und Eintrittsfläche wäre der Einfallswinkel bei J auch $= 15^0$. Da nun aber die Austrittsfläche um 20^0 gedrehet worden, so ist der Einfallswinkel bei $J = 15^0 - 20^0 = -5^0$.

Der Einfallswinkel an der Austrittsfläche hat sich daher auch um so viel geändert, wie der Brechungswinkel an der Eintrittsfläche, der von 20^0 auf 15^0 herabgesunken ist. Das negative Zeichen bedeutet überdiess, dass der einfallende Strahl an der Austrittsfläche nicht mehr links, sondern rechts vom Einfallslothe liegt.

Da die komponirende Ablenkung bei H kleiner sein muss, als bei A, so setzen wir sie $= w - w''$, wo also w'' die Abnahme derselben beim Uebergange von dem Strahle OA zu OH bedeutet. Die komponirende Ablenkung an der Austrittsfläche bei J, die grösser ist, als bei B, wo sie gleich Null war, sei $= u''$.

Nun ist aber die Verminderung der Ablenkung bei H grösser als die Vermehrung derselben bei J, also $w'' > u''$, denn im ersteren Falle ändert sich der Brechungswinkel von 20^0 angefangen, im letzteren Falle aber der Einfallswinkel von 0^0 angefangen.

Da nun die resultirende Ablenkung bei den Strahlen der Mittelpartie gleich der Summe der komponirenden Ablenkungen ist, so haben wir für dieselbe den Ausdruck:

$$w - w'' + u'',$$

und da $-w'' + u''$ eine negative Grösse ist, so ist jedenfalls $w > w - w'' + u''$. Es nimmt also die durch das Prisma bewirkte Ablenkung von A nach links ab.

Wie weit reicht diese Abnahme nach Links?

Zur Beantwortung dieser Frage werden uns folgende Betrachtungen führen.

Gehet man von dem Strahle AB zu links liegenden über, so wird der Brechungswinkel $yAB = p$ successive abnehmen und in

K gleich Null werden; der Einfallswinkel an der Austrittsfläche, der in B gleich Null ist, wird ebenso successive wachsen, bis er in $L=p$ wird. Denkt man sich nun die Abnahme des ersteren und das Wachsen des letzteren stetig, so müssen beide Winkel für einen gewissen Strahl, der in der Mitte der mittleren Parthie liegt, einander gleich werden. Durch diesen Strahl, den wir den mittleren nennen wollen, wird die Mittelparthie selbst wieder in zwei Theile getheilt. Von allen Strahlen, die in dem rechtsliegenden Theile liegen, wird nun im Allgemeinen dasselbe gelten, was von dem Strahle OH gesagt wurde. Da wird stets die Abnahme der Ablenkung an der Eintrittsfläche grösser sein, als die Zunahme der Ablenkung an der Austrittsfläche und somit wird die resultirende durch das Prisma bewirkte Ablenkung desto kleiner werden, je mehr man sich dem mittleren Strahle nähert. In dem links liegenden Theile wird es umgekehrt sein. Hier wird nemlich die Zunahme der Ablenkung an der Austrittsfläche für jeden Strahl grösser sein, als die Abnahme derselben an der Eintrittsfläche, weil jetzt bei jedem Strahle der Einfallswinkel an der Austrittsfläche grösser ist, als der Brechungswinkel an der Eintrittsfläche. Es wird daher die resultirende Ablenkung von dem mittleren Strahle nach links wiederum zunehmen und sie wird daher für den mittleren Strahl selbst ein Minimum sein.

Ist für einen in der offenen Parthie liegenden Strahl OM der Brechungswinkel $= \delta$, so ist der Einfallswinkel an der Austrittsfläche bei N, nemlich $MNx = p + \delta$. Gesetzt der Strahl OM sei bereits so schief, dass man $p + \delta = G$ setzen kann, wo G für den Stoff, woraus das Prisma bestehet, den Grenzwinkel bedeutet, so wird bei diesem Strahle OM die totale Reflexion beginnen. Da nun aber die Summe $p + \delta$ eine konstante Grösse ist, so muss, falls man den brechenden Winkel p vergrössert, δ in demselben Maasse kleiner werden. Setzt man daher $p = G$, so wird $\delta = 0$ und es wird in diesem Falle bereits der normal auffallende Strahl OK die totale Reflexion erleiden. Wird $p > G$ genommen, so wird δ negativ d. h. es erleiden auch schon Strahlen, welche rechts von OK liegen, die totale Reflexion.

Das Ablenkungs-Minimum wächst übrigens mit dem brechenden Winkel p des Prisma.

Es sei (Fig. 29) SA der einfallende Strahl und AB der entsprechende gebrochene; der Brechungswinkel $BAy = \beta$, der Ablenkungswinkel an der Eintrittsfläche $BAJ = m$. An der Austrittsfläche sei der Einfallswinkel $ABx = \gamma$ und der Ablenkungswinkel $ABJ = n$. Der Winkel AHx, den die Einfallslothe bilden, ist

$= p$. Es ist aber AHx als äusserer Winkel des Dreieckes AHB auch $= \beta + \gamma$; folglich ist:

$$p = \beta + \gamma.$$

Die Summe aus dem Brechungswinkel an der ersten und dem Einfallswinkel an der zweiten Fläche ist somit eine konstante Grösse, so lange der brechende Winkel des Prisma konstant verbleibt und sie hängt von dem Brechungs-Exponenten nicht ab. Für die mittlere Parthie ist sowohl β als γ positiv; für die Kantenparthie ist aber $p = \beta - \gamma$ und für die offene $p = -\beta + \gamma$.

Ist nun SA der mittlere Strahl, der das Minimum der Ablenkung erfährt, so hat man $\beta = \gamma$, und in diesem Falle hat der gebrochene Strahl AB innerhalb des Prisma, da er gegen die Seiten desselben gleichgeneigt sein muss, eine Richtung, die sich mit dem brechenden Winkel p nicht ändert, also konstant ist. Wird demnach p z. B. grösser, so bedeutet diess, dass sowohl die Eintrittsfläche AC als auch die Austrittsfläche BC um gleichviel nach entgegengesetzten Richtungen um die Punkte A und B, und zwar hier gegeneinander gedrehet werden, so dass sie in die Lagen AE und BE kommen und den brechenden Winkel AEB bilden. Soll nun unter diesen Umständen die Richtung des gebrochenen Strahles AB konstant verbleiben, so muss auch der einfallende Strahl SA, wie wir bereits wissen, eine der Trennungsfläche AC entgegengesetzte Drehung erleiden; er muss etwa in die Lage $S'A$ gebracht werden; dadurch wird auch die Richtung des austretenden um ebenso viel gedrehet, so dass dieser aus der Lage BT in die Lage BT' kommt. Durch die Drehung der Eintritts- und Austrittsfläche, also durch Vergrösserung von p, werden nur die Winkel β und γ; durch die Drehung des einfallenden und austretenden Strahles wiederum bloss die Winkel m und n geändert und zwar in dem vorausgesetzten Falle vergrössert. Gehet somit der brechende Winkel p in den grösseren AEB über, so gehet m in BAK und n in ABK über und es ist jetzt die resultirende Ablenkung $AKu = BAK + ABK$, also grösser als die frühere, denn diese war $AJN = m + n$.

Setzt man voraus, dass der Stoff, woraus das Prisma bestehet, zu denjenigen gehöre, deren Brechungs-Exponent zwischen 2 und $\sqrt{2}$ liegt, so möge der Einfallswinkel SA_2 (Eintrittswinkel) diejenige Grösse haben, bei welcher $\beta = m$ ist, wo hier unter m der Ablenkungswinkel verstanden wird. Wollen wir nun weiters, dass der einfallende Strahl SA_1 der in Folge seiner Brechung an der Eintrittsfläche, den Weg AB innerhalb des Prisma einschlägt,

das Minimum der Ablenkung erleide, so muss man den brechenden Winkel p sich so gross denken, d. h. die Austrittsfläche BC in einer solchen Lage, dass der gebrochene Strahl AB mit ihr denselben Winkel bilde, wie mit der Eintrittsfläche AC, dass also das Dreieck ABC ein gleichschenkliges sei. Unter diesen Umständen wird auch $\gamma = n$. Und da bei dem Minimum der Ablenkung $\beta = \gamma$ und $m = n$ ist, so sind alle diese vier Winkel unter einander gleich und somit das Viereck $AHBJ$ ein Rhombus. Es stehet demnach der verlängerte einfallende Strahl SM senkrecht auf der Austrittsfläche BC und ebenso steht der austretende Strahl BT senkrecht auf der Eintrittsfläche AC. In diesem speziellen Falle ist die resultirende Ablenkung $AJN = m + n = 2m$ und da $p = \beta + \gamma = 2\beta = 2m$, so hat man auch $AJN = p$.

Aus jedem Stoffe von mittlerem Brechungsvermögen lässt sich daher ein Prisma herstellen, dessen Ablenkung gleich ist seinem brechenden Winkel. Der brechende Winkel, bei dem dieser Fall eintritt, ist aber offenbar gleich dem Exponentialwinkel SAz des Stoffes, denn es stehen ja die Schenkel des einen senkrecht auf jenen des anderen.

§. 17. Konstruktion des aus einem Prisma austretenden Lichtstrahles.

Von dem leuchtenden Punkte O falle ein Strahl OA auf die Prismenfläche mn (Fig. 30); geschieht die Brechung zum Einfallslothe, so sei AB der gebrochene Strahl. Für die Austrittsfläche qn des Prisma spielt der Durchschnittspunkt B (oder das der Eintrittsfläche entsprechende Bild von O) ganz die Rolle des Objektes; verlängert man daher den gebrochenen Strahl AB, bis er die Austrittsfläche in C schneidet, so stellt BC bezüglich dieser letzteren den einfallenden Strahl vor. Zieht man nun von C die zu OA Parallele CD, so hat man:

$$\frac{BA}{OA} = \frac{BC}{CD} = m.$$

Es wird hier vorausgesetzt, dass das Prisma ringsherum von demselben Medium z. B. Luft umgeben sei. Würde man sich nun die Austrittsfläche zuerst in der Lage $rs \parallel mn$ denken, so würde DC nicht nur die Grösse, sondern auch die Richtung des austretenden Strahles angeben. Indem man aber rs durch Drehung um den Punkt C in die Lage qn bringt, so wird dadurch die Grösse BC des einfallenden Strahles nicht geändert, und es wird

also auch der gebrochene seine frühere Grösse $= DC$ beibehalten, wohl aber wird durch eine solche Drehung die Richtung des austretenden Strahles eine Aenderung erfahren. Man bekommt diese Richtung, wenn man von dem Punkte B die $BK \perp qn$ zieht, hierauf mit CD als Halbmesser um C einen Bogen beschreibt, der jene Senkrechte in M schneidet. Verbindet man dann den Durchschnittspunkt M mit dem Austrittspunkte C, so gibt die Linie CM jetzt nicht nur die Grösse, sondern auch die Richtung des austretenden Strahles. Befindet sich in der Richtung dieses letzteren z. B. in F das Auge, so sieht es den leuchtenden Punkt an dem Orte M.

Der Winkel RBA, welchen der gebrochene Strahl AB mit der ersten Normalen BR bildet, ist bekanntlich gleich dem Brechungswinkel β an der ersten Fläche; der Winkel ABK aber, den derselbe gebrochene Strahl mit der anderen Normalen BK bildet, ist gleich dem Einfallswinkel γ an der Austrittsfläche. Da nun $RBK = p$ ist, so ist auch $\beta + \gamma = p$.

Fällt die Richtung des gebrochenen Strahles AB ausserhalb des Winkels RBK z. B. rechts, so wechselt γ das Zeichen, fällt sie links, so wechselt β das Zeichen.

Dass der Winkel $ROA = RDC$ den Einfallswinkel bezüglich der ersten Fläche bedeutet, ist bekannt; ebenso bedeutet der Winkel FMK den Austrittswinkel bezüglich der zweiten Fläche, da er $= FCy$ ist, und der Winkel DCM stellt die durch das Prisma bewirkte Ablenkung vor. So haben alle Elemente des Viereckes $BDCM$ ihre ganz bestimmte Bedeutung.

Denkt man sich den brechenden Winkel p in stetigem Wachsen begriffen, so wird dadurch die Senkrechte BK um den Punkt B schraubenlinks gedrehet und sie wird schliesslich den aus C mit dem Halbmesser CD beschriebenen Kreis tangiren. Das Bild des leuchtenden Punktes, das anfänglich bei paralleler Lage der Flächen in D war, wird also den Kreisbogen zurücklegen, der zwischen D und dem gedachten Berührungspunkte liegt. Letzterer Berührungspunkt fällt natürlich bereits in die Austrittsfläche des Prisma.

Man denke sich jetzt zwei Strahlen OA und OB (Fig. 31), welche gleichweit von der Normalen OR abstehen und von dem leuchtenden Punkte O herkommen. Die ihnen entsprechenden gebrochenen BE und AE werden in dem nemlichen Punkte E die Normale schneiden.

Es sei nun die Austrittsfläche pn in der Art gegen die Ein-

trittsfläche geneigt, dass das von E auf dieselbe gefällte Perpendikel EK ausserhalb des Winkels REA und zwar rechts davon falle.

Bezüglich der Austrittsfläche sind EC und ED die einfallenden Strahlen. Zieht man demnach $DF \parallel BO$ und ist ebenso $CG \parallel AO$; so stellen DF und CG die Grössen der austretenden Strahlen vor. Beschreibt man also mit DF um D einen Bogen, so schneidet er die Senkrechte in N, und wenn man ebenso mit CG um C einen Bogen beschreibt, so schneidet er eben diese Senkrechte in dem höheren Punkte M. Der bei C austretende Strahl lässt also den leuchtenden Punkt an dem Orte M, der bei D austretende an dem Orte N erscheinen.

Schon früher wurde dargelegt, dass die an der ersten Fläche gebrochenen Strahlen in verschiedenen Punkten die verlängerte Normale OR schneiden. Ein unterhalb dieser Fläche und noch innerhalb des brechenden Mediums befindliches Auge würde den leuchtenden Punkt immer an einer solchen Durchschnittsstelle sehen. Diese Durchschnittspunkte sind also als Orte der Bilder zu betrachten und es gibt demnach von dem leuchtenden Punkte O unzählige Bilder, welche alle in der verlängerten Normalen OR liegen. E ist ein solches Bild. Durch die Brechung an der Austrittsfläche wird nun dieses Bild in zwei andere M und N aufgelöst, welche beide, wie schon gesagt wurde, in der nemlichen von E auf die Austrittsfläche gefällten Senkrechten liegen.

Lässt man den brechenden Winkel des Prisma successive wachsen, so bekommt die Senkrechte Lagen, deren Abstand von C und D immer grösser wird; die Folge wird sein, dass sich sowohl das Bild N als auch M immer mehr der Austrittsfläche nähern wird. Kommt N in die letztere zu liegen, so ist der in D austretende Strahl im Begriffe total reflektirt zu werden. Dasselbe Schicksal, nur später, trifft natürlich den in C austretenden Strahl. Der von O auf die erste Fläche fallende Strahl OB gehört offenbar der offenen Parthie und der andere OA der mittleren Parthie an.

Die angestellte Betrachtung bezieht sich natürlich nur auf den Fall, wo eine offene Parthie überhaupt möglich ist, wenn also der brechende Winkel nicht zu gross und auch der Abstand des leuchtenden Punktes vom Prisma nicht zu beträchtlich ist.

Unter dieser Voraussetzung wird es unter den Bildern, welche durch Brechung an der Eintrittsfläche entstehen, und in der Normalen OR liegen (Eintrittsbilder), unzählige geben, von denen

ein jedes in Folge der Brechung an der Austrittsfläche in zwei andere aufgelöst wird (Austrittsbilder). Aber jedes solche Bilderpaar wird natürlich in einer anderen Senkrechten liegen.

Jedes Eintrittsbild ist für die Austrittsfläche als Object zu betrachten, nur mit dem Unterschiede, dass von demselben, nicht wie von dem leuchtenden Punkte selbst, Strahlen radienartig nach allen möglichen Richtungen ausgesendet werden, sondern in wiefern die Betrachtung sich bloss auf eine senkrecht gegen die brechende Kante gelegte Ebene bezieht, sendet ein solches Bild nur einen, oder, wenn auch eine offene Parthie vorhanden ist, zwei Strahlen aus.

Das Eintrittsbild, welches dem normal auffallenden Strahle *OR* entspricht, sendet selbst in dem letzteren Falle nur einen Strahl aus und kann daher auch nur ein Austrittsbild geben. Man fälle nun von dem leuchtenden Punkte *O* (Fig. 32) die Senkrechte *Oz* auf die Eintrittsfläche *mn* des Prisma und verlängere sie nach aufwärts, so liegen in dieser Senkrechten, wie bereits bekannt, alle Eintrittsbilder. Unter diesen Bildern wird eines, nemlich *r* dem leuchtenden Punkte am nächsten liegen. Es entspricht dieses Bild demjenigen auffallenden Strahle, der die Eintrittsfläche *mn* normal trifft, für welchen also der Einfallswinkel $=0$ ist. Die übrigen Eintrittsbilder, wie *s*, *t*, *u* etc. mögen auf der Strecke *ru* liegen. Ist nun *qn* die Austrittsfläche des Prisma, so hat man von jedem Eintrittsbilde eine Senkrechte auf diese Fläche zu ziehen. Es seien demnach *rh*, *si*, *tk* und *ug* solche Perpendikel. Gemäss dem zuvor Gesagten wird nun jedes Eintrittsbild durch die Brechung an der Austrittsfläche in zwei andere Bilder aufgelöst, welche beide in der dem Eintrittsbilde zugehörigen Senkrechten liegen. So wird *s* aufgelöst in die Bilder *b* und *e*; ebenso entsprechen die Austrittsbilder *c* und *f* dem Eintrittsbilde *t* und die Austrittsbilder *d* und *g* sind auf *u* zu beziehen. Nur das Eintrittsbild *r* gibt auch nur ein einziges Austrittsbild *a*.

Die Linie, in welcher die Austrittsbilder liegen, bestehet demnach aus den zwei Aesten *ad* und *ag* und Alles deutet darauf, dass diese Aeste Kurven seien. Der Ast *ag* gehört offenbar der offenen Strahlenparthie an, während der andere *ad* den Strahlen der mittleren und der Kantenparthie seine Entstehung verdankt.

Die auf die Austrittsfläche gefällten Perpendikel bilden in ihrer Gesammtheit das Trapez *ruhg*. Vergrössert man successive den brechenden Winkel *p* des Prisma, so erleidet jedes dieser

Perpendikel eine entsprechende Drehung um denjenigen Punkt, von welchem es gefällt wurde, also z. B. rh um den Punkt r etc. In Folge dessen rücken die Perpendikel immer mehr auseinander und die Höhe hg des Trapezes selbst wird immer grösser. Ist $p = 0$, gehet also das Prisma in ein von parallelen Ebenen begrenztes Medium über, so ist auch $hg = 0$ und es fallen dann alle Perpendikel in die von dem leuchtenden Punkte O gezogene Normale Oz.

Mit der Vergrösserung von p wird zuerst das Austrittsbild g verschwinden, und dann der Reihe nach die höheren Bilder f, e, a etc., indem sie sich immer mehr und mehr der Austrittsfläche nähern.

Hat also das Prisma einen so grossen brechenden Winkel, dass die offene Strahlenparthie wegfällt, so fehlt der Ast ag der Kurve ganz und das Bild a, welches den Scheitel der Kurve bildet, kommt bereits in die Austrittsfläche zu liegen. Bei weiterer Vergrösserung von p wird auch der Ast ad abnehmen und zwar von a angefangen.

Die Höhe hg des Trapezes wird sich übrigens auch ändern z. B. grösser werden müssen, wenn man den leuchtenden Punkt weiter vom Prisma entfernt. In diesem Falle erleiden aber die Perpendikel keine Drehungen um die Punkte, von denen sie gefällt werden, sondern die gedachte Aenderung rührt von dem Umstande her, dass die Eintrittsbilder r, s, t, u unter der gemachten Voraussetzung relativ weiter auseinander rücken.

Da ferner die Eintrittsbilder für gleiche Aenderungen des Einfallswinkels ungleiche relative Abstände haben und da diese Abstände von r gegen u im Allgemeinen wachsen, so wird auch der relative Abstand der Perpendikel von h gegen g im Allgemeinen zunehmen. Die Beschaffenheit der Austrittsbilder-Kurve hängt übrigens auch ab von der Natur des Mediums, in welches die Strahlen aus dem Prisma eintreten. Diess wird aus Folgendem erhellen.

Gesetzt wir haben ein von parallelen Ebenen begrenztes Medium vor uns, so erreicht der Einfallswinkel an der Austrittsfläche seinen Maximumwerth, wenn der Einfallswinkel an der Eintrittsfläche $= 90^0$ ist. Jener Maximumwerth des Einfallswinkels an der Austrittsfläche kann jedoch beliebig erhöhet werden, wenn durch Drehung der letzteren das Medium die Gestalt eines Prisma erhält. Ist das Prisma aus Glas und bezeichnet man den Stoff, welcher die Strahlen von demselben empfängt, allgemein mit T,

so sei n der Brechungs-Exponent für den Uebergang des Lichtes aus dem Glase in diesen Stoff T. Man wird sich im Allgemeinen $n < 1$ und auch variabel denken können, wenn man die Absicht hat T zu wechseln. Der leuchtende Punkt selbst mag sich in der Luft oder in einem anderen von T verschiedenen Stoffe befinden.

Ist nun an der Austrittsfläche des Prisma der Einfallswinkel $= \alpha$ und der Brechungswinkel $= \beta$, so hat man:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \text{ und}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}.$$

Wenn nun der brechende Winkel des Prisma von der Art ist, dass er Werthe von α zulässt, für welche $\sin \alpha > n$ ist, so werden alle jene Strahlen, bei denen diese letztere Bedingung Platz greift, total reflektirt. Wenn aber für alle zulässigen Werthe von α stets $\sin \alpha < n$ verbleibt, so findet keine totale Reflexion Statt. In diesem letzteren Falle wird der Ast *ag* der Kurve ganz unverkürzt verbleiben; er wird auch nicht bis an die Austrittsfläche reichen. Die Divergenz der beiden Aeste *ad* und *ag* wird sich natürlich nach dem Werthe von n richten müssen und sie wird desto geringer, je mehr sich n der Einheit nähert.

Man stelle sich wiederum ein Prisma *mnq* (Fig. 33) z. B. aus Crownglas vor und es sei an der Austrittsfläche *qn* der Brechungs-Exponent $n > 1$; es finde also an dieser Fläche eine Brechung zum Einfallslothe Statt, wie diess der Fall wäre, wenn die Strahlen aus diesem Prisma unmittelbar in ein anderes aus Flintglas eintreten müssten. Alsdann sei O ein leuchtender Punkt; man ziehe in Gedanken die einfallenden Strahlen *oa* und *ob*, die mit der Normalen *oz* gleiche Winkel bilden; die ihnen entsprechenden gebrochenen seien *ae* und *be*, welche beide in dem nemlichen Punkte *e* die Normale treffen, so dass also *e* das entsprechende Eintrittsbild vorstellt. Nun fälle man von diesem Bilde die $ef \perp qn$ und verlängere auch *ae* und *be* nach abwärts, bis *qn* davon in *c* und *d* geschnitten wird. Alsdann sind *ec* und *ed* für die Austrittsfläche als einfallende Strahlen zu betrachten. Da nun hier eine Brechung zum Einfallslothe Statt findet, so wird dem einfallenden Strahle *ce* der gebrochene *cg* entsprechen, welcher das Perpendikel oberhalb des Eintrittsbildes in *g* trifft und ebenso wird *ed* den gebrochenen *dh* geben, welcher dasselbe Perpendikel bekanntlich in einem höheren Punkte *h* schneiden wird. Es sind

nun aber *g* und *h* die Austrittsbilder, in welche sich hier wiederum das Eintrittsbild *e* auflöset. Da dieses nun von jedem anderen Eintrittsbilde gilt, so werden wir in diesem Falle die Kurve *xvy* (Fig. 32) erhalten, welche links von der Normalen *oz* liegt. Der Ast *vy* wird der offenen Strahlenparthie angehören, der andere *vx* den beiden anderen.

Am Schlusse dieses Paragraphen muss ich noch eines Umstandes Erwähnung thun, der auf gewisse Erscheinungen Einfluss haben dürfte.

Die Austrittsbilder-Kurve wird nemlich durch eine Aenderung im Brechungsvermögen, selbst wenn diese gering sein sollte, der Lage und Ausdehnung nach bedeutend modifizirt. Es sei wiederum *O* ein leuchtender Punkt (Fig. 34) und für den einfallenden Strahl *OA* sei *AB* der entsprechende gebrochene. Wird der letztere nach abwärts bis *E* verlängert, so gibt die zu *AO* parallele *ED* die Grösse des austretenden Strahles und wenn man mit *ED* den Bogen *Du* beschreibt, so schneidet dieser die von *B* auf *pl* gefällte Senkrechte *BH* in *u*. Es ist somit *u* das entsprechende Austrittsbild.

Denkt man sich nun das Prisma aus einem stärker brechenden Stoffe bestehend, so sei *AC* der dem einfallenden Strahle *OA* entsprechende gebrochene, welcher nach abwärts verlängert in *F* die Austrittsfläche trifft. Die zu *OA* parallele *FG* wird jetzt wieder die Grösse des austretenden Strahles vorstellen und wenn man damit den Bogen *Gv* beschreibt, wird das von *C* gefällte Perpendikel *CJ* in *v* geschnitten, so dass jetzt *v* das entsprechende Austrittsbild ist.

In Folge der Aenderung des Brechungs-Exponenten, haben sich gleichzeitig drei andere Umstände und zwar, was die Wirkung anbelangt, übereinstimmend geändert. Nemlich:

1°. Das Perpendikel ist aus der Lage *BH* in die Lage *CJ* gekommen;

2°. Der Mittelpunkt des zu beschreibenden Bogens ist von *E* nach *F* verschoben und

3°. Der Halbmesser des zu beschreibenden Bogens selbst ist kleiner geworden, denn die vierseitige Figur *GDEF* ist ein Trapez, worin $GF < DE$.

Alle diese Umstände haben zur Folge, dass die durch das Prisma bewirkte Ablenkung eine sehr bedeutende Vergrösserung

erleidet. In Folge davon wird auch die Austrittsbilder-Kurve eine bedeutende Aenderung erfahren müssen.

§. 18. Construktion gebrochener Strahlen an einer sphärisch gekrümmten Fläche.

Es sei (Fig. 35) die Oberfläche *pq* eines zum Einfallslothe brechenden Mediums sphärisch gekrümmt und ihre konvexe Seite dem leuchtenden Punkte *O* zugekehrt. Man verbinde den leuchtenden Punkt mit dem Centro *c* der Kugelfläche (welche Verbindungslinie die Axe heissen mag) und lege zu dem Punkte *K*, in welchem letztere von der Axe getroffen wird, die tangirende Ebene *mn*.

Ein von *O* kommender Strahl *od* trifft die Kugelfläche in *d*, während er die tangentiell gelegte Ebene in *r* durchschneidet. Um nun den gebrochenen Strahl für den Einfallspunkt *d* zu konstruiren, wollen wir ihn zuerst für den Punkt *r* ausmitteln, wie wenn *mn* die Trennungsfläche wäre. Unter dieser Voraussetzung wird also *or* der einfallende Strahl sein und der diesem entsprechende gebrochene sei *re*.

Für das Element *d* der krummen Fläche, das wir uns zuerst parallel zu *mn* denken wollen, ist *od* der einfallende Strahl und der entsprechende gebrochene *dh* wird natürlich parallel zu *re* sein.

Jetzt wollen wir das Element *d* wiederum zurückdrehen, so dass es mit der zu eben diesem Punkte *d* der krummen Fläche gelegten Tangente *di* zusammenfällt.

Durch diese letztere Drehung wird die Grösse des einfallenden Strahles *od* nicht geändert, also wird auch der gebrochene die Grösse $= dh$ beibehalten; aber seine Richtung wird geändert, denn es ist jetzt die tangirende Ebene *di* als Trennungsfläche zu betrachten. Man muss daher von *o* die $oi \perp di$ fällen, diese Senkrechte nach aufwärts verlängern und mit *dh* als Halbmesser um den Punkt *d* einen Kreisbogen beschreiben, der jene Senkrechte in *f* schneidet. Verbindet man nun *f* mit *d*, so gibt diese Verbindungslinie *fd* nicht nur die Grösse, sondern auch die Richtung des an der Stelle *d* der krummen Fläche gebrochenen Strahles. Verlängert man diesen gebrochenen Strahl *df* nach aufwärts, so schneidet er die Axe in *g*. — Es werden also hier von dem leuchtenden Punkte unzählige Bilder entstehen, von denen jedes in einer anderen Senkrechten liegt. Diese Bilder werden in ihrer Gesammtheit eine trichterartig gekrümmte Fläche

bilden, deren Eigenschaften zu erforschen, nicht uninteressant sein dürfte. Ebenso dürfte es nicht unwichtig sein, die Aenderung des Winkels *ogd*, den der gebrochene Strahl mit der Axe bildet, beim Uebergange von einem Strahle zum anderen kennen zu lernen.

§. 19. Brennweite einer sphärisch gekrümmten Trennungsfläche.

Es sei *rs* (Fig. 36) die sphärisch gekrümmte Trennungsfläche zweier Medien, deren convexe Seite dem leuchtenden Punkte *O* zugekehrt ist und es sei auch $m > 1$. Wird nun der Strahl *OB* in der zur Axe parallelen Richtung *Bz* gebrochen, so ist sein Einfallswinkel $= OBx$ und sein Brechungswinkel $= zBC = b$, da *BC* den Krümmungshalbmesser der Trennungsfläche bedeutet.

Zieht man zu *B* die Tangente *Bu*, fällt dann von *O* die $OK \perp Bu$ und verlängert dieses Perpendikel *OK* nach aufwärts, bis es die ebenfalls nach aufwärts verlängerte Richtung *Bz* des gebrochenen Strahles in *D* schneidet, so stellt *BD* die Grösse des gebrochenen Strahles vor.

Der Winkelabstand des Elementes *B* von der Axe ist $= BCE = \omega$ und da *Bz* parallel zur Axe angenommen wurde, so ist $b = \omega$. Wir haben daher:

$$\frac{\sin OBx}{\sin \omega} = m.$$

Diese Gleichung gibt die Bedingung, unter welcher die gebrochenen Strahlen parallel zur Axe sind. Man kann für ω beliebige Werthe zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = G$ einsetzen, wo *G* den Grenzwinkel für das Medium, in welches die Strahlen eintreten, bedeutet.

Auch ist die vierseitige Figur *ODBC* ein Parallelogramm und somit die Seite *BD* desselben, welche die Grösse des gebrochenen Strahles darstellt, $= OC$, d. h. die Grösse des parallel zur Axe gebrochenen Strahles ist gleich dem Abstande des leuchtenden Punktes vom Krümmungsmittelpunkte.

Betrachten wir nun einen anderen einfallenden Strahl *OF*, welcher der Axe näher liegt, als *OB*, und welcher innerhalb des Mediums die Richtung *Fy* einschlägt. Man wird die entsprechende Grösse des gebrochenen Strahles auf dieselbe Art finden wie vorhin, wenn man von *O* auf die Tangente *Ft* das Perpendikel *OL* fällt, hierauf dieses und auch *Fy* verlängert, bis sie sich in

J schneiden. Es ist dann FJ die Grösse des dem einfallenden Strahle OF entsprechenden gebrochenen. Allein die vierseitige Figur $OJCF$ ist jetzt kein Parallelogramm mehr, sondern ein Trapez; denn da $OF < OB$, so wird auch $FJ < OC$ sein müssen. Die FJ wird also oberhalb der Trennungsfläche die Axe schneiden, und somit nach abwärts verlängert, mit ihr divergiren.

Zieht man ferner auch noch den einfallenden Strahl OH, der weiter von der Axe absteht, als OB, und konstruirt man auch in diesem Falle die vierseitige Figur, so wird sie ebenfalls ein Trapez sein, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt die Seite desselben, welche die Grösse des gebrochenen Strahles darstellt, grösser als OC sein muss, weil ja auch $OH > OB$ ist. Die Richtung des gebrochenen Strahles wird also jetzt unterhalb der Trennungsfläche die Axe schneiden und folglich mit dieser nach abwärts konvergiren.

Ringsherum um die Axe gibt es unzählige einfallende Strahlen, die eine ähnliche Lage haben, wie OB. Alle diese bilden den Mantel eines Kegels, dessen Scheitel O ist, und die zugehörigen gebrochenen werden den Mantel eines Zylinders bilden. Alle gebrochenen Strahlen, die innerhalb dieses zylindrischen Mantels liegen, divergiren nach abwärts mit der Axe und alle, welche ausserhalb desselben liegen, konvergiren nach abwärts mit ihr.

Nehmen wir an, für das Element H sei der Winkelabstand $HCE = G$ und der in H einfallende Strahl OH werde nach Hf gebrochen; drehet man nun diesen einfallenden Strahl OH schraubenrechts um den Einfallspunkt H, bis er in die Lage HM kommt, so wird die Wirkung einer solchen Drehung dieselbe sein, als wenn man den leuchtenden Punkt näher an die Trennungsfläche nach M versetzt hätte, aber alsdann wird auch die Richtung Hf des gebrochenen Strahles schraubenrechts sich drehen und in die Lage Hi kommen, welche letztere Lage wir als parallel zur Axe annehmen wollen. Es ist dann $CHi = HCE = G$ und so muss der Einfallswinkel für den Strahl MH bereits 90^0 betragen, d. h. dieser Strahl berührt die Trennungsfläche in dem Punkte H. Das Element H ist demnach das von der Axe entfernteste, das überhaupt noch einen einfallenden Strahl parallel zu ihr zu brechen vermag. Zieht man von H auf die Axe eine Senkrechte HP und beschreibt mit ihr als Halbmesser einen Kreis um den Punkt P, so umfasst dieser Kreis alle Elemente der krummen Fläche, welche parallel zur Axe gebrochene Strahlen geben können, für welche es also überhaupt eine Brennweite gibt. Aus dem Dreiecke HPC erhält man:

$$HP = HC.\sin HCP$$

oder, da $HC = r$ ist, $HP = r.\sin G$. Nun ist aber

$$\frac{\sin 90^0}{\sin G} = \frac{1}{\sin G} = m,$$

somit:

$$HP = \frac{r}{m}.$$

Nähern wir den leuchtenden Punkt von dem Orte M, wenn auch nur um sehr wenig der Trennungsfläche, so werden schon alle Strahlen, welche von dem leuchtenden Punkte auf die Trennungsfläche fallen, nach erlittener Brechung mit der Axe nach abwärts divergiren. Zugleich muss bemerkt werden, dass alsdann ein von dem leuchtenden Punkte tangentiell zur Trennungsfläche gezogener Strahl, diese nicht mehr in H, sondern in einem der Axe näheren Punkte berühren wird. Das Element H wird somit unwirksam und es werden desto mehr Elemente unwirksam werden, je mehr die Annäherung des leuchtenden Punktes an die Trennungsfläche beträgt.

Als sich der leuchtende Punkt an dem Orte M befand, war H dasjenige Element, dessen gebrochener Strahl parallel zur Axe war. Entfernen wir jetzt den leuchtenden Punkt allmälig über M hinaus von der Trennungsfläche, so werden nach und nach immer näher der Axe liegende Elemente an die Reihe kommen parallel zu ihr gebrochene Strahlen zu liefern und schliesslich, wenn der leuchtende Punkt in N ankommt, wird der Zylinder, dessen Mantel von den zur Axe parallel gebrochenen Strahlen gebildet wird, und dessen Basis Anfangs den Halbmesser $= HP$ hatte, zu einer blossen Linie zusammenschrumpfen. Von da an werden alle Strahlen, welche von dem leuchtenden Punkte auf die Trennungsfläche fallen, nach erlittener Brechung mit der Axe nach abwärts konvergiren.

Nach diesen Betrachtungen wollen wir nun die Formel für die Brennweite aufstellen.

In dem Dreiecke OBD stellt die Seite OB den einfallenden und BD den gebrochenen Strahl vor. Diese zwei Seiten stehen in einem konstanten Verhältnisse; es ist stets $BD = m.BO$. Ihre absoluten Grössen ändern sich aber von einem Elemente der Trennungsfläche zum anderen. Die dritte Seite OD behält unveränderlich ihre Grösse bei, denn sie ist ja gleich dem Halbmesser

BC, wenn die Richtung Bz des gebrochenen Strahles parallel zur Axe angenommen wird.

Wird der Brechungswinkel $BDK = b$ und der Einfallswinkel $BOK = a$ gesetzt, so folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken BDK und BOK:

$$DK = BD.\cos b$$
$$OK = BO.\cos a.$$

Somit:

$$DK - OK = OD = BD.\cos b - BO.\cos a$$
$$OD = BD.\cos b - \frac{BD}{m}.\cos a.$$

Da ferner $BD = OC$ und $OD = BC = r$ ist, so hat man:

$$r = OC.\cos b - \frac{OC}{m}.\cos a.$$

Setzt man $OE = p$, so ist $OC = OE + EC = p + r$, somit schliesslich:

$$\frac{r}{p+r} = \cos . b - \frac{\cos . a}{m}.$$

Durch diese Gleichung wird demnach die Brennweite p bei verschiedenen Einfallswinkeln gegeben.

Da

$$\cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 a}{m^2}} = \frac{\sqrt{m^2 - \sin^2 a}}{m},$$

so hat man auch:

$$\frac{r}{p+r} = \frac{\sqrt{m^2 - \sin^2 a} - \sqrt{1 - \sin^2 a}}{m}.$$

Für $a = 0$ erhält man:

$$\frac{r}{p+r} = \frac{m-1}{m} \text{ und}$$
$$p = \frac{r}{m-1}.$$

Für $a = 90^0$ aber:

$$p = \left(\frac{m}{\sqrt{m^2-1}} - 1\right).r.$$

Diese beiden Werthe der Brennweite sind die Grenzwerthe derselben.

Nun wollen wir auch die Brennweite einer konkaven Fläche bestimmen, an welcher das Licht vom Einfallslothe gebrochen wird. Befand sich im vorhergehenden Falle der leuchtende Punkt in der Luft und war z. B. Wasser das Medium, in welches die Lichtstrahlen eintraten, so wollen wir jetzt das Umgekehrte annehmen; der leuchtende Punkt befinde sich in Wasser und die Strahlen treten aus diesem in die Luft ein. War im ersten Falle der Brechungs-Exponent $= m$, so ist er im zweiten $= \frac{1}{m}$.

Es sei nun wieder rs (Fig. 37) die Trennungsfläche, die mit ihrer hohlen Seite dem leuchtenden Punkte O zugekehrt ist und OB ein einfallender Strahl, der nach seiner Brechung die zur Axe parallele Richtung By annimmt. Ist C der Krümmungsmittelpunkt und zieht man den Radius CB, so ist der Winkel $OBC = a$ und $xBy = b$. Legt man zu dem Einfallspunkte B die Tangente Bu, zieht $OK \perp Bu$ und verlängert die Richtung By des gebrochenen Strahles nach aufwärts, bis das Perpendikel in D geschnitten wird, so ist BD die Grösse des gebrochenen Strahles.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken KOB und KDB folgt, wie vorhin:

$$KO = OB.\cos a$$
$$KD = BD.\cos b$$
$$KO - KD = DO = OB.\cos a - BD.\cos b.$$

Da $OD = BC = r$ und $BD = OC$ ist, so hat man:

$$r = OC(m.\cos a - \cos b)$$

und weil $OC = OE - CE = p' - r$ ist, bekommt man schliesslich:

$$\frac{r}{p' - r} = m.\cos a - \cos b.$$

Man hat ferner

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 b}{m^2}} = \frac{\sqrt{m^2 - \sin^2 b}}{m},$$

somit auch:

$$\frac{r}{p' - r} = \sqrt{m^2 - \sin^2 b} - \sqrt{1 - \sin^2 b}.$$

Für $b = 0$ ist:

$$p' = \frac{mr}{m-1}$$

und für $b = 90^0$:

$$p' = \left(\frac{1}{\sqrt{m^2-1}} + 1\right) r.$$

§. 20. Abstand desjenigen Punktes von der Trennungsfläche, wo die Axe von irgend einem gebrochenen Strahl geschnitten wird.

Auch hier wollen wir dieselben zwei Fälle, wie im vorhergehenden Paragraphen der Betrachtung unterwerfen. Es sei demnach wieder (Fig. 36) die Trennungsfläche *rs*, mit ihrer konvexen Seite dem leuchtenden Punkte *O* zugekehrt und die Brechung geschehe zum Einfallslothe. Der Halbmesser der Trennungsfläche $CE = r$ sei gegeben; ebenso wird die Lage des Einfallspunktes *F* bestimmt sein, wenn man den Centri-Winkel $FCE = \omega$ angibt. Die Entfernung des leuchtenden Punktes von der Trennungsfläche, nemlich OE sei $= \alpha$ und $ER = \beta$. Die letztere Distanz ist die Entfernung des Punktes *R*, wo die Axe von der Richtung des gebrochenen Strahles *FJ* geschnitten wird. Verschiebt man den leuchtenden Punkt längs der Axe, so wird sich zunächst der Einfallswinkel $FOL = a$ ändern, und in Folge dessen auch der Brechungswinkel $FJL = b$. Beide diese Winkel werden desto mehr abnehmen, je mehr sich der leuchtende Punkt entfernt. Es wird dabei die Richtung *FJ* des gebrochenen Strahles um den Punkt *F* sich schraubenlinks drehen. Da nun der Winkel ω als konstant vorausgesetzt wird und $yFC = b$ anfänglich $> \omega$ angenommen wird, so wird allmählig, bei einer gewissen Entfernung des leuchtenden Punktes $b = \omega$ werden und da wird die Richtung des gebrochenen Strahles schon parallel zur Axe sein. Entfernt man den leuchtenden Punkt über diese Grenze hinaus, so wird $b < \omega$ und der gebrochene Strahl schneidet dann die Axe nicht mehr auf jener Seite der Trennungsfläche, wo sich der leuchtende Punkt befindet, sondern auf der entgegengesetzten. Auch muss bemerkt werden, dass das Stück *OJ* des Perpendikels *JL*, das in der Figur noch kleiner als der Halbmesser *FC* erscheint, beständig wächst, wenn die Entfernung des leuchtenden Punktes zunimmt. Es wird also *OJ* allmählig $= FC$ und hierauf sogar $> FC$.

Da in dem Dreiecke RFC die $JO \parallel FC$ ist, so hat man:

$$FC:JO = CR:OR$$
$$FC-JO:CR-OR = FC:CR$$
$$FC-JO:OC = FC:CR$$
$$CR = \frac{OC.FC}{FC-JO}$$
$$\frac{1}{CR} = \frac{1}{OC} - \frac{JO}{OC.FC}$$
$$\frac{1}{OC} - \frac{1}{CR} = \frac{JO}{OC.FC}$$
$$\left(\frac{1}{OC} - \frac{1}{CR}\right).FC = \frac{JO}{OC}.$$

Für JO muss jetzt der Werth auf dieselbe Weise, wie vorhin, ausgemittelt werden. Es ist:

$$JL = FJ.\cos b$$
$$OL = FO.\cos a$$
$$JL - OL = JO = FJ.\cos b - FO.\cos a$$
$$JO = m.FO.\cos b - FO.\cos a$$
$$JO = FO.(m\cos b - \cos a).$$

Aus dem Dreiecke OFC, worin der Winkel OFC mit a supplementär ist, erhält man:

$$FO:OC = \sin\omega:\sin a$$
$$FO = \frac{OC.\sin\omega}{\sin a},$$

somit:

$$JO = OC.\frac{\sin\omega}{\sin a}(m\cos b - \cos a).$$

Da ferner $\sin a = m\sin b$ ist, so erhält man:

$$\frac{JO}{OC} = \frac{\sin\omega}{\sin b}(\cos b - \frac{\cos a}{m}),$$

folglich:

$$\left(\frac{1}{OC} - \frac{1}{CR}\right).FC = \frac{\sin\omega}{\sin b}(\cos b - \frac{\cos a}{m}).$$

Da $OC = \alpha + r$ und $CR = \beta + r$ ist, so hat man schliesslich:

$$\left(\frac{1}{\alpha+r} - \frac{1}{\beta+r}\right).r = \frac{\sin\omega}{\sin b}(\cos b - \frac{\cos a}{m}).$$

Diese Formel stellt die Abhängigkeit zwischen α und β vor. Beim Gebrauche derselben hat man zuerst dem α einen bestimmten Werth zu geben; hierauf handelt es sich darum, welchen einfallenden Strahl man der Betrachtung zu unterziehen gedenkt. Das wird bestimmt durch die Lage des Einfallspunktes F, also durch ω, das somit auch gegeben sein muss. Dadurch wird aber auch α bekannt, denn in dem Dreiecke FOC sind zwei Seiten FC und OC sammt dem eingeschlossenen Winkel ω gegeben, folglich lässt sich der Winkel OFC berechnen, der mit α supplementär ist. Mittelst des Brechungs-Exponenten kann man dann auch b ermitteln. Unter solchen Umständen lässt sich dann β als die einzige Unbekannte durch Auflösung der Gleichung finden.

Die Figur (Fig. 38) ist für den Fall entworfen, wenn die Trennungsfläche rs ihre hohle Seite dem leuchtenden Punkte O zukehrt und die Brechung vom Einfallslothe geschieht. Der Brechungs-Exponent wird $=\frac{1}{m}$ sein, da er in dem unmittelbar vorhergehenden Falle $= m$ gesetzt wurde und der Gang des Lichtes jetzt umgekehrt ist.

Wird nun der einfallende Strahl OF in der Richtung FR gebrochen und fällt man von O die OL senkrecht auf die Tangente Ft, so ist, da CF den Krümmungshalbmesser vorstellt, der Winkel $OFC = FOL = \alpha$ und $zFR = LJF = b$. Da $CF \parallel JO$, so hat man:

$$OJ : CF = OR : CR$$

$$OJ - CF : OC = CF : CR$$

$$CR = \frac{OC \cdot CF}{OJ - CF}$$

$$\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{OC}\right) \cdot FC = \frac{OJ}{OC}$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken OLF und LJF folgt:

$$OL = OF \cdot \cos\alpha$$

$$JL = JF \cdot \cos b$$

$$OL - JL = OJ = OF \cdot \cos\alpha - JF \cdot \cos b$$

$$OJ = OF \cdot \cos\alpha - \frac{OF}{m} \cdot \cos b$$

$$OJ = OF \cdot \left(\cos\alpha - \frac{\cos b}{m}\right).$$

Aus dem Dreiecke OFC, worin der Winkel OCF mit ω supplementär ist, folgt:

$$OF : OC = \sin\omega : \sin a$$

$$OF = OC.\frac{\sin\omega}{\sin a},$$

daher:

$$OJ = OC.\frac{\sin\omega}{\sin a}.(\cos a - \frac{\cos b}{m})$$

und da $\sin a = \frac{\sin b}{m}$, so folgt weiter:

$$\frac{OJ}{OC} = \frac{\sin\omega}{\sin b}(m.\cos a - \cos b).$$

Somit:

$$\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{OC}\right).FC = \frac{\sin\omega}{\sin b}(m.\cos a - \cos b).$$

Da nun $CR = CE + ER = r + \beta'$ und $OC = OE - CE = \alpha' - r$ ist, so bekommt man schliesslich:

$$\left(\frac{1}{\beta' + r} + \frac{1}{\alpha' - r}\right).r = \frac{\sin\omega}{\sin b}.(m.\cos a - \cos b).$$

Setzt man $\omega = b$, so wird sowohl $\beta = \infty$ als auch $\beta' = \infty$ und beide Formeln gehen in die für die Brennweiten erhaltenen über.

§. 21. Ursachen, warum ein Gegenstand durch optische Mittel vergrössert oder verkleinert erscheint.

Es gibt mehrere Umstände, welche einen Gegenstand vergrössert oder verkleinert erscheinen lassen.

1°. Schon ein von parallelen Ebenen mn und pq begrenztes Medium (Fig. 39) muss einen Gegenstand AB, wenn es zum Einfallslothe bricht, vergrössert erscheinen lassen; denn befindet sich das Auge in O, so sieht es vermittelst des Mediums den Gegenstand unter dem Gesichtswinkel $= FOE$; beseitigt man aber das Medium, so ist für dieselbe Lage des Auges der Gesichtswinkel $= AOB$. Nun ist aber der erstere Winkel grösser als der letztere und somit erscheint der Gegenstand durch das Medium vergrössert. Aber diese Vergrösserung wird natürlich nur bei grösserer Dicke des Mediums wahrnehmbar sein. Ist der Brechungs-Exponent $m < 1$, so wird das Medium verkleinern.

2°. Auch schon die einmalige Brechung an einer ebenen Trennungsfläche *mn* (Fig. 40) wirkt verkleinernd oder vergrössernd, je nachdem $m > 1$ oder $m < 1$ ist.

Es sei *A* ein leuchtender Punkt, der auf *mn* die Strahlen *AB*, *AC*, *AD* sendet. Wir wollen annehmen, diese Strahlen kommen aus der Luft und treten in Wasser ein, so dass sie also zum Einfallslothe gebrochen werden. Die gebrochenen Strahlen sind demnach *Bb*, *Cc*, *Dd*.

Würde sich das, innerhalb des Wassers befindliche Auge, queer gegen die Richtungen der gebrochenen Strahlen von *O* nach *x* bewegen, so würde es den leuchtenden Punkt nacheinander in *b*, *c*, *d* sehen. Wir wollen aber das Auge ein- für allemahl in *O* belassen, welcher letztere Punkt in der von $A \perp mn$ gezogenen Geraden liegt, dafür aber den leuchtenden Punkt von *A* nach *K* parallel zur Trennungsfläche bewegen.

Zieht man demnach durch das Auge *O* die $Oe \parallel Bb$, dann von *b* die *be* parallel zur Trennungsfläche, hierauf von ihrem Durchschnittspunkte *e* die *eH*, welche verlängert $\perp mn$ stehet; so wird der leuchtende Punkt, wenn er in *H* ankommt, in der Richtung *Oe* in *e* gesehen, denn es ist unter diesen Umständen das Dreieck $HEe \cong ABb$, indem $Ee = Bb$, $He = Ab$ und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind; es ist somit $HE = AB$ und da diese Linien auch parallel sind, so wird *HE* denjenigen einfallenden Strahl sowohl der Richtung als Grösse nach vorstellen, welcher dem gebrochenen *Ee* entspricht.

Zieht man ebenso durch *O* die $Of \parallel Cc$ und die $cf \parallel mn$, und konstruirt wie vorhin das Dreieck *FJf*, so wird, sobald der leuchtende Punkt in *J* ankommt, der einfallende Strahl *JF* derjenige sein, der nach erlittener Brechung die Richtung *FO* zum Auge einschlägt; es wird also der leuchtende Punkt jetzt in der Verlängerung von *OF* in *f* gesehen.

Kommt ebenso der leuchtende Punkt in *K* an, so wird er in der Verlängerung von *OG* in *g* gesehen, indem wiederum $Og \parallel Dd$ ist. Ganz dieselbe Betrachtung findet Statt, wenn man sich den leuchtenden Punkt nicht in Bewegung, sondern die ganze Strecke von *A* bis *K* von lauter leuchtenden Punkten ausgefüllt denkt, wenn man also eine leuchtende Linie betrachtet.

Stellt man sich das Auge nur als Punkt vor, so wird jeder einzelne Punkt dieser leuchtenden Linie nur mittelst eines einzigen Strahles gesehen und zwar der Punkt *H* nur mittelst des Strahles

HE, der Punkt *J* nur mittelst des Strahles *JF* und *K* nur mittelst *KG*.

Indem nun die einfallenden Strahlen *HE*, *JF* u. s. w. zum Auge *O* gebrochen werden, sieht dieses letztere die leuchtende Linie *AK* unter dem Gesichtswinkel *dOg*; würde keine Brechung Platz haben, so würde es dieselbe Linie unter dem grösseren Gesichtswinkel *AOK* sehen. Die Brechung zum Einfallslothe wirkt also verkleinernd. Es lässt sich ebenso zeigen, dass die Brechung vom Einfallslothe vergrössernd wirke.

Auch ist zu bemerken, dass *befg* eine krumme, mit ihrer konvexen Seite dem Auge zugekehrte Linie vorstellt, wenn *AK*, wie angenommen wurde, eine gerade Linie ist.

Da aber das Auge kein blosser Punkt ist, sondern da die Pupille sehr viele Strahlen aufzunehmen vermag, so wird von jedem Punkte, wie *H*, *J*, *K* u. s. w. ein Strahlenkegel in das Auge gelangen, nur mit dem Unterschiede, dass die Strahlen eines solchen Kegels, wie diess bereits bekannt ist, nach erlittener Brechung sich nicht wieder in einem einzigen Punkte schneiden.

3°. Auch die Krümmung der Trennungsfläche hat einen Einfluss auf den Gesichtswinkel, unter welchem man einen Gegenstand sieht und es wird daher auch aus diesem Grunde der Gegenstand vergrössert oder verkleinert erscheinen können.

Man denke sich die Trennungsfläche *mn* (Fig. 41) zuerst eben, und es werde ein Strahl *BK*, der von dem Punkte *B* der zur Trennungsfläche parallelen, leuchtenden Linie *AB* ausgehet, in dem Punkte *K* der Trennungsfläche zum Einfallslothe gebrochen, so dass er die Richtung *KO* einschlägt. Das in *O* unter Wasser befindliche Auge sieht den leuchtenden Punkt in der Verlängerung von *OK* in *D*, welcher letztere Punkt bekanntlich in der verlängerten *BE* liegt, die man von dem leuchtenden Punkte $\perp mn$ zieht.

Wird jetzt das Element *K* gedrehet, so dass es die Richtung *pq* erhält, so wird es einen Theil einer krummen, in Beziehung auf die leuchtende Linie *AB* konkaven, in Bezug auf das Auge aber konvexen Trennungsfläche vorstellen. Verharrt das Auge in seiner anfänglichen Lage, in *O*, so wird auch der gebrochene Strahl seine frühere Richtung *OD* beibehalten müssen, denn das Element *K* vermag ja nur längs der Geraden *KO* seine Eindrücke dem Auge zu übermitteln. Der einfallende Strahl wird aber jetzt eine andere Richtung haben. Man findet sie, wenn man von dem Endpunkte *D* des gebrochenen Strahles die $DF \perp pq$ ziehet,

hierauf mit BK als Halbmesser um K einen Bogen beschreibt, der jene Senkrechte in H schneidet. Es ist nun HK die Richtung, welche der einfallende Strahl haben muss, wenn der gebrochene die anfängliche Richtung KO beibehalten soll. Verlängert man KH nach aufwärts, bis dadurch die leuchtende Linie in L geschnitten wird, so wird es natürlich dieser Punkt L der leuchtenden Linie sein, der jetzt in der Richtung OK gesehen wird.

Es wurde vorausgesetzt, dass die Brechung zum Einfallsloth geschieht, dass also die Strahlen aus der Luft etwa in Wasser eintreten, und dass sich somit das Auge innerhalb des letzteren befindet. In diesem Fall wirkt schon die ebene Trennungsfläche, wie zuvor gezeigt wurde, verkleinernd. In unserer gegenwärtigen Figur erscheint die Lichtlinie AB mittelst der gebrochenen Strahlen bei ebener Trennungsfläche unter dem Gesichtswinkel $= COD$; ohne Brechung, also mittelst direkter Strahlen würde sie aber unter dem grösseren Winkel $= AOB$ gesehen werden. Die konkave Fläche (konkav bezüglich der leuchtenden Linie) verkleinert nun aber noch mehr, als die ebene, denn es wird jetzt die weit grössere Licht-Linie AL mittelst des gebrochenen Lichtes unter demselben Gesichtswinkel $= COD$ gesehen, wie vorhin die kleinere AB.

Denkt man sich jetzt, indem man wieder von der ebenen Trennungsfläche ausgehet, das Element K schraubenrechts gedrehet, so dass es einen immer grösseren Winkel mit der letzteren bildet, so wird es einer krummen, gegen die leuchtende Linie konvexen Fläche angehören, deren Krümmungshalbmesser desto kleiner wird, je mehr obige Drehung beträgt. Dabei wird auch das Einfallsloth Kx, welches wir in dem Punkte K in Bezug auf die ebene Trennungsfläche errichten, schraubenrechts gedrehet werden, so dass es sich immer mehr und mehr dem gebrochenen Strahle KD, dessen Richtung konstant verbleibt, nähern wird. Die Richtung des einfallenden Strahles BK wird sich aber unter diesen Umständen schraubenlinks drehen und somit ebenfalls dem gebrochenen Strahle DK immer mehr nähern müssen. Wenn endlich die Richtung des Elementes $K \perp KO$ zu stehen kommt, so fällt schon die Richtung des einfallenden Strahles mit jener des gebrochenen KD zusammen und es befindet sich jetzt das Auge O im Krümmungs-Mittelpunkte selbst, und der Krümmungshalbmesser hat die Grösse $= KO$. Setzen wir ihn im Allgemeinen $= r$, so wird, angefangen von $r = \infty$ bis $r = OK$, der Endpunkt B des einfallenden Strahles den Bogen BM beschreiben,

und indem sich B immer mehr dem M nähert, wird der Winkel BOA immer kleiner. Das ist aber der Gesichtswinkel bei direkter Betrachtung der leuchtenden Linie und da er immer kleiner wird, während der andere Gesichtswinkel COD im gebrochenen Lichte unverändert verbleibt, so folgt, dass von $r = \infty$ bis $r = OK$ die konvexe Trennungsfläche (konvex bezüglich der leuchtenden Linie) ebenfalls noch verkleinern wird, aber immer weniger, bis endlich, wenn $r = OK$ ist, d. h. wenn sich das Auge im Krümmungs-Mittelpunkte befindet, die leuchtende Linie im gebrochenen Lichte ebenso gross erscheint, wie im direkten.

Wird von da an das Element K noch weiter schraubenrechts gedrehet, z. B. in die Richtung rs, so gehet das in K errichtete Einfallsloth schon auf die rechte Seite des gebrochenen Strahles KD über und der einfallende Strahl auf die linke. Zieht man von D die $DG \perp rs$, so schneidet diese den mit BK beschriebenen Bogen in J und es stellt jetzt JK den einfallenden Strahl vor, der in der Richtung KO gebrochen wird. Handelt es sich bloss um die Richtung, so ist es gleichgiltig, ob der einfallende Strahl von dem Punkte J oder U ausgehet, welcher letzterer der leuchtenden Linie angehört, denn jeder dieser Punkte wird von dem Auge in derselben Richtung OD gesehen.

Jetzt aber findet eine Vergrösserung Statt, denn es wird jetzt das Stück AU der leuchtenden Linie im gebrochenen Lichte unter dem Winkel $= COD$ gesehen, welcher grösser ist, als der Winkel AOU, unter dem es im direkten Lichte erscheint.

Wir wollen nun das Resultat kurz zusammenfassen. Befindet sich unter dem Wasserspiegel, den wir uns vorerst als eine ebene Fläche denken, ein beobachtendes Auge, das nach einem über demselben schwebenden Gegenstande hinsieht, so sieht es diesen verkleinert, und diese Verkleinerung nimmt zu, wenn die Oberfläche des Wassers konkav wird in Bezug auf den Gegenstand. Wird sie konvex, so verkleinert sie auch noch, aber nur so lange, als sich das Auge zwischen der Trennungsfläche und dem Krümmungsmittelpunkte befindet. Ist die Entfernung des Auges grösser als der Krümmungshalbmesser, so wirkt sie vergrössernd.

Wir wollen nun auch den Fall betrachten, wenn die Strahlen vom Einfallslothe gebrochen werden, wenn sie also z. B. von einem in Wasser getauchten Gegenstande herkommen und in Luft austreten.

Es sei demnach AB (Fig. 42) eine leuchtende, im Wasser liegende Linie. Von dem Punkte B derselben falle der Strahl

BK auf die Trennungsfläche mn, die wir uns vorerst als Ebene denken wollen. Hier wird er in der Richtung KO austreten, und so in das an dem Orte O ruhende Auge gelangen. Zieht man nun von B die $BE \perp mn$, so wird diese Senkrechte von der verlängerten OK in D geschnitten. Es ist demnach KD die Grösse des gebrochenen Strahles bei ebener Trennungsfläche und es erscheint somit der leuchtende Punkt B an dem Orte D. Da im direkten Lichte die leuchtende Linie AB unter dem Gesichtswinkel $= AOB$, hingegen im gebrochenen unter dem Winkel $= AOD$ erscheint, so ist die Vergrösserung $= \frac{AOD}{AOB}$.

Drehet man nun das Element K in die Richtung pq, so wird es einer krummen, gegen die leuchtende Linie konkaven Trennungsfläche angehören. Da die Richtung OD des gebrochenen Strahles konstant zu denken ist, so wird man für diese Richtung pq des Elementes K den einfallenden Strahl finden, wenn man von D die $DG \perp pq$ zieht und sie nach aufwärts verlängert, hierauf mit BK um K einen Bogen beschreibt, der jene Senkrechte in J schneidet. Es ist alsdann JK der entsprechende einfallende Strahl, der die AB in U schneidet.

Da nun das Stück AU der leuchtenden Linie im direkten Lichte unter dem Gesichtswinkel $= AOU$ erscheint, während es im gebrochenen unter dem Winkel $= AOD$ wahrgenommen wird, so ist jetzt die Vergrösserung $= \frac{AOD}{AOU}$. Es vergrössert daher die konkave Trennungsfläche mehr, als die ebene.

Bemerkt muss werden, dass in dem vorliegenden Falle, sowohl das in K errichtete Einfallsloth, als auch der einfallende Strahl BK auf der nemlichen, hier linken Seite, des gebrochenen KD liegen, und dass, wenn man das Element K schraubenlinks drehet, wie das eben geschehen ist, beide in demselben Sinne, und zwar ebenfalls schraubenlinks sich drehen.

Drehet man wiederum, ausgehend von der ebenen Trennungsfläche, das Element K schraubenrechts, so wird es einer gegen die leuchtende Linie konvexen Fläche angehören. Eine solche Fläche wird auch noch vergrössern, aber desto weniger, je näher der einfallende Strahl an den gebrochenen KD zu liegen kommt, also je kleiner der Winkel BKD wird. Ist dieser Winkel $= 0$, steht also die Richtung des Elementes senkrecht auf OD, so findet weder Vergrösserung noch Verkleinerung Statt. Wird das Element noch weiter in die Richtung rs gedrehet, so fälle man

wieder $DF \perp rs$ und verlängere diese Senkrechte, bis sie den mit BK beschriebenen Bogen in H schneidet. Es ist alsdann HK die Lage des einfallenden Strahles, der bereits auf die rechte Seite des gebrochenen übergegangen ist. Von nun an wird die konvexe Trennungsfläche verkleinern; denn der Gesichtswinkel im direkten Lichte ist jetzt $= LOA$, während er im gebrochenen kleiner ist, nemlich $= DOA$.

Für den eben betrachteten Fall lässt sich sehr leicht ein Experiment herstellen. Man nehme ein Glasgefäss, lege auf dessen Boden ein Drahtstück und fülle es mit Wasser an. Hierauf tauche man in dasselbe ein etwas grösseres Uhrglas und hebe dieses, während seine konvexe Fläche nach oben gekehrt ist, etwas über den Wasserspiegel, so zwar, dass sein Rand noch in Wasser taucht. Auf diese Weise erhält das mitgehobene Wasser eine, in Bezug auf das Drahtstück konkave Oberfläche und man wird finden, dass eine solche Trennungsfläche die Vergrösserung, welche die ebene Fläche bewirkt, noch vermehrt und zwar desto mehr, je stärker die Krümmung ist. Wenn man aber mit dem Uhrglase, dessen konvexe Seite jetzt nach abwärts gehalten wird, die Oberfläche des Wassers eindrückt, so gestaltet sich diese nach oben konkav, in Bezug auf den Draht aber konvex, und man wird finden, dass wenn die Entfernung des Auges kleiner ist, als der Krümmungshalbmesser, eine solche Oberfläche auch noch vergrössert, aber desto weniger, je mehr sich das Auge dem Krümmungsmittelpunkte nähert. Wird das Auge über den Krümmungsmittelpunkt hinaus entfernt, so tritt eine Verkleinerung des Gegenstandes ein.

XI.

Applications nouvelles des déterminants à l'algèbre et à la géométrie,

par

Monsieur *J. Versluys*,
Professeur de Mathématiques à Groningue (Pays-Bas).

En étudiant les propriétés des surfaces du second degré au moyen des coordonnées quadriplanaires et des coordonnées planaires, j'avais besoin de caractères généraux pour distinguer les divers genres de surfaces que l'équation générale du second degré peut représenter. Je commençais par discuter les courbes du second degré rapportées à des coordonnées trilinéaires. Faisant usage, à cet effet, de ce que les Anglais ont appelé modern higher algebra, je trouvais quelques propriétés qui n'ont pas encore été remarquées et dont la plus intéressante se rapporte à la signification géométrique du discriminant de l'équation du second degré en coordonnées quadriplanaires, dans le cas où le discriminant n'est pas nul. On trouvera les résultats de mes recherches dans ce mémoire, dans lequel je me suis proposé une discussion complète de l'équation générale du second degré en coordonnées trilineaires et en coordonnées quadriplanaires.

Une fois pour toutes je fais l'observation, que les équations dont je traiterai sont homogènes, et qu'en parlant d'un système de valeurs qui vérifient un système d'équations, je suppose que ces valeurs ne sont pas toutes zéro.

Propriétés algébriques.

§. 1.

Pour que les deux racines de $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ soient égales, il faut qu'il existe une relation entre les coefficients de cette équation. Cette relation est $ab - h^2 = 0$, ou le déterminant qui, égalé à zéro, exprime, qu'on peut satisfaire par la même valeur de $x:y$ aux équations qui résultent de la différentiation de l'équation proposée par rapport à x et à y. Ces équations sont

$$ax + hy = 0, \quad hx + by = 0;$$

et le déterminant est

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = 0.$$

Quand ce déterminant (le discriminant de l'équation du second degré) est négatif, les racines sont réelles; quand ce déterminant est positif, les racines sont imaginaires.

§. 2.

Déterminons la même chose à l'égard des deux systèmes de valeurs qui satisfont aux équations

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$
$$px + qy + rz = 0.$$

A cet effet on pourrait, au moyen de l'équation linéaire, exprimer z en fonction de x et de y et substituer cette valeur dans l'équation du second degré. Après la substitution celle-ci contient deux variables, et la question est réduite à celle du §. 1. Ces opérations sont très-simples, mais on obtient le résultat sous une forme irrégulière, et c'est pourquoi l'on doit préférer le développement suivant.

Au lieu d'éliminer z et de différentier ensuite par rapport à x et à y, on peut différentier immédiatement par rapport à x et à y, en considérant z comme fonction de x et de y.

On obtient

$$2ax + 2hy + 2gz + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z} = 0,$$

ou

$$ax + hy + gz + \frac{p}{r}\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0.$$

De même

$$hx + by + fz + \frac{q}{r}\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0.$$

Pour que les deux systèmes de racines soient égaux, il faut que les mêmes valeurs de x et de y satisfassent aux deux équations précédentes, quand on remplace $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$ par $gx + fy + cz$ et on substitue ensuite à z sa valeur tirée de $px + qy + rz = 0$.

Ou ce qui revient au même: pour que les deux systèmes de racines soient égaux, il faut qu'un même système de valeurs de

$$x, \quad y, \quad z, \quad -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}$$

puisse satisfaire aux équations

$$ax+hy+gz+\frac{p}{r}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

$$hx+by+fz+\frac{q}{r}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

$$gx+fy+cz+\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

$$px+qy+rz=0.$$

Et pour que cela soit possible, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \frac{p}{r} \\ h & b & f & \frac{q}{r} \\ g & f & c & 1 \\ p & q & r & \end{vmatrix}=0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & \end{vmatrix}=0.$$

Ainsi l'on obtient sous la forme d'un déterminant symmétrique la fonction que l'on aurait obtenue sous une forme moins simple, en opérant comme il est indiqué au commencement de ce paragraphe.

Pour voir quel signe annonce des racines imaginaires, prenons le cas particulier où les quantités a, b et c sont positives et $p=q=0$. Le premier membre de l'équation du second degré se réduit alors à la somme de trois carrés, d'où résulte qu'il ne saurait s'annuler pour des valeurs réelles de x, y et z. Les racines sont donc imaginaires, et le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & r \\ 0 & 0 & r & \end{vmatrix}=-abr^2;$$

en sorte que des racines imaginaires sont indiquées par le signe moins.

Le résultat de ce qui est dit dans ce paragraphe est:

Les deux systèmes de valeurs qui satisfont aux équations

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$
$$px + qy + rz = 0,$$

sont réels et égaux, réels et distincts, ou imaginaires, selon que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & \end{vmatrix}$$

est zéro, positif ou négatif.

§. 3.

Déterminons la fonction qui annonce, si les deux systèmes de valeurs qui satisfont aux équations

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy + 2pxw + 2qyw + 2rzw = 0,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0,$$
$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 w = 0,$$

sont réels et égaux, réels et distincts, ou imaginaires.

La fonction susdite peut être trouvée en éliminant z et w, et en formant le discriminant de l'équation qui résulte de cette élimination. On obtient la fonction cherchée sous une forme plus simple, en appliquant des raisonnements un peu différents de ceux du paragraphe précédent. On parvient alors à la résultante des équations

$$ax + ny + mz + pw - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$nx + by + lz + qw - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$mx + ly + cz + rw - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$px + qy + rz + dw - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial w} = 0,$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0,$$

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 w = 0.$$

Dans ces équations les variables sont

$$x,\quad y,\quad z,\quad w,\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial w}.$$

Les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ s'obtiennent en différentiant les deux équations linéaires données. Après quelques réductions la résultante du système précédent vient sous la forme

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & \alpha & \alpha_1 \\ n & b & l & q & \beta & \beta_1 \\ m & l & c & r & \gamma & \gamma_1 \\ p & q & r & d & \delta & \delta_1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & & \end{vmatrix}$$

Quand ce déterminant est nul, les deux systèmes de racines sont égaux. Pour voir quel signe se rapporte aux racines imaginaires, supposons les quantités a, b, c, d positives, $l = m = n = p = q = r = \alpha = \beta = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$. Alors le premier membre de l'équation du second degré, consistant en la somme de quatre carrés, ne saurait s'annuler pour des valeurs réelles des variables; en sorte que les racines sont imaginaires. Le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & \delta & \delta_1 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta & & \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & & \end{vmatrix} = +\delta_1^2\gamma^2 ab.$$

Le signe plus s'accorde donc avec les racines imaginaires; le signe moins avec les racines réelles et distinctes.

Je reviendrai plus tard sur la propriété de ce paragraphe-ci.

§. 4.

En poursuivant les raisonnements précédents on trouve en général:

Étant données une équation du second degré et n équations linéaires, on peut écrire sous la forme d'un déterminant la fonction des coefficients qui doit s'annuler, pour que les deux systèmes de racines soient égaux; quand ce déterminant n'est pas zéro, son signe indique, si les racines sont réelles ou imaginaires. Le

signe plus exprime que les racines sont imaginaires, dans le cas d'un nombre pair d'équations linéaires, et réelles dans le cas d'un nombre impair d'équations linéaires. Le nombre des variables est $n+1$.

Propriétés géométriques.

§. 5.

Que l'équation générale du second degré en coordonnées trilinéaires soit

$$a\alpha^2+2h\alpha\beta+2g\gamma\alpha+b\beta^2+2f\beta\gamma+c\gamma^2=0;$$

que l'équation d'une droite soit

$$p\alpha+q\beta+r\gamma=0.$$

De la propriété enoncée à la fin du §. 2. s'ensuit immédiatement, que les deux points d'intersection de la droite et de la courbe coïncident, quand le déterminant

$$Q=\begin{vmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & \end{vmatrix}$$

est égal à nul; que les points d'intersection sont réels et distincts, quand Q est positif; et que ces points sont imaginaires quand Q est négatif.

Si A, B et C sont proportionels aux côtés du triangle de référence,

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=0$$

est l'équation de la droite située à distance infinie. Je désignerai cette droite par η. Le déterminant qui nous apprend, si les points d'intersection de η et de la courbe du second degré sont coïncidents, réels et distincts, ou imaginaires, est

$$P=\begin{vmatrix} a & h & g & A \\ h & b & f & B \\ g & f & c & C \\ A & B & C & \end{vmatrix}$$

§. 6.

La conique représentée par l'équation générale du second degré a un point double, si

$$H = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant est appelé le discriminant ou l'hessien de l'équation du second degré.

Quand $H = 0$, les trois binômes

$$ab - h^2, \quad bc - f^2, \quad ca - g^2$$

ont le même signe, et Q a le signe contraire de ces binômes. (Salmon, Modern higher algebra, 36; Baltzer, Determinanten §. 6, 4).

Donc quand $H = 0$, et l'un des binômes négatif, les points d'intersection de

$$a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + 2g\alpha\gamma + b\beta^2 + 2f\beta\gamma + c\gamma^2 = 0,$$

et de

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$$

sont réels pour toutes les valeurs de p, q, r. Ces points d'intersection sont imaginaires quand $H = 0$ et l'un des binômes positif. (P étant différent de zéro).

Coordonnées trilinéaires.

§. 7.

Dans la discussion suivante je ferai un usage continuel de H, de P et des binômes du paragraphe précédent.

L'équation générale du second degré peut représenter:

1. Une hyperbole.
2. Une parabole.
3. Une ellipse.
4. Un lieu imaginaire.
5. Deux droites qui se coupent.
6. Un point à distance finie.
7. Deux droites parallèles.
8. Un point à distance infinie.
9. Deux droites coïncidentes.

Remarque. Comme exemple de 6. on a

$$(p\alpha+q\beta+r\gamma)^2+(p_1\alpha+q_1\beta+r_1\gamma)^2=0,$$

quand les deux droites

$$p\alpha+q\beta+r\gamma=0, \text{ et}$$
$$p_1\alpha+q_1\beta+r_1\gamma=0$$

ne sont pas parallèles. Quand ces droites sont parallèles, on a un exemple du huitième cas.

§. 8.

Caractères de ces cas

1. Le lieu n'a pas de point double et il est rencontré par η en deux points réels et distincts. On doit donc avoir

$$H\lessgtr 0, \quad P>0.$$

2. Le lieu n'a pas de point double, et il est rencontré par η en deux points coïncidents. On a donc

$$H\lessgtr 0 \text{ et } P=0.$$

3. et 4. Le lieu n'a pas de point double, et il est rencontré par η en deux points imaginaires; dans ces deux cas on a donc

$$H\lessgtr 0 \text{ et } P<0.$$

Pour discerner l'ellipse d'avec un lieu imaginaire, remarquons en premier lieu, que, dans les deux cas, l'équation générale du second degré peut, par une substitution réelle et linéaire, être réduite à la forme

$$a_1\alpha^2+b_1\beta^2+c_1\gamma^2=0.$$

Quand le lieu est imaginaire, les trois carrés sont tous positifs ou tous négatifs; quand le lieu et une ellipse, les trois carrés n'ont pas le même signe. Or d'après Baltzer §. 14, 12 le nombre des carrés négatifs est égal au nombre des variations de signe de la série

$$1, \quad a, \quad ab-h^2, \quad H.$$

Quand la quantité $ab-h^2$ est positive, tandis que a et H

sont négatifs, il y a trois variations de signe et par conséquent trois carrés négatifs. Le lieu est alors imaginaire.

Quand les quantités $ab-h^2$, a et H sont positives, il n'y a aucun carré négatif. Le lieu est encore imaginaire alors.

Dans les autres suppositions que l'on peut faire à l'égard des signes de a, $ab-h^2$ et H, on a un ou deux carrés négatifs. On a donc pour un lieu imaginaire $ab-h^2$ positif, $\frac{H}{a}$ positif; pour une ellipse ces conditions ne sont pas remplies toutes les deux.

Remarque. Si a ou $ab-h^2$ fût négatif, on les remplacerait par a et $bc-f^2$, ou par c et $ca-g^2$.

5. Le lieu a un point double, et il est rencontré par η en deux points réels et distincts. Par conséquent on doit avoir

$$H=0, \quad P>0.$$

6. Le lieu a un point double, et il est rencontré par η en deux points imaginaires. On a donc

$$H=0, \quad P<0.$$

7. et 8. Le lieu a un point double, et il est rencontré par η en deux points coïncidents. On a donc dans les deux cas

$$H=0, \quad P=0.$$

Quand le lieu se compose de deux droites parallèles, les points d'intersection du lieu et d'une droite quelconque sont réels. D'après le §. 6. on aura dans ce cas un des binômes négatif.

Quand le lieu se réduit à un seul point, alors les points d'intersection du lieu et d'une droite quelconque seront imaginaires en général. On aura dans ce cas un des binômes positif.

9. En remarquant que l'équation du second degré doit être un carré parfait, par rapport aux variables, on a immédiatement:

$$ab-h^2=bc-g^2=ca-f^2=0.$$

§. 9.

Il y a donc des relations analytiques qui doivent exister dans les divers cas. Ces relations sont différentes pour les divers cas et telles, que les relations qui doivent exister dans deux de ces

cas, ne peuvent pas exister en même temps. On peut donc réciproquement de l'existence des relations conclure à la figure du lieu.

En résumant

$H \gtrless 0,\ P>0$ annonce une hyperbole;

$H \lessgtr 0,\ P=0$ une parabole;

$ab-h^2$ et $\frac{H}{a}$ tous les deux négatifs ou l'un des deux négatif, $P<0$ une ellipse;

$ab-h^2>0,\ \frac{H}{a}>0,\ P<0$ un lieu imaginaire;

$H=0,\ P>0$ deux droites qui se coupent;

$H=0,\ P<0$ un seul point;

$H=0,\ P=0$, un des binômes négatif deux droites parallèles;

$H=0,\ P=0$, un des binômes positif un point à distance infinie;

Les trois binômes zéro deux droites coïncidentes

Propriétés géométriques.

§. 10.

Soit l'équation générale du second degré en coordonnées quadriplanaires

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2+2l\beta\gamma+2m\gamma\alpha+2n\alpha\beta+2p\alpha\delta+2q\beta\delta+2r\gamma\delta=0.$$

Je désigne par

$$A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1\delta=0$$

un plan quelconque, par

$$A\alpha+B\beta+C\gamma+D\delta=0$$

le plan à distance infinie.

De la propriété du §. 3. suit immédiatement, que les points d'intersection de la surface du second degré et de la droite représentée par les deux équations du premier degré coïncident, quand

$$R=\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A \\ n & b & l & q & B_1 & B \\ m & l & c & r & C_1 & C \\ p & q & r & d & D_1 & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\ A & B & C & D & & \end{vmatrix}$$

est égal à zéro; que les points d'intersection sont réels et distincts, quand R est négatif; et que les points d'intersection sont imaginaires, quand R est positif.

§. 11.

Désignons encore par H le discriminant ou l'hessien de l'équation générale du second degré à quatre variables.

$$H=\begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & c & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix}$$

Quand $H=0$, la surface a un point double. (voyez Salmon Geometry of three dimensions art. 63.)

Quand $A_1\alpha+B_1\beta+C_1\upsilon+D_1\delta=0$ touche à la surface du second degré, on a (voyez Salmon art. 75.)

$$Q=\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix}=0.$$

Quand $Q=0$, l'intersection de la surface et du plan $A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1\delta=0$ se réduit à un seul point pour une surface du second degré qui n'est pas réglée et l'intersection consiste en deux droites pour une surface gauche. Dans le premier cas R sera positif (voyez §. 10); dans le second cas R sera négatif. Or Q étant nul, H a le signe contraire de R. (voyez Baltzer §. 6, 4). De tout cela suit la propriété remarquable:

Pour les surfaces gauches du second degré H est positif; pour les surfaces du second degré qui ne sont pas réglées H est négatif.

§. 12.

Quand Q est différent de nul, le plan $A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1\delta=0$ n'est pas tangent à la surface. Pour la discussion de l'équation générale en coordonnées quadriplanaires c'est un problème intéressant de distinguer alors, si la courbe d'intersection du plan et de la surface est réelle ou imaginaire.

En discutant l'équation du second degré en coordonnées trilinéaires, nous avons vu, que cette équation représente un lieu imaginaire, quand la série

$$1 \qquad a \qquad \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \qquad \text{(a)}$$

offre trois variations de signe, ou n'en offre aucune. Eliminant δ entre l'équation du plan et celle de la surface, on obtient une équation entre les α, β, γ de la courbe d'intersection. Ces coordonnées, étant les distances à trois plans, ont une signification un peu différente de la signification des coordonnées trilinéaires; mais on y peut appliquer les mêmes raisonnements. Après l'élimination susdite on pourrait donc former les termes de la série (a), et compter ensuite le nombre des variations de signe. Mais cette élimination serait prolixe, et l'on obtiendrait les termes de la série sous des formes compliquées. J'éviterai tout cela.

Le dernier terme de la série est la fonction qui doit être nulle, pour que la conique ait un point double, et un raisonnement tout-à-fait analogue à celui du §. 2. nous fait voir, que cette fonction peut se mettre sous la forme

$$Q=\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 \\ n & b & l & q & B_1 \\ m & l & c & r & C_1 \\ p & q & r & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \end{vmatrix}$$

Or dans le dernier terme de la série (a) abc a le signe plus, et quand on effectue l'élimination indiquée on obtient de nouveau le produit abc avec le signe plus; tandis-que dans Q ce produit a le signe moins. Le dernier terme de la série (a) a donc le signe contraire de Q.

Observons, que chez les coniques $ab-h^2$ est la fonction qui doit être zéro, pour que

$$a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 = 0$$

ait deux racines coïncidentes, et que le nouvel $ab - h^2$ est la fonction qui doit être zéro, pour que l'on puisse satisfaire par deux systèmes de valeurs coïncidentes aux équations que l'on obtient, en prenant $\gamma = 0$ dans les deux équations données. Cette fonction peut se mettre sous la forme

$$-\begin{vmatrix} a & n & p & A_1 \\ n & b & q & B_1 \\ p & q & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & D_1 & \end{vmatrix}$$

Le nouvel a peut se mettre sous la forme

$$-\begin{vmatrix} a & p & A_1 \\ p & d & D_1 \\ A_1 & D_1 & \end{vmatrix}$$

Le résultat de tout ce qui précède est:

La courbe d'intersection est imaginaire, quand la série

$$1 \quad -\begin{vmatrix} a & p & A_1 \\ p & d & D_1 \\ A_1 & D_1 & \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a & n & p & A_1 \\ n & b & q & B_1 \\ p & q & d & D_1 \\ A_1 & B_1 & D_1 & \end{vmatrix} - Q \qquad \text{(b)}$$

offre trois variations de signe ou n'en offre aucune; la courbe d'intersection n'est pas imaginaire, quand il y a une ou deux variations de signe dans la même série.

Coordonnées quadriplanaires.

§. 13.

L'équation générale du second degré peut représenter

1. Un hyperboloïde à une nappe.
2. Un hyperboloïde à deux nappes.
3. Un ellipsoïde.
4. Un paraboloïde hyperbolique.
5. Un paraboloïde elliptique.
6. Un cône.

7. Un point à distance finie.
8. Un lieu imaginaire.
9. Un cylindre hyperbolique.
10. Un cylindre parabolique.
11. Un cylindre elliptique.
12. Un point à distance infinie.
13. Deux plans qui se coupent.
14. Deux plans parallèles.
15. Une droite à distance finie.
16. Une droite à distance infinie.
17. Deux plans coïncidents.

§. 14.

Caractères de ces cas.

Dans cette discussion H a la signification du §. 11, et P est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A \\ n & b & l & q & B \\ m & l & c & r & C \\ p & q & r & d & D \\ A & B & C & D & \end{vmatrix}$$

qui indique, si le plan à distance infinie touche à la surface ou non.

1. L'hyperboloïde à une nappe est une surface gauche, et elle n'est pas tangente au plan à distance infinie que nous indiquerons par ξ. On a donc

$$H > 0, \quad P \gtrless 0.$$

2. et 3. L'hyperboloïde à une nappe et l'éllipsoïde ne sont pas des surfaces réglées, et ils ne sont pas tangents à ξ. Pour l'un et l'autre on a donc

$$H < 0, \quad P \gtrless 0.$$

Pour les distinguer l'un de l'autre remarquons, que l'hyperboloïde à une nappe est rencontré par ξ, et que l'ellipsoïde ne l'est pas. La série

$$1 \quad - \begin{vmatrix} a & p & A \\ p & d & D \\ A & D & \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} a & n & p & A \\ n & b & q & B \\ p & q & d & D \\ A & B & D & \end{vmatrix} - P \qquad \text{(c)}$$

offre donc trois variations de signe, ou elle n'en offre aucune dans le cas d'un ellipsoïde. Cette série offre une ou deux variations de signe dans le cas d'un hyperboloïde à deux nappes.

4. Un paraboloïde hyperbolique est une surface gauche tangente à ξ; on a donc

$$H > 0, \quad P = 0.$$

5. Un paraboloïde elliptique est une surface qui n'est pas réglée, et qui est tangente à ξ; en sorte que l'on a

$$H < 0, \quad P = 0.$$

6. et 7. Pour un cône comme pour un seul point à distance finie on a

$$H = 0, \quad P \gtrless 0;$$

mais l'intersection du cône et de ξ est réelle, tandis que l'intersection d'un point à distance finie et de ξ est imaginaire. La série (c) offre donc 1 ou 2 variations de signe dans le cas du cône; cette série offre 0 ou 3 variations de signe dans le cas d'un point à distance finie.

8. L'équation générale peut, par une substitution linéaire et réelle, être réduite à la forme

$$a_1\alpha^2 + b_1\beta^2 + c_1\gamma^2 + d_1\delta^2 = 0,$$

quand aucun des déterminants suivants ne s'annule

$$1 \quad a \quad \begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} \quad H \qquad \text{(d)}$$

Le nombre des carrés négatifs dans l'équation réduite est égal au nombre des variations de signe qu'offrent les cinq quantités précédentes. Si ces quantités n'offrent que des variations de signe, tous les carrés sont négatifs, et le lieu est imaginaire. Si les mêmes quantités sont toutes positives, il y a quatre carrés positifs, et le lieu est encore imaginaire. Dans ces deux cas

H est positif. Réciproquement: pour un lieu imaginaire P doit être différent de zéro, tandis que la série (d) n'offre que des variations de signe ou n'en offre aucune.

Pour un hyperboloïde à une nappe on a $H>0$, comme pour un lieu imaginaire; mais dans le premier cas le nombre des variations de signe dans la série (d) est 2; tandis que ce nombre est 4 ou 0 pour un lieu imaginaire.

9—17. Dans tous les autres cas on a $H=0$, $P=0$. Afin de discerner entre ces cas, remarquons, que dans ces différents cas les courbes d'intersection de la surface et du plan des δ sont respectivement les courbes que nous avons discutées chez les coniques dans les cas de 1 à 9. On a donc pour les cas de 9 à 17, dans le même ordre, les caractères qui ont été donnés pour les sections coniques.

A l'égard du dernier cas, observons, que l'équation du second degré doit être un carré parfait par rapport aux variables, ce qui donne immédiatement

$$ab-n^2=ac-m^2=ad-p^2=bc-l^2=bd-q^2=cd-r^2=0.$$

La courbe d'intersection susdite consiste en deux droites parallèles, quand la surface se compose de deux plans parallèles. Pour un cylindre la courbe d'intersection consiste de même en deux droites parallèles, quand le plan des δ est parallèle aux arêtes du cylindre; mais cela ne peut être vrai à l'égard de trois plans des coordonnées.

On peut faire des remarques analogues dans quelques-uns des autres cas.

§. 15.

Ayant trouvé des relations qui doivent exister dans les divers cas, et ces relations étant telles, que celles qui doivent exister dans deux de ces cas ne peuvent être vérifiées en même temps, on peut réciproquement des relations conclure au genre de la surface.

En résumant on a, à l'aide de H, de P, et des séries

$$1 \quad - \begin{vmatrix} a & p & A \\ p & d & D \\ A & D & \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} a & n & p & A \\ n & b & q & B \\ p & q & d & D \\ A & B & D & \end{vmatrix} - P \qquad (c)$$

$$1 \quad a \quad \begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} \quad H \qquad \text{(d)}$$

$H>0$, $P\gtrless 0$, deux variations de signe dans la série (d) annonce un hyperboloïde à une nappe.

$H<0$, $P\gtrless 0$, une ou deux variations de signe dans la série (c): un hyperboloïde à deux nappes.

$H<0$, $P\lessgtr 0$, 0 ou 3 variations de signe dans la série (c): un ellipsoïde.

$H>0$, $P=0$: paraboloïde hyperbolique.

$H<0$, $P=0$: paraboloïde elliptique.

$H=0$, $P\gtrless 0$, 1 ou 2 variations de signe dans la série (c): un cône.

$H=0$, $P>0$, 0 ou 3 variations de signe dans la série (c): un point à distance finie.

$H>0$, $P\gtrless 0$, la série (d) offre 0 ou 4 variations de signe: un lieu imaginaire.

Reste à déterminer le genre de la surface quand $H=0$, $P=0$. Désignons par π la courbe d'intersection de la surface et du plan des δ.

π est une hyperbole: un cylindre hyperbolique.

π est une parabole: un cylindre parabolique.

π est une ellipse: un cylindre elliptique.

π est imaginaire: un point à distance infinie.

π consiste en deux droites qui se coupent: deux plans qui se coupent.

π consiste en deux droites parallèles: deux plans parallèles:

π est un point à distance finie:

une droite à distance finie.

π est un point à distance infinie:

une droite à distance infinie.

Ce que nous avons remarqué à la fin du parapraphe précédent, nous montre la nécessité de faire usage dans quelques cas des autres plans des coordonnées.

Coordonnées ordinaires.

§. 16.

L'équation générale des courbes du second degré en coordonnées ordinaires est déduite de l'équation en coordonnées trilinéaires en remplaçant α par x, β par y, γ par l'unité. L'équation de la droite à distance infinie se réduit pour les coordonnées ordinaires à

$$C = 0.$$

Le discriminant H ne change pas et le déterminant P se réduit à

$$-\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} C^2.$$

Au lieu des caractères du paragraphe 9 on a donc:

$H \gtrless 0$, $ab - h^2 < 0$ annonce une hyperbole;

$H \gtrless 0$, $ab - h^2 = 0$ une parabole;

$\frac{H}{a} < 0$, $ab - h^2 > 0$ une ellipse;

$\frac{H}{a} > 0$, $ab - h^2 > 0$ un lieu imaginaire;

$H = 0$, $ab - h^2 < 0$ deux droites qui se coupent;

$H = 0$, $ab - h^2 > 0$ un seul point;

$H = 0$, $ab - h^2 = 0$ un des binômes négatif
deux droites parallèles;

$H = 0$, $ab - h^2 = 0$, un des binômes positif
un point à distance infinie;

les trois binômes zéro deux droites coïncidentes.

§. 17.

L'équation générale des surfaces du second degré en coordonnées ordinaires est déduite de l'équation en coordonnées quadriplanaires en remplaçant α par x, β par y, γ par z, δ par l'unité.

L'équation du plan à distance infinie se réduit dans ce cas à

$$D = 0.$$

Le discriminant et la série (d) ne changent pas. Le déterminant P devient

$$- \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} D^2.$$

La série (c) devient

$$1 \quad aD^2 \quad \begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} D^2 \quad \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} D^2;$$

et comme on ne fait usage que des signes des quantités précédentes, on peut remplacer cette série par

$$1 \quad a \quad \begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} \qquad \text{(e)}$$

Désignons le dernier terme de cette série par P_1.

Les caractères du §. 15. ne se simplifient pas considérablement pour les cas de 1 à 9. Seulement au lieu de la série (c) on a la série plus simple (e), et au lieu de P on peut prendre $-P_1$.

Pour les autres cas, la simplification est la même que pour les coniques.

Groningue, 14. Avril 1869.

XII.

Ueber conforme Kartenprojectionen.

Von
dem Herausgeber.

(Figur s. Taf. VIII.)

§. 1.

Die für Geodäsie, Geographie und Astronomie so wichtige Theorie der Kartenprojectionen hat in neuester Zeit die Aufmerksamkeit der Mathematiker wieder mehrfach in Anspruch genommen, und es ist über diesen grosses Interesse darbietenden Gegenstand neuerlich ein sehr vollständiges, empfehlenswerthes Werk unter dem folgenden Titel erschienen:

Traité des Projections des cartes géographiques, représentation plane de la sphère et du sphéroide par A. Germain, ancien elève de l'école polytechnique, ingénieur hydrographe de la marine, membre de la société de géographie. Première partie: Théorie des projections. — Deuxième partie: Construction et usage des principales projections. Accompagnées de 14 planches gravées. Ouvrage approuvé par S. Exc. le Ministre de la Marine et des Colonies. Paris. Arthus Bertrand éditeur. 8°. (ohne Jahreszahl.).

Auch eine in den „Astronomischen Nachrichten Nr. 1704. S. 369." ganz neuerlich veröffentlichte verdienstliche Abhandlung des Herrn Professor Wittstein in Hannover: „Ueber conforme Karten-Projectionen", welcher auch eine Karte

von Asien in conformer Projection beigegeben ist, verdient Erwähnung; die älteren Werke über diesen Gegenstand, deren namentlich Deutschland eine grössere Anzahl besitzt, sind hinreichend bekannt.

Sehr erfreulich ist es, dass man in den genannten neueren Arbeiten wieder auf eine ältere Abhandlung von J. H. Lambert, die wohl fast in gänzliche Vergessenheit gerathen war, zurückgegangen ist, welche Abhandlung sich in den:

Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung durch J. H. Lambert. Mit Kupfern und Tafeln. Dritter Theil. Berlin 1772. 8°. Nr. VI. S. 105 bis S 199.

unter folgendem Titel findet:

Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelskarten.

Gewiss verdient die Gerechtigkeit alle Anerkennung, welche der französische Mathematiker dem trefflichen Lambert zu Theil werden lässt, wenn er in der Vorrede p. VI. seines empfehlenswerthen Werkes sagt:

„Lambert est celui qui revient le plus souvent dans l'histoire de cette branche de la géographie, et l'on peut dire que l'illustre professeur de Berlin a doté l'art des projections de plus de méthodes ingénieuses et utiles que tous ceux qui se sont occupés du même sujet avant ou après lui."

Vorzüglich bemerkenswerth ist es aber, dass die von Gauss in seinen berühmten und allgemein bekannten scharfsinnigen Arbeiten über die Abbildung von Flächen auf anderen Flächen entwickelte Projectionsmethode im Wesentlichen und in Betreff des eigentlich in der chartographischen Praxis Anwendbaren auf die Methode von Lambert zurückkommt, was auch Herr A. Germain gebührend hervorhebt, indem er in dieser Beziehung p. 40. seines Werkes sagt:

„Nous reviendrons sur cette projection imaginée par Lambert et plus connue sous le nom de projection de Gauss."

und p. 56.:

„Nous avons ainsi obtenu directement, comme l'a fait Lambert, la projection dont nous avons déjà parlé au §. 4., et que Gauss a traité comme application de sa formule générale des

projections assujetties à la condition de conserver la similitude des configurations dans la représentation d'une surface sur une autre"

wo er aber ganz richtig in einer Note hinzufügt:

„du reste Gauss, loin de s'attribuer le mérite de l'invention de cette projection, cite l'atlas céleste de Harding publié à Gottingue de 1808 à 1822, et dont les planches XIX à XXVI sont assujetties à cette projection avec les modifications que nous allons indiquer."

M. s. auch die oben angeführte Abhandlung des Herrn Professor Wittstein.

Die ungemein wichtigen und scharfsinnigen Arbeiten von Gauss setzen zu ihrem Verständniss analytische Kenntnisse in ziemlich grossem Umfange voraus, und enthalten Vieles, was in der Praxis wenigstens nicht unmittelbare Anwendung finden kann, so höchst interessant dieselben natürlich in rein geometrischer Beziehung sind; dagegen enthält die Abhandlung von Lambert das vollständig, was in der Praxis wirklich zur Anwendung kommen dürfte, wie dies auch neuerlich ziemlich allgemein anerkannt worden ist. Die Darstellung von Lambert lässt aber nach meiner Ansicht Manches zu wünschen übrig, und das Gewand, in welches er dieselbe gekleidet hat, ist ein ziemlich veraltetes; auch durch die neueren Darstellungen seiner Methode, die sich manche Vernachlässigungen gestatten, was der erforderlichen mathematischen Strenge nicht immer entspricht, bin ich keineswegs vollständig befriedigt worden, und hoffe daher der Geographie und den übrigen hierher gehörenden Wissenschaften einen kleinen Dienst zu erweisen, wenn ich im Folgenden die Methode von Lambert — im Wesentlichen übrigens demselben mich anschliessend und ihm folgend — einer neuen Entwickelung unterwerfe, wie dieselbe nach meinen Ansichten über mathematische Strenge gegeben werden muss. Manche andere Resultate aus meiner langjährigen vielfachen Beschäftigung mit der Theorie der Kartenprojectionen — wobei ich mir wohl auch auf meine früheren Abhandlungen über die stereographische Projection in Thl. XXXII. Nr. XXV. S. 250. und Thl. XXXIX. Nr. XXII. S. 318. zu verweisen erlauben darf — hoffe ich der vorliegenden Abhandlung später folgen zu lassen.

Möge man es nicht unstatthaft finden, wenn ich mir hier noch die Bemerkung erlaube, dass ich einige meiner Arbeiten über Kartenprojectionen in dieser hauptsächlich der Förderung des Unterrichts gewidmeten Zeitschrift um so lieber mittheilen werde,

weil ich immer der Meinung gewesen bin, dass eine genauere Bekanntschaft mit der betreffenden Theorie Lehrern der Mathematik sehr nothwendig und sehr zu empfehlen ist, damit sie im Stande sind, auch den Lehrern der Geographie behülflich zu sein, indem mir bei diesen letzteren nicht selten eine völlige Unbekanntschaft mit der Art und Weise, wie geographische Karten aufzufassen und zu gebrauchen sind, entgegen getreten ist. Mancher sieht dieselben wohl gar als gewöhnliche Bilder, nicht als nach strengen mathematischen Principien entworfene, bestimmten Anforderungen genügende, graphische streng geometrische Darstellungen an, welches Letztere sie doch sind, sein sollen und sein müssen.

§. 2.

Weil ich im Folgenden die Erde als ein durch Umdrehung einer mit den Halbaxen a, b beschriebenen Ellipse um die kleine Axe $2b$ entstandenes Sphäroid betrachten werde: so scheint es mir — da namentlich auch des am Ende des vorhergehenden Paragraphen angedeuteten Zwecks wegen völlige Deutlichkeit und möglichst leichtes Verständniss mir hier sehr am Herzen liegen — angemessen, in diesem Paragraphen einige schon bekannte, aber für das Folgende sehr wichtige, die Ellipse oder vielmehr das Rotationsellipsoid betreffende Formeln zu entwickeln, um mich späterhin mit Leichtigkeit auf dieselben beziehen zu können.

Wir betrachten einen beliebigen elliptischen Meridian, und bezeichnen die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf oder unter demselben in dem bei der Betrachtung der Ellipse gewöhnlichen Coordinatensysteme durch x, y; die Breite oder vielmehr Polhöhe des Punktes (xy) ist bekanntlich der 90^0 nicht übersteigende Neigungswinkel der Normale des elliptischen Meridians in dem Punkte (xy) gegen die Ebene des Aequators, indem man diesen Winkel als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem der Punkt (xy) in der nördlichen oder südlichen Hälfte des Erdellipsoids liegt, und soll mit Rücksicht hierauf im Folgenden durch ϖ bezeichnet werden.

Weil nach der Theorie der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

ist, so ist, wenn man differentiirt:

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0, \text{ also } \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{b^2x}{a^2y};$$

[illegible] durch u, v be-[illegible] Geometrie die Gleichung [illegible] in dem Punkte (xy):

$$-y = -\frac{[illegible]}{[illegible]}(u-x),$$

[illegible] Meridians in dem-[illegible]:

$$-y = \frac{[illegible]}{[illegible]}(u-x).$$

[illegible] Geometrie, [illegible], wie es offenbar [illegible] gültige Glei-[illegible]:

$$\operatorname{tang}\bar{\omega} = \frac{[illegible]}{[illegible]}.$$

[illegible] der Ellipse:

$$y^2 = \frac{[illegible]}{[illegible]}(a^2-x^2),$$

also:

$$\operatorname{tang}\bar{\omega}^2 = \frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}\cdot\frac{a^2-x^2}{x^2},$$

folglich:

$$b^2x^2\sin\bar{\omega}^2 = a^2(a^2-x^2)\cos\bar{\omega}^2,$$

woraus sich sogleich:

$$(a^2\cos\bar{\omega}^2 + b^2\sin\bar{\omega}^2)x^2 = a^4\cos\bar{\omega}^2,$$

und folglich, weil x und $\cos\bar{\omega}$ stets positive Grössen sind:

$$x = \frac{a^2\cos\bar{\omega}}{\sqrt{a^2\cos\bar{\omega}^2 + b^2\sin\bar{\omega}^2}}$$

ergiebt.

Nach dem Obigen ist:

$$y = \frac{b^2}{a^2}x\operatorname{tang}\bar{\omega},$$

folglich nach der vorstehenden Formel:

$$y = \frac{b^2\sin\bar{\omega}}{\sqrt{a^2\cos\bar{\omega}^2 + b^2\sin\bar{\omega}^2}}.$$

Daher haben wir die folgenden ganz allgemeinen Ausdrücke der Coordinaten x, y durch die Breite $\overline{\omega}$:

$$x = \frac{a^2 \cos \overline{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \overline{\omega}^2 + b^2 \sin \overline{\omega}^2}}, \quad y = \frac{b^2 \sin \overline{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \overline{\omega}^2 + b^2 \sin \overline{\omega}^2}};$$

die man auch auf folgende Art:

$$x = \frac{a \cos \overline{\omega}}{\sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin \overline{\omega}^2}}, \quad y = \frac{\frac{b^2}{a} \sin \overline{\omega}}{\sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin \overline{\omega}^2}};$$

oder, wenn der Körper wegen

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$

gesetzt wird, auf folgende Art:

$$x = \frac{a \cos \overline{\omega}}{\sqrt{1 - e^2 \sin \overline{\omega}^2}}, \quad y = \frac{a(1 - e^2) \sin \overline{\omega}}{\sqrt{1 - e^2 \sin \overline{\omega}^2}};$$

ausdrücken kann.

Wenn man den vorstehenden Ausdruck von x nach $\overline{\omega}$ als unabhängige veränderliche Grösse differentiirt, so erhält man ohne alle Schwierigkeit:

$$\frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} = - \frac{a(1 - e^2) \sin \overline{\omega}}{(1 - e^2 \sin \overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nach dem Obigen ist:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

also, wenn man die obigen Ausdrücke von x und y einführt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{b^2}{a^2(1 - e^2)} \cot \overline{\omega} = - \cot \overline{\omega};$$

und weil nun nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}}$$

ist, so ist nach dem Vorstehenden offenbar:

$$\frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} = \frac{a(1 - e^2) \cos \overline{\omega}}{(1 - e^2 \sin \overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Daher haben wir jetzt die beiden folgenden wichtigen Formeln:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)\sin\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} = \frac{a(1-e^2)\cos\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 1+\cot\bar{\omega}^2 = \frac{1}{\sin\bar{\omega}^2},$$

also:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \pm\frac{1}{\sin\bar{\omega}},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\bar{\omega}$ positiv oder negativ ist.

Rechnet man den bei dem Punkte (xy) sich endigenden Bogen s des Meridians vom Nordpole an, so ist nach den Lehren der höheren Geometrie unter den gemachten Voraussetzungen offenbar:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\bar{\omega}$ positiv oder negativ ist.

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so erhält man auf der Stelle die ganz allgemein gültige Formel:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\sin\bar{\omega}},$$

und da nun nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Bezeichnen wir den Halbmesser des Parallelkreises des Ellipsoids zu dem Aequator unter der Breite $\bar{\omega}$ durch r, so ist offenbar $r = x$, also nach dem Obigen:

$$r = \frac{a\cos\bar{\omega}}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}^2}} = \frac{a\cos\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

und:

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)\sin\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nach den Lehren der Differentialrechnung ist:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial \bar{\omega}} : \frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}},$$

und weil nun nach dem Obigen:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\cot\bar{\omega},$$

also:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial \bar{\omega}} = \frac{1}{\sin\bar{\omega}^2}$$

ist, so ist:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\sin\bar{\omega}^2} : \frac{a(1-e^2)\sin\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}{a(1-e^2)\sin\bar{\omega}^3}.$$

Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser des Meridians unter der Breite $\bar{\omega}$ durch ϱ, so ist bekanntlich:

$$\varrho^2 = \frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^3}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2},$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\varrho^2 = \frac{1}{\sin\bar{\omega}^6} \cdot \frac{a^2(1-e^2)^2\sin\bar{\omega}^6}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^3} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^3},$$

also:

$$\varrho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die hier entwickelten Formeln reichen zum Verständniss des Folgenden vollständig hin.

Im Allgemeinen wollen wir nur noch bemerken, dass die in dieser Abhandlung zur Betrachtung kommenden Kartenprojectionen weder perspectivische — wie die stereographische Projection — noch durch Abwickelung entstandene Projectionen sind; dieselben sind Zeichnungen, Constructionen oder graphische Darstellungen, welche zu den entsprechenden Figuren auf der Oberfläche des Ellipsoids in gewissen, zur Erfüllung bestimmter Zwecke

dienenden, späterhin näher anzugebenden Verhältnissen oder Beziehungen stehen, wobei immer auch, der praktischen Anwendung wegen, möglichst leichte Entwerfung oder Ausführung der erforderlichen Zeichnungen ein bei solchen Kartenprojectionen niemals aus den Augen zu verlierender Gesichtspunkt ist.

§. 3.

Die hier zu betrachtende Projection unterwerfen wir den folgenden Bedingungen:

1. Die Meridiane des Erdsphäroids sollen durch von einem Punkte, den wir O nennen wollen, ausgehende gerade Linien dargestellt werden.

2. Die Parallelkreise des Erdsphäroids sollen durch aus dem Punkte O als Mittelpunkt beschriebene concentrische Kreise dargestellt werden.

3. Die Längen auf dem Erdsphäroid sollen zu den entsprechenden Längen auf der Projection oder Karte in einem constanten Verhältnisse stehen, so dass also die Längen auf der Projection oder Karte aus den entsprechenden Längen auf dem Erdsphäroid erhalten werden, wenn man diese letzteren mit einer gewissen constanten absoluten Zahl, die wir durch μ bezeichnen wollen, multiplicirt, wobei wir wohl kaum noch besonders zu bemerken brauchen, dass man unter den Längen die von zwei einander entsprechenden Meridianen auf dem Erdsphäroid und auf der Projection oder Karte mit zwei einander entsprechenden, als erste angenommenen Meridianen auf dem Erdsphäroid und auf der Projection oder Karte eingeschlossenen Winkel zu verstehen hat.

Insofern die absolute Zahl μ, wie vorher geschehen ist, als constant angenommen wird — und nur wenn dies geschieht — findet, wie auf der Stelle erhellet, das zwischen den einander entsprechenden Längen auf dem Erdsphäroid und auf der Projection oder Karte Statt findende Verhältniss auch zwischen den einander entsprechenden Veränderungen der einander entsprechenden Längen auf dem Erdsphäroid und auf der Projection oder Karte Statt, was der folgenden Entwickelungen wegen besonders zu bemerken von Wichtigkeit ist.

Es sei nun — mit Bezug auf die durch sich selbst verständliche Figur — P ein beliebiger Punkt auf dem Erdellipsoid, dessen von einem gewissen Meridiane an gerechnete Länge und dessen Breite wir beziehungsweise durch ω und $\overline{\omega}$ bezeichnen wollen.

Der zwischen diesem Punkte P und dem Nordpole N der Erde liegende Meridianbogen sei s, und r sei der Halbmesser des durch P gehenden Parallelkreises der Erde.

Der dem Punkte P entsprechende Punkt auf der Projection oder Karte sei P', und dessen geradlinige Entfernung von dem vorher durch O bezeichneten Punkte sei R; die Länge des Punktes P' auf der Projection oder Karte sei Ω, wo diese Längen von einem ganz beliebigen Meridiane auf der Projection oder Karte als ersten Meridian, welcher dem ersten Meridiane auf dem Ellipsoid entspricht, an gerechnet werden, und wo nach dem Obigen

$$\Omega = \mu\omega$$

ist.

Man lasse jetzt auf dem Ellipsoid ω und s die positiven Veränderungen $\Delta\omega$ und Δs erleiden, und bezeichne die entsprechenden Veränderungen von Ω und R auf der Projection oder Karte durch $\Delta\Omega$ und ΔR, wodurch auf dem Ellipsoid und auf der Projection oder Karte die mittelst einfacher geometrischer Betrachtungen sich sogleich als rechtwinklige, also als gleichwinklige Vierecke ergebenden Vierecke PP_1QQ_1 und $P'P_1'Q'Q_1'$ entstehen; und wenn nun, welche neue Bedingung wir jetzt den drei obigen Bedingungen 1., 2., 3. noch beifügen:

4. Diese beiden als unendlich klein zu denkenden Vierecke PP_1QQ_1 und $P'P_1'Q'Q_1'$ auf dem Erdellipsoid und auf der Projection oder Karte einander ähnlich sein sollen;

so müssen ihre Seiten einander proportional sein oder in gleichen Verhältnissen zu einander stehen, woraus sich mit Rücksicht auf die Figur sogleich die Proportionen:

$$\Delta s : r\Delta\omega : (r+\Delta r)\Delta\omega = \Delta R : R\Delta\Omega : (R+\Delta R)\Delta\Omega,$$

also die beiden Gleichungen:

$$(R+\Delta R)\Delta\Omega\Delta s = (r+\Delta r)\Delta\omega\Delta R,$$
$$R\Delta\Omega\Delta s = r\Delta\omega\Delta R$$

ergeben, welche zugleich existiren müssen, oder, weil nach dem oben Bemerkten

$$\Delta\Omega = \mu\Delta\omega$$

sein muss, die beiden zugleich existiren müssenden Gleichungen:

$$\mu(R+\Delta R)\Delta s = (r+\Delta r)\Delta R,$$
$$\mu R\Delta s = r\Delta R.$$

Diese beiden Gleichungen bringt man leicht auf die Form:

$$\mu(R+\Delta R)=r+\Delta r,\frac{\Delta R}{\Delta s},$$

$$\mu R=r\frac{\Delta R}{\Delta s},$$

oder auf die Form:

$$\mu R+\Delta R=r+\Delta r\left(\frac{\Delta R}{\Delta s}:\frac{\Delta r}{\Delta s}\right),$$

$$\mu R=r\left(\frac{\Delta R}{\Delta s}:\frac{\Delta r}{\Delta s}\right),$$

und lässt man nun Δs sich der Null nähern, so nähern Δr und ΔR sich beide der Null, und die beiden vorstehenden Gleichungen nähern sich beide der einen Gränzgleichung:

$$\mu R=r\cdot\operatorname{Lim}\frac{\Delta R}{\Delta s}:\operatorname{Lim}\frac{\Delta r}{\Delta s},$$

also der einen Gränzgleichung:

$$\mu R=r\left(\frac{\partial R}{\partial s}:\frac{\partial r}{\partial s}\right),$$

folglich der einen Gränzgleichung:

$$\frac{\partial R}{\partial s}=\frac{\mu R}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}.$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$\mu(R+\Delta R)\Delta s=r+\Delta r\cdot\Delta R,$$

$$\mu R\Delta s=r\Delta R$$

folgt aber durch Subtraction die Gleichung:

$$\mu\Delta R\Delta s=\Delta r\Delta R,$$

also die Gleichung:

$$\mu\Delta s=\Delta r,$$

folglich die Gleichung:

$$\mu=\frac{\Delta r}{\Delta s}=\frac{\Delta r}{\Delta s}:\frac{\Delta s}{\Delta s},$$

und hieraus, wenn man sich Δs der Null nähern lässt, die Gränz-

$$\mu=\operatorname{Lim}\frac{\Delta r}{\Delta s}:\operatorname{Lim}\frac{\Delta s}{\Delta s},$$

also die Gränzgleichung:

$$\mu = \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} : \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}} \text{ oder } \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = \mu \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}.$$

Man hat also, wenn die obigen Bedingungen sämmtlich erfüllt werden sollen, eigentlich die drei folgenden, zusammen existiren müssenden Gleichungen:

$$\mu(R+\Delta R)\Delta s = (r+\Delta r)\Delta R,$$
$$\mu R \Delta s = r \Delta R,$$
$$\mu \Delta s = \Delta r;$$

für welche man aber, da es sich hier nur um sogenannte unendlich kleine Grössen handelt, die zwei zusammen existiren müssenden Gränzgleichungen:

$$\frac{\partial R}{\partial \overline{\omega}} = \frac{\mu R}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}, \quad \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = \mu \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}$$

zu setzen hat.

Nun erhellet aber sehr leicht, dass diese beiden Gränzgleichungen niemals zusammen existiren können, dass namentlich durch die zweite den obigen Bedingungen wenigstens im Allgemeinen nicht entsprochen werden kann.

Aus den beiden im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Formeln:

$$\frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)\sin\overline{\omega}}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

erhellet nämlich auf der Stelle, dass die Differentialquotienten

$$\frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}} \text{ und } \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}}$$

gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, jenachdem die Breite $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist; also würde auch die Gleichung

$$\frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = \mu \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}$$

nur durch positive oder negative μ erfüllt werden können, jenachdem die Breite $\overline{\omega}$ beziehungsweise positiv oder negativ ist, was den hier zu erfüllenden, aus dem Obigen bekannten Bedingungen nicht entspricht. Daher wird man die Gleichung

$$\frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = \mu \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}$$

Diese beiden Gleichungen bringt man leicht auf die Form:

$$\mu(R+\Delta R) = (r+\Delta r)\frac{\Delta R}{\Delta s},$$

$$\mu R = r\frac{\Delta R}{\Delta s};$$

oder auf die Form:

$$\mu(R+\Delta R) = (r+\Delta r)\left(\frac{\Delta R}{\Delta\bar{\omega}} : \frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}\right),$$

$$\mu R = r\left(\frac{\Delta R}{\Delta\bar{\omega}} : \frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}\right);$$

und lässt man nun $\Delta\bar{\omega}$ sich der Null nähern, so nähern Δr und ΔR sich beide der Null, und die beiden vorstehenden Gleichungen nähern sich beide der einen Gränzgleichung:

$$\mu R = r\left(\operatorname{Lim}\frac{\Delta R}{\Delta\bar{\omega}} : \operatorname{Lim}\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}\right),$$

also der einen Gränzgleichung:

$$\mu R = r\left(\frac{\partial R}{\partial\bar{\omega}} : \frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}\right),$$

folglich der einen Gränzgleichung:

$$\frac{\partial R}{\partial\bar{\omega}} = \frac{\mu R}{r}\cdot\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}.$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$\mu(R+\Delta R)\,\Delta s = (r+\Delta r)\,\Delta R,$$

$$\mu R\,\Delta s = r\,\Delta R$$

folgt aber durch Subtraction die Gleichung:

$$\mu\,\Delta R\,\Delta s = \Delta r\,\Delta R,$$

also die Gleichung:

$$\mu\,\Delta s = \Delta r,$$

folglich die Gleichung:

$$\mu = \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{\Delta r}{\Delta\bar{\omega}} : \frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}},$$

und hieraus, wenn man sich $\Delta\bar{\omega}$ der Null nähern lässt, die Gränzgleichung:

$$\mu = \operatorname{Lim}\frac{\Delta r}{\Delta\bar{\omega}} : \operatorname{Lim}\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}},$$

also die Gränzgleichung:

$$\mu = \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} : \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}} \text{ oder } \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = \mu \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}.$$

Man hat also, wenn die obigen Bedingungen sämmtlich erfüllt werden sollen, eigentlich die drei folgenden, zusammen existiren müssenden Gleichungen:

$$\mu(R+\Delta R)\Delta s = (r+\Delta r)\Delta R,$$
$$\mu R \Delta s = r \Delta R,$$
$$\mu \Delta s = \Delta r;$$

für welche man aber, da es sich hier nur um sogenannte unendlich kleine Grössen handelt, die zwei zusammen existiren müssenden Gränzgleichungen:

$$\frac{\partial R}{\partial \overline{\omega}} = \frac{\mu R}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}, \quad \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = \mu \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}$$

zu setzen hat.

Nun erhellet aber sehr leicht, dass diese beiden Gränzgleichungen niemals zusammen existiren können, dass namentlich durch die zweite den obigen Bedingungen wenigstens im Allgemeinen nicht entsprochen werden kann.

Aus den beiden im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Formeln:

$$\frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)\sin\overline{\omega}}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

erhellet nämlich auf der Stelle, dass die Differentialquotienten

$$\frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}} \text{ und } \frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}}$$

gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, jenachdem die Breite $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist; also würde auch die Gleichung

$$\frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = \mu \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}$$

nur durch positive oder negative μ erfüllt werden können, jenachdem die Breite $\overline{\omega}$ beziehungsweise positiv oder negativ ist, was den hier zu erfüllenden, aus dem Obigen bekannten Bedingungen nicht entspricht. Daher wird man die Gleichung

$$\frac{\partial r}{\partial \overline{\omega}} = \mu \frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}$$

fallen lassen, und sich mit der Erfüllung der Gleichung

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\mu R}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial \bar{\omega}},$$

in welcher die Differentialquotienten

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{\omega}} \text{ und } \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}}$$

offenbar immer als von gleichen Vorzeichen betrachtet werden können, begnügen müssen.

Freilich werden dann die Vierecke PP_1QQ_1 und $P'P_1'Q'Q_1'$ nicht vollständig einander ähnlich, weil offenbar nur eine theilweise Proportionalität ihrer Seiten Statt findet.

§. 4.

Wir haben uns also jetzt mit der Integration der Gleichung

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\mu R}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial \bar{\omega}},$$

um R durch $\bar{\omega}$ auszudrücken, zu beschäftigen; mittelst dieses Ausdrucks erhält man dann R aus $\bar{\omega}$, und Ω ergiebt sich mittelst der Formel:

$$\Omega = \mu\omega,$$

was zur Zeichnung der Karte vollständig hinreicht.

Nach §. 2. ist bekanntlich:

$$r = \frac{a\cos\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial s}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}};$$

also nach dem Obigen offenbar:

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} = -\mu R \frac{1-e^2}{\cos\bar{\omega}(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)},$$

oder:

$$\frac{\partial R}{R} = -\frac{\mu(1-e^2)\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)},$$

wo es nun zunächst auf die Entwickelung des Integrals:

$$\int \frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)}$$

ankommt.

Dieses Integral kann man auf folgende Art ausdrücken:

$$\int \frac{\cos\bar{\omega}\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}^2(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)} = \int \frac{\partial\sin\bar{\omega}}{(1-\sin\bar{\omega}^2)(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)}.$$

Setzt man:

$$\frac{1}{(1-\sin\bar{\omega}^2)(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)} = \frac{A}{1-\sin\bar{\omega}} + \frac{B}{1+\sin\bar{\omega}} + \frac{A'}{1-e\sin\bar{\omega}} + \frac{B'}{1+e\sin\bar{\omega}}$$

$$= \frac{A+B+(A-B)\sin\bar{\omega}}{1-\sin\bar{\omega}^2} + \frac{A'+B'+(A'-B')e\sin\bar{\omega}}{1-e^2\sin\bar{\omega}^2},$$

und addirt die beiden Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens zu einander, indem man sie auf den gemeinschaftlichen Nenner

$$(1-\sin\bar{\omega}^2)(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)$$

bringt; so ist der Zähler die Summe:

$$\begin{aligned}&(A+B)+(A'+B')\\ &+\{(A-B)+(A'-B')e\}\sin\bar{\omega}\\ &-\{(A+B)e^2+(A'+B')\}\sin\bar{\omega}^2\\ &-\{(A-B)e+(A'-B')\}e\sin\bar{\omega}^3,\end{aligned}$$

und zur Bestimmung der Constanten A, B; A', B' erhält man also auf bekannte Weise die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(A+B)+(A'+B') &= 1,\\ (A-B)+(A'-B')e &= 0,\\ (A+B)e^2+(A'+B') &= 0,\\ (A-B)e+(A'-B') &= 0.\end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten und aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen ergiebt sich sogleich:

$$(1-e^2)(A+B)=1, \quad (1-e^2)(A-B)=0;$$

also:

$$A-B=0, \quad A=B, \quad A+B=2A=2B=\frac{1}{1-e^2};$$

folglich:

$$A=B=\frac{1}{2(1-e^2)}.$$

Ferner erhält man aus diesen Gleichungen:

$$A'+B'=-(A+B)e^2, \quad A'-B'=-(A-B)e;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$A' - B' = 0,\ A' = B',\ A' + B' = 2A' = 2B' = -\frac{e^2}{1-e^2},$$

folglich:

$$A' = B' = -\frac{e^2}{2(1-e^2)}.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$\int \frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)}$$
$$= \frac{1}{2(1-e^2)}\int\frac{\partial\sin\bar{\omega}}{1-\sin\bar{\omega}} + \frac{1}{2(1-e^2)}\int\frac{\partial\sin\bar{\omega}}{1+\sin\bar{\omega}}$$
$$-\frac{e^2}{2(1-e^2)}\int\frac{\partial\sin\bar{\omega}}{1-e\sin\bar{\omega}} - \frac{e^2}{2(1-e^2)}\int\frac{\partial\sin\bar{\omega}}{1+e\sin\bar{\omega}},$$

folglich nach einer sehr bekannten Fundamentalformel der Integralrechnung:

$$\int \frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)}$$
$$= \frac{1}{2(1-e^2)}\{l(1+\sin\bar{\omega}) - l(1-\sin\bar{\omega})\}$$
$$-\frac{e}{2(1-e^2)}\{l(1+e\sin\bar{\omega}) - l(1-e\sin\bar{\omega})\}$$
$$= \frac{1}{2(1-e^2)}\,l\frac{1+\sin\bar{\omega}}{1-\sin\bar{\omega}} - \frac{e}{2(1-e^2)}\,l\frac{1+e\sin\bar{\omega}}{1-e\sin\bar{\omega}}.$$

Weil nun nach dem Obigen:

$$\int\frac{\partial R}{R} = -\mu(1-e^2)\int\frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)},$$

also:

$$\frac{1}{\mu}lR = -(1-e^2)\int\frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)}$$

ist, so ist nach Vorstehendem:

$$\frac{1}{\mu}lR = \tfrac{1}{2}el\frac{1+e\sin\bar{\omega}}{1-e\sin\bar{\omega}} - \tfrac{1}{2}l\frac{1+\sin\bar{\omega}}{1-\sin\bar{\omega}},$$

oder:

$$\frac{1}{\mu}lR = \tfrac{1}{2}l\frac{1-\sin\bar{\omega}}{1+\sin\bar{\omega}} - \tfrac{1}{2}el\frac{1-e\sin\bar{\omega}}{1+e\sin\bar{\omega}},$$

oder, wie man leicht findet:

$$\frac{1}{\mu}lR = l\tan g(45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}) - l.\left(\frac{1-e\sin\bar{\omega}}{1+e\sin\bar{\omega}}\right)^{\frac{e}{2}},$$

also:

$$\frac{1}{\mu} lR = l\{\tang(45^0 - \tfrac{1}{2}\overline{\omega}).\left(\frac{1+e\sin\overline{\omega}}{1-e\sin\overline{\omega}}\right)^{\frac{e}{2}}\},$$

und folglich, wenn man der Kürze wegen:

$$\tang\tfrac{1}{2}u = \tang(45^0 - \tfrac{1}{2}\overline{\omega}).\left(\frac{1+e\sin\overline{\omega}}{1-e\sin\overline{\omega}}\right)^{\frac{e}{2}}$$

setzt:

$$lR = \mu l\tang\tfrac{1}{2}u = l.\tang\tfrac{1}{2}u^{\mu},$$

wo nun natürlich noch eine willkührliche Constante beigefügt werden muss. Stellen wir diese willkührliche Constante unter der Form lC dar, so wird:

$$lR = l.\tang\tfrac{1}{2}u^{\mu} + lC = l.C\tang\tfrac{1}{2}u^{\mu},$$

also endlich:

$$R = C\tang\tfrac{1}{2}u^{\mu}.$$

Weil

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\partial R}{\partial\overline{\omega}} : \frac{\partial s}{\partial\overline{\omega}}$$

ist, so ist nach §. 2. und dem Obigen:

$$\frac{\partial R}{\partial s} = -\mu R\frac{1-e^2}{\cos\overline{\omega}(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)} : -\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

also:

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\mu R(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}{a\cos\overline{\omega}} = \frac{\mu R\sqrt{1-e^2\sin\overline{\omega}^2}}{a\cos\overline{\omega}},$$

oder nach §. 2. offenbar:

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\mu R}{r},$$

und wenn man für R seinen oben gefundenen Ausdruck einführt:

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\mu C\tang\frac{1}{2}u^{\mu}}{r},$$

oder:

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\mu C\tang\frac{1}{2}u^{\mu}\sqrt{1-e^2\sin\overline{\omega}^2}}{a\cos\overline{\omega}}.$$

Dieses Verhältniss kann man mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \mathrm{Lim}\frac{\Delta R}{\Delta s}$$

ist, das Vergrösserungsverhältniss nennen.

Da die Constanten C und μ willkührlich sind, so kann man dieselben so bestimmen, dass die Karte oder das Netz ausser den durch das Obige schon erfüllten Bedingungen noch anderen Bedingungen entspricht, deren Erfüllung zweckmässig oder erwünscht sein kann.

Was die Constante μ betrifft, so schlägt **Lambert** vor, dieselbe so zu bestimmen, dass für zwei bestimmte Breiten $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$ die Gräde der diesen Breiten entsprechenden Parallelkreise auf dem Ellipsoid und auf der Karte, deren Halbmesser wir beziehungsweise durch r_0, r_1 und R_0, R_1 bezeichnen wollen, in gleichen Verhältnissen zu einander stehen, welcher Bedingung genügt sein wird, wenn die Proportion:

$$r_0 : r_1 = R_0 : R_1$$

Statt findet. Nun ist aber nach dem Obigen bekanntlich:

$$r_0 = \frac{a\cos\bar{\omega}_0}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_0{}^2}},\quad r_1 = \frac{a\cos\bar{\omega}_1}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_1{}^2}}$$

und:

$$R_0 = C\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}u_0{}^\mu,\quad R_1 = C\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}u_1{}^\mu;$$

wo:

$$\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}u_0 = \mathrm{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}_0)\cdot\left(\frac{1+e\sin\bar{\omega}_0}{1-e\sin\bar{\omega}_0}\right)^{\frac{e}{2}},$$

$$\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}u_1 = \mathrm{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}_1)\cdot\left(\frac{1+e\sin\bar{\omega}_1}{1-e\sin\bar{\omega}_1}\right)^{\frac{e}{2}}$$

ist; also wird die obige Proportion:

$$\frac{\cos\bar{\omega}_0}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_0{}^2}} : \frac{\cos\bar{\omega}_1}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_1{}^2}} = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}u_0{}^\mu : \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}u_1{}^\mu,$$

woraus sich die Gleichung:

$$\left(\frac{\mathrm{tang}\frac{1}{2}u_0}{\mathrm{tang}\frac{1}{2}u_1}\right)^\mu = \frac{\cos\bar{\omega}_0\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_1{}^2}}{\cos\bar{\omega}_1\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_0{}^2}},$$

und folglich zur Bestimmung von μ die Formel:

$$\mu = \frac{l\,\dfrac{\cos\bar{\omega}_0\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_1{}^2}}{\cos\bar{\omega}_1\sqrt{1-e^2\sin\omega_0{}^2}}}{l\,\dfrac{\mathrm{tang}\frac{1}{2}u_0}{\mathrm{tang}\frac{1}{2}u_1}},$$

oder:

$$\mu = \frac{l.\cos\bar{\omega}_0\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_1^2} - l.\cos\bar{\omega}_1\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_0^2}}{l\tang\tfrac{1}{2}u_0 - l\tang\tfrac{1}{2}u_1}$$

ergiebt. Natürlich kann man in dieser Formel statt der natürlichen auch gemeine Logarithmen gebrauchen, wie aus der Gestalt derselben auf der Stelle erhellet.

Für $\bar{\omega}_0 = 30^0$, $\bar{\omega}_1 = 70^0$ und $e = 0$, also für die Kugel, findet Lambert:

$$\mu = \frac{0{,}4034789}{0{,}5151206} = 0{,}78327.\ ^*).$$

Die Constante C will Herr A. Germain so bestimmen, dass, nachdem die Constante μ bestimmt ist, der einer gewissen bestimmten Breite $\bar{\omega}_0$ entsprechende Werth R_0 von R der Länge des von dem Nordpole bis zu dem Parallelkreise unter der Breite $\bar{\omega}_0$ reichenden Meridianbogens, den wir durch s_0 bezeichnen wollen, gleich werde. Da nun bekanntlich

$$R_0 = C\tang\tfrac{1}{2}u_0{}^\mu$$

ist für

$$\tang\tfrac{1}{2}u_0 = \tang(45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}_0).\left(\frac{1+e\sin\bar{\omega}_0}{1-e\sin\bar{\omega}_0}\right)^{\frac{e}{2}},$$

so hat man zur Bestimmung von C die Gleichung:

$$s_0 = C\tang\tfrac{1}{2}u_0{}^\mu,$$

woraus sich:

---

*) A. a. O. S. 140.

Herr A. Germain sagt in seinem oben angeführten Werke p. 61. in einer Note:

„La Société de géographie de Saint-Pétersbourg a choisi cette projection, en lui attribuant la dénomination de „projection de Gauss", pour la belle carte de la Russie européenne en douze feuilles, qu'elle a publiée en 1862. Les deux parallèles dont les degrés conservent leur véritable rapport sont ceux de 46° et 58°, les latitudes des parallèles extrêmes étant 36° et 68°."

Sous le parallèle moyen, qui est celui de 52°, le degré subit un retrait qui le réduit à 0,994 de sa valeur réelle, tandis que sous les parallèles extrêmes il éprouve une dilatation qui le porte à 1,031 et 1,040. Des échelles variables en verstes accompagnent la graduation des latitudes sur les bordures d'encadrement de chacune des douze feuilles de la carte. Le méridien moyen est celui de 10° à l'est de l'observatoire de Saint-Pétersbourg situé à 27°. 59′. 31″ à l'est du méridien de Paris.

$$C = \frac{s_0}{\tang \frac{1}{2} u_0^{\mu}}$$

ergiebt. Nach §. 2. ist aber:

$$s_0 = -a(1-e^2) \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\overline{\omega}_0} \frac{\partial \overline{\omega}}{(1-e^2 \sin \overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

oder:

$$s_0 = a(1-e^2) \int_{\overline{\omega}_0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial \overline{\omega}}{(1-e^2 \sin \overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}};$$

also:

$$C = \frac{a(1-e^2) \int_{\overline{\omega}_0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial \overline{\omega}}{(1-e^2 \sin \overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}}{\tang \frac{1}{2} u_0},$$

oder vollständig entwickelt:

$$C = \frac{a(1-e^2) \int_{\overline{\omega}_0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial \overline{\omega}}{(1-e^2 \sin \overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}}{\tang (45^0 - \frac{1}{2}\overline{\omega}_0) \cdot \left(\frac{1+e \sin \overline{\omega}_0}{1-e \sin \overline{\omega}_0}\right)^{\frac{e}{2}}}.$$

Ist $\overline{\omega}_0 = 0$ und folglich s_0 der Meridianquadrant, so ist:

$$C = a(1-e^2) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial \overline{\omega}}{(1-e^2 \sin \overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Für die Kugel, alo für $e = 0$, wird diese Formel:

$$C = a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial \overline{\omega} = \tfrac{1}{2} a\pi,$$

und folglich:

$$R = \tfrac{1}{2} a\pi \tang (45^0 - \tfrac{1}{2}\overline{\omega})^{\mu}.$$

Kehren wir noch einmal zu der aus dem Obigen bekannten Formel:

$$lR = l.\tang \tfrac{1}{2} u^{\mu} + lC$$

zurück, so ist klar, dass man in dieser Gleichung statt der natürlichen Logarithmen auch gemeine Logarithmen setzen kann, wodurch man die Gleichung:

$$\log R = \log.\tang \tfrac{1}{2} u^{\mu} + \log C,$$

also:

$$\log R = \mu \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}u + \log C,$$

oder:

$$\frac{1}{\mu} \log R = \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}u + \frac{1}{\mu} \log C,$$

und folglich, wenn man für $\operatorname{tang} \frac{1}{2}u$ den aus dem Obigen bekannten Ausdruck einführt, die Gleichung:

$$\frac{1}{\mu} \log R = \log \operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}) + \frac{e}{2} \log \frac{1 + e \sin \bar{\omega}}{1 - e \sin \bar{\omega}} + \frac{1}{\mu} \log C$$

erhält.

Setzt man

$$e \sin \bar{\omega} = \sin \varphi,$$

so wird diese Gleichung:

$$\frac{1}{\mu} \log R = \log \operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}) - e \log \operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) + \frac{1}{\mu} \log C$$

oder:

$$\frac{1}{\mu} \log R = e \log \operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) - \log \operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2}\bar{\omega}) + \frac{1}{\mu} \log C,$$

wo man statt der Logarithmen log auch natürliche Logarithmen setzen kann.

Für die Grösse

$$l \operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2}\bar{\omega}) - el \operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

welche ich durch v bezeichnen will, und daher

$$v = l \operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2}\bar{\omega}) - el \operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

setzen werde, hat Lambert a. a. O. S. 194 eine Tafel gegeben, in welcher:

$$\begin{aligned} e &= 0{,}0931490 \\ e^2 &= 0{,}0086767 \\ e^4 &= 0{,}0000753 \\ e^6 &= 0{,}0000006 \end{aligned}$$

gesetzt worden ist, für

$$a = 1, \quad b = \frac{229}{230}.$$

Diese Tafel theile ich nachstehend unter A. mit.

A.

$\bar{\omega}$	$l\tan(45^0+\frac{1}{2}\bar{\omega})$	$el\tan(45^0+\frac{1}{2}\varphi)$	v
5	0,0873773	0,0007560	0,0866213
10	0,1754259	0,0015068	0,1739191
15	0,2648420	0,0022461	0,2625959
20	0,3563785	0,0029686	0,3534099
25	0,4508754	0,0036688	0,4472066
30	0,5493061	0,0043414	0,5449647
35	0,6528365	0,0049814	0,6478551
40	0,7629098	0,0055839	0,7573259
45	0,8813736	0,0061442	0,8752294
50	1,0106831	0,0066579	1,0040252
55	1,1542346	0,0071217	1,1471134
60	1,3169578	0,0075305	1,3094273
65	1,5064543	0,0078825	1,4985718
70	1,7354151	0,0081742	1,7272409
75	2,0275894	0,0084036	2,0191848
80	2,4362460	0,0085688	2,4276772
85	3,1312990	0,0086685	3,1226315
90	∞	0,0087019	∞

§. 5.

Wir wollen jetzt die Breite $\bar{\omega}$ zu bestimmen suchen, für welche das Vergrösserungsverhältniss

$$\frac{\partial R}{\partial s}=\frac{\mu R}{r}$$

ein Kleinstes oder ein Grösstes wird.

Durch Differentiation erhalten wir:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial R}{\partial s}\right)}{\partial\bar{\omega}}=\mu\frac{r\frac{\partial R}{\partial\bar{\omega}}-R\frac{\partial r}{\partial\bar{\omega}}}{r^2},$$

so dass also

$$r\frac{\partial R}{\partial\bar{\omega}}-R\frac{\partial r}{\partial\bar{\omega}}=0$$

die gemeinschaftliche Bedingung des Kleinsten und Grössten ist.

Durch fernere Differentiation erhält man:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\partial R}{\partial s}\right)}{\partial\bar{\omega}^2} = \frac{r\left(r\frac{\partial^2 R}{\partial\bar{\omega}^2} - R\frac{\partial^2 r}{\partial\bar{\omega}^2}\right) - 2\frac{\partial r}{\partial\bar{\omega}}\left(r\frac{\partial R}{\partial\bar{\omega}} - R\frac{\partial r}{\partial\bar{\omega}}\right)}{r^3},$$

wofür man aber, weil es sich bloss um die Werthe von $\bar{\omega}$ handelt, für welche der erste Differentialquotient verschwindet, für welche also die Gleichung

$$r\frac{\partial R}{\partial\bar{\omega}} - R\frac{\partial r}{\partial\bar{\omega}} = 0$$

erfüllt ist, kürzer:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\partial R}{\partial s}\right)}{\partial\bar{\omega}^2} = \frac{r\frac{\partial^2 R}{\partial\bar{\omega}^2} - R\frac{\partial^2 r}{\partial\bar{\omega}^2}}{r^2}.$$

setzen kann, so dass also die Bedingung eines Kleinsten

$$r\frac{\partial^2 R}{\partial\bar{\omega}^2} - R\frac{\partial^2 r}{\partial\bar{\omega}^2} > 0,$$

die Bedingung eines Grössten

$$r\frac{\partial^2 R}{\partial\bar{\omega}^2} - R\frac{\partial^2 r}{\partial\bar{\omega}^2} < 0$$

ist.

Nach §. 4. ist:

$$\frac{\partial R}{\partial\bar{\omega}} = -\mu R'\frac{1-e^2}{\cos\bar{\omega}\,(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)},$$

und nach §. 2. ist:

$$r = \frac{a\cos\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial r}{\partial\bar{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)\sin\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Also ist, wie man leicht findet:

$$r\frac{\partial R}{\partial\bar{\omega}} - R\frac{\partial r}{\partial\bar{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)R}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}(\mu - \sin\bar{\omega}),$$

und die allgemeine Bedingung des Kleinsten und Grössten ist folglich:

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1+e\sin\bar{\omega}}{1-e\sin\bar{\omega}}\right)=\frac{2\sin\bar{\omega}}{(1-e\sin\bar{\omega})^2}$$

ist:

$$\frac{f'(e)}{f(e)}=\tfrac{1}{2}l\frac{1+e\sin\bar{\omega}}{1-e\sin\bar{\omega}}+\frac{e\sin\bar{\omega}}{1-e^2\sin\bar{\omega}^2},$$

und folglich, wenn man der Kürze wegen:

$$\varphi(e)=\tfrac{1}{2}l\frac{1+e\sin\bar{\omega}}{1-e\sin\bar{\omega}}+\frac{e\sin\bar{\omega}}{1-e^2\sin\bar{\omega}^2}$$

setzt:

$$f'(e)=f(e).\varphi(e),$$

woraus sich sogleich:

$$f''(e)=f(e).\varphi'(e)+f'(e).\varphi(e)$$

und:

$$f'''(e)=f(e).\varphi''(e)+2f'(e).\varphi'(e)+f''(e).\varphi(e)$$

ergiebt.

Mittelst leichter Rechnung findet man:

$$\varphi'(e)=\frac{2\sin\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^2},$$

und hieraus ferner:

$$\varphi''(e)=\frac{8e\sin\bar{\omega}^2}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^3}.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich nach und nach:

$$\begin{aligned}
f\ (0)&=1,\\
\varphi\ (0)&=0,\\
f'\ (0)&=0,\\
\varphi'\ (0)&=2\sin\bar{\omega},\\
f''\ (0)&=2\sin\bar{\omega},\\
\varphi''\ (0)&=0,\\
f'''\ (0)&=0.
\end{aligned}$$

Nach §. 4. ist:

$$\tang\tfrac{1}{2}u=\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar{\omega}).\left(\frac{1+e\sin\bar{\omega}}{1-e\sin\bar{\omega}}\right)^{\frac{e}{2}},$$

und weil nun bekanntlich im Allgemeinen

$$-90^0<\bar{\omega}<+90^0,$$

also:

$$-45^0 < \tfrac{1}{2}\bar{\omega} < +45^0$$

ist, so ist offenbar

$$0 < 45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega} < +90^0,$$

und daher $\operatorname{tang}\frac{1}{2}u$ positiv, auch noch für $\bar{\omega} = \mp 90^0$; folglich wird man den Bogen $\frac{1}{2}u$ immer zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen berechtigt sein.

Wenn überhaupt

$$y = F(x)$$

ist, so ist:

$$\frac{\partial \operatorname{Arc\,tang} y}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Arc\,tang} y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$
$$= \frac{F'(x)}{1+\{F(x)\}^2},$$

und folglich ferner:

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Arc\,tang} y}{\partial x^2} = \frac{\{1+[F(x)]^2\}F''(x) - 2F(x)\{F'(x)\}^2}{\{1+[F(x)]^2\}^2}.$$

Nach dem Obigen ist:

$$\tfrac{1}{2}u = \operatorname{Arc\,tang}\{\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}) \cdot f(e)\},$$

folglich für $e = 0$:

$$\tfrac{1}{2}u = \operatorname{Arc\,tang}\{\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega})\} = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\bar{\omega},$$

also:

$$u = \tfrac{1}{2}\pi - \bar{\omega}.$$

Ferner ist nach dem Vorhergehenden:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}) \cdot f'(e)}{1+\{\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}) \cdot f(e)\}^2},$$

und folglich für $e = 0$:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial e} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial e} = 0.$$

Der Zähler und der Nenner von

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial e^2}$$

sind respective:

$$\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega).\{1+[\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega).f(e)]^2\}.f''(e)$$
$$-2\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)^3.f(e).\{f'(e)\}^2$$

und:

$$\{1+[\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega).f(e)]^2\}^2;$$

also ist der Werth von

$$\tfrac{1}{2}.\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}$$

für $e=0$:

$$\frac{\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)\{1+\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)^2\}.2\sin\bar\omega}{\{1+\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)^2\}^2}$$

$$=\frac{2\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)\sin\bar\omega}{1+\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)^2}=2\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)\cos(45-\tfrac{1}{2}\bar\omega)\sin\bar\omega$$
$$=\sin(90^0-\bar\omega)\sin\bar\omega=\sin\bar\omega\cos\bar\omega=\tfrac{1}{2}\sin 2\bar\omega,$$

und der Werth von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}$$

für $e=0$ ist folglich $\sin 2\bar\omega$.

Der Differentialquotient des Zählers von

$$\tfrac{1}{2}.\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}$$

ist nach dem Obigen:

$$\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)\{1+[\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega).f(e)]^2\}.f'''(e)$$
$$+2\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)^3.f(e).f'(e).f''(e)$$
$$-2\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)^3.\{f'(e)\}^3$$
$$-4\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)^3.f(e).f'(e).f'''(e),$$

und nach dem Obigen verschwindet also dieser Differentialquotient für $e=0$.

Der Differentialquotient des Nenners von

$$\tfrac{1}{2}.\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}$$

ist nach dem Obigen:

$$4\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega)^2.\{1+[\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\bar\omega).f(e)]^2\}.f(e).f'(e),$$

und dieser Differentialquotient verschwindet also gleichfalls für $e=0$.

Also verschwindet offenbar der Zähler von

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial e^3},$$

und daher $\frac{\partial^3 u}{\partial e^3}$ selbst, für $e = 0$.

Folglich ist nach dem Maclaurin'schen Satze:

$$u = \tfrac{1}{2}\pi - \bar{\omega} + \tfrac{1}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega},$$

wobei erst Glieder vernachlässigt sind, welche die vierte Potenz von e enthalten.

Für $\bar{\omega}' = \frac{1}{2}\pi - \bar{\omega}$, also $\bar{\omega} = \frac{1}{2}\pi - \bar{\omega}'$ ist $2\bar{\omega} = \pi - 2\bar{\omega}'$, folglich $\sin 2\bar{\omega} = \sin 2\bar{\omega}'$, und daher nach dem Obigen:

$$u = \bar{\omega}' + \tfrac{1}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}'.$$

Herr A. Germain nennt $\bar{\omega}'$ die Entfernung vom Pol, u die corrigirte Entfernung vom Pol.

Für $\bar{\omega}' + \bar{\omega}'' = \pi$ ist $2\bar{\omega}'' = 2\pi - 2\bar{\omega}'$, $\sin 2\bar{\omega}'' = -\sin 2\bar{\omega}'$, folglich:

$$\tfrac{1}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}'' = -\tfrac{1}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}'.$$

Solange $\bar{\omega}'$ nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$, also $2\bar{\omega}'$ nicht grösser als π ist, ist die Correction $\frac{1}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}'$ additiv; ist aber $\bar{\omega}'$ grösser als $\frac{1}{2}\pi$, also $2\bar{\omega}'$ grösser π, so ist die Correction $\frac{1}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}'$ substractiv. Dass die absoluten Werthe der Correctionen wiederkehren, erhellet aus dem Obigen.

Herr A. Germain hat eine Tafel berechnet, für die Abplattung $\frac{1}{299{,}15}$, zur Berechnung der corrigirten Entfernungen vom Pol, welche ich nachstehend unter B. mittheile. Die Entfernungen vom Pol sind in dieser Tafel nur von 0 bis 90° gezählt, was nach dem Vorhergehenden auch nur nöthig ist, wenn man nur das Zeichen der Correction nach der obigen Regel gehörig berücksichtigt.

Für $\bar{\omega}' + \bar{\omega}'' = \frac{1}{2}\pi$ ist $2\bar{\omega}'' = \pi - 2\bar{\omega}'$, also $\sin 2\bar{\omega}'' = \sin 2\bar{\omega}'$, folglich

$$\tfrac{1}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}'' = \tfrac{1}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}',$$

und diese Correctionen sind also einander gleich.

B.

Abstand vom Pol corrigirt wegen der Abplattung $\frac{1}{299,15}$

Abstand vom Pol oder Complement der Breite auf der Kugel.	Zu addirende Correction, um den Abstand vom Pol u für das Ellipsoid zu erhalten.	Differenzen.
1° oder 89°	0° 0′ 24″,0	
2 „ 88	0 48,0	24″,0
3 „ 87	1 11,9	23.9
4 „ 86	1 35,8	23,9
5 „ 85	1 59,5	23,7
6 „ 84	2 23,1	23,6
7 „ 83	2 46,5	23,4
8 „ 82	3 9,7	23,2
9 „ 81	3 32,7	23,0
10 „ 80	3 55,4	22,7
11 „ 79	4 17,8	22,4
12 „ 78	4 39,9	22.1
13 „ 77	5 1,7	21,8
14 „ 76	5 23,1	21,4
15 „ 75	5 44,1	21,0
16 „ 74	6 4,7	20,6
17 „ 73	6 24,9	20,2
18 „ 72	6 44,6	19,7
19 „ 71	7 3,8	19,2
20 „ 70	7 22,5	18,7
21 „ 69	7 40,6	18,1
22 „ 68	7 58,2	17,6
23 „ 67	8 15,1	16,9
24 „ 66	8 31,5	16,4
25 „ 65	8 47,3	15,8
26 „ 64	9 2,4	15,1
27 „ 63	9 16,8	14,4
28 „ 62	9 30.5	13,7
29 „ 61	9 43,7	13,2
30 „ 60	9 56,1	12,4
31 „ 59	10 7,7	11,6
32 „ 58	10 18,7	11,0
33 „ 57	10 28,8	10,1
34 „ 56	10 38,2	9,4
35 „ 55	10 46,8	8,6
36 „ 54	10 54,7	7,9
37 „ 53	11 1,7	7,0
38 „ 52	11 7,9	6,2
39 „ 51	11 13,3	5,4
40 „ 50	11 17,8	4.5
41 „ 49	11 21,6	3,8
42 „ 48	11 24,6	3,0
43 „ 47	11 26,7	2,1
44 „ 46	11 27,9	1,2
45 „ 45	11 28,3	0,4

§. 7.

Wir wissen, dass durch das Bisherige von den beiden Gleichungen:

$$\mu(R+\Delta R)\Delta s = (r+\Delta r)\Delta R,$$

$$\mu R\Delta s = r\Delta R;$$

von denen die eine auch durch die aus denselben durch Subtraction folgende Gleichung:

$$\mu\Delta R\Delta s = \Delta r\Delta R \text{ also } \mu\Delta s = \Delta r$$

ersetzt werden kann, nur die eine erfüllt wird, dass dies aber für jedes beliebige μ und C geschieht. Daher schlägt Lambert zur Bestimmung der Constanten μ vor, dass wenigstens für eine gegebene bestimmte Breite $\bar{\omega}$ noch eine der drei obigen Gleichungen, wozu man am Einfachsten die Gleichung

$$\mu\Delta s = \Delta r$$

wählen wird, erfüllt wird. Betreten wir diesen Weg, so folgt aus der vorstehenden Gleichung auf der Stelle:

$$\mu = \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{\Delta r}{\Delta\bar{\omega}} : \frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}},$$

wofür man nach den im Bisherigen immer befolgten Principien die Gränzgleichung:

$$\mu = \frac{\partial r}{\partial\bar{\omega}} : \frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}$$

zu setzen hat; und da nun nach §. 2:

$$\frac{\partial r}{\partial\bar{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)\sin\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}} = -\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ist, so erhält man auf der Stelle:

$$\mu = \sin\bar{\omega},$$

welchen Werth man für μ setzen muss, wenn der oben angegebene Zweck erreicht werden soll; natürlich kann die Breite $\bar{\omega}$ ganz beliebig angenommen werden, und ist in einzelnen Fällen den besonderen zu erreichenden Zwecken gemäss zu bestimmen.

Sowohl Lambert a. a. O. S. 197. §. 121. als auch Herr A. Germain a. a. O. p. 60. haben bei dieser Bestimmung einen anderen Weg eingeschlagen, auf dem sie — ohne strenge Grän-

zenbetrachtungen — mit verschiedenen ziemlich willkührlichen Vernachlässigungen im Sinne und in der Weise der älteren Analysis zu weniger einfachen, nicht völlig mit einander übereinstimmenden Formeln gelangt sind, welcher letztere Umstand schon gegen die völlige Richtigkeit ihrer Entwickelungen zu sprechen scheint.

Verfolgt man den von ihnen eingeschlagenen Weg mittelst einer strengen Gränzenbetrachtung, ohne sich willkührliche Vernachlässigungen zu gestatten, so gelangt man allerdings auch auf diesem weitläufigeren Weg genau zu demselben von uns vorher auf kürzerem Wege gefundenen Resultate, wie wir jetzt noch zeigen wollen.

Beide vorher genannte Mathematiker gehen von den beiden Gleichungen:

$$\mu(R+\Delta R)\Delta s = (r+\Delta r)\Delta R,$$

$$\mu R\Delta s = r\Delta R$$

aus. Betrachten wir

$$R+\Delta R,\quad r+\Delta r,\quad s+\Delta s$$

sämmtlich als der Breite $\overline{\omega}'=\overline{\omega}+\Delta\overline{\omega}$ entsprechend, und bezeichnen der Kürze wegen diese Grössen durch

$$R',\quad r',\quad s';$$

so haben wir nach dem Obigen die beiden Gleichungen:

$$\mu R'\Delta s = r'\Delta R,$$

$$\mu R\Delta s = r\Delta R;$$

oder:

$$\mu\frac{R'}{\Delta R} = \frac{r'}{\Delta s},\quad \mu\frac{R}{\Delta R} = \frac{r}{\Delta s};$$

also:

$$\mu\frac{\frac{R'}{\Delta R}}{\frac{\Delta}{\Delta\overline{\omega}}} = \frac{\frac{r'}{\Delta s}}{\frac{\Delta}{\Delta\overline{\omega}}},\quad \mu\frac{\frac{R}{\Delta R}}{\frac{\Delta}{\Delta\overline{\omega}}} = \frac{\frac{r}{\Delta s}}{\frac{\Delta}{\Delta\overline{\omega}}};$$

und folglich:

$$\mu\frac{\frac{R'-R}{\Delta R}}{\frac{\Delta}{\Delta\overline{\omega}}} = \frac{\frac{r'}{\Delta s}}{\frac{\Delta}{\Delta\overline{\omega}}} - \frac{\frac{r}{\Delta s}}{\frac{\Delta}{\Delta\overline{\omega}}};$$

also:

$$\mu\frac{\Delta R}{\frac{\Delta R}{\Delta\bar{\omega}}}=\frac{r'}{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}\cdot\frac{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}-\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}},$$

wobei wir uns $\Delta\bar{\omega}'=\Delta\bar{\omega}$ gesetzt denken wollen. Diese Gleichung kann man auf folgende Art ausdrücken:

$$\mu\frac{\Delta R}{\frac{\Delta R}{\Delta\bar{\omega}}}=\mu\Delta\bar{\omega}$$

$$=\frac{r'}{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}-\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}-\frac{r'}{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}\left(1-\frac{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}\right),$$

folglich:

$$\mu=\frac{\frac{r'}{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}-\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}}{\Delta\bar{\omega}}-\frac{r'}{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}\cdot\frac{1-\frac{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}}{\Delta\bar{\omega}}.$$

Weil nun aus den Grössen

$$\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}\text{ und }\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}$$

die Grössen

$$\frac{r'}{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}\text{ und }\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}$$

hervorgehen, wenn man in den ersteren $\bar{\omega}'=\bar{\omega}+\Delta\bar{\omega}$ für $\bar{\omega}$ setzt, so ist:

$$\frac{r'}{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}=\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}+\Delta\left[\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}\right],$$

$$\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}=\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}+\Delta\left[\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}\right];$$

also:

$$\frac{r'}{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}-\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}=\Delta\left[\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}\right],$$

$$1-\frac{\frac{\Delta s'}{\Delta\bar{\omega}'}}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}=-\frac{\Delta\left[\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}\right]}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}};$$

folglich nach dem Obigen:

$$\mu=\frac{\Delta\left[\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}\right]}{\Delta\bar{\omega}}+\left\{\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}+\Delta\left[\frac{r}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}}\right]\right\}\cdot\frac{\Delta\left[\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}\right]}{\Delta\bar{\omega}}\cdot\frac{1}{\frac{\Delta s}{\Delta\bar{\omega}}},$$

also, wenn man für ein der Null sich näherndes $\Delta\bar{\omega}$ zu der Gränzgleichung übergeht:

$$\mu=\frac{\partial\left(\frac{r}{\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}}\right)}{\partial\bar{\omega}}+\frac{r}{\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}\right)}{\partial\bar{\omega}}\cdot\frac{1}{\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}}$$

oder:

$$\mu=\frac{\partial\left(\frac{r}{\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}}\right)}{\partial\bar{\omega}}+\frac{r}{\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}}\cdot\frac{\frac{\partial^2 s}{\partial\bar{\omega}^2}}{\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}}.$$

Nach §. 2. ist:

$$r=\frac{a\cos\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}},\quad\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}=-\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}};$$

also:

$$\frac{r}{\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}}=-\frac{\cos\bar{\omega}\,(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)}{1-e^2},$$

folglich, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial\left(\frac{r}{\frac{\partial s}{\partial\bar{\omega}}}\right)}{\partial\bar{\omega}}=\frac{\sin\bar{\omega}\{1-e^2(1-3\cos\bar{\omega}^2)\}}{1-e^2}.$$

Ferner erhält man leicht:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial\bar{\omega}^2}=-\frac{3ae^2(1-e^2)\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also wie man leicht übersieht:

$$\frac{r}{\frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 s}{\partial \overline{\omega}^2}}{\frac{\partial s}{\partial \overline{\omega}}} = -\frac{3e^2 \sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}^2}{1-e^2}.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$\mu = \frac{\sin\overline{\omega}\{1-e^2(1-3\cos\overline{\omega}^2)\}}{1-e^2} - \frac{3e^2\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}^2}{1-e^2}$$
$$= \frac{(1-e^2)\sin\overline{\omega}}{1-e^2} = \sin\overline{\omega},$$

ganz eben so wie wir vorher gefunden haben.

Die von Lambert und Herrn A. Germain an den angegebenen Stellen entwickelten Formeln sind beziehungsweise:

$$\mu = \sin\overline{\omega} - e^2\sin\overline{\omega}(1-3\cos\overline{\omega}^2)$$

und:

$$\mu = \frac{\cos(90^0-\overline{\omega}) - e^2\cos(90^0-\overline{\omega})\{1-3\sin(90^0-\overline{\omega})^2\}}{1-e^2},$$

da man für die Entfernung Z vom Pol bei Herrn A. Germain natürlich in unseren Zeichen $90^0-\overline{\omega}$ setzen muss.

Beide Formeln kann ich aus den oben angegebenen Gründen nicht für richtig, wenigstens nicht als nach strengen mathematischen Principien entwickelt ansehen.

XIII.

N o t e,

par

Monsieur *J. Versluys*,
Professeur de Mathématiques à Groningue (Pays-Bas.).

Les réductions dont j'ai parlé dans le §. 3 de mon Mémoire: **Applications nouvelles des déterminants à l'algèbre et à la géométrie. No. XI. pag. 157.** sont les suivantes:

En différentiant les équations linéaires données on trouve

$$\alpha + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\alpha_1 + \gamma_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \delta_1 \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\beta + \gamma \frac{\partial z}{\partial y} + \delta \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\beta_1 + \gamma_1 \frac{\partial z}{\partial y} + \delta_1 \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

De ces équations on trouve

$$-\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\alpha\delta_1 - \alpha_1\delta}{\gamma\delta_1 - \gamma_1\delta'} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\delta\gamma_1 - \delta_1\gamma'} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\beta\delta_1 - \beta_1\delta}{\gamma\delta_1 - \gamma_1\delta'} - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma}{\delta\gamma_1 - \delta_1\gamma'}.$$

En substituant ces valeurs, la résultante dont nous avons parlé, vient d'abord sous la forme

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & \frac{\alpha\delta_1-\alpha_1\delta}{\gamma\delta_1-\gamma_1\delta} & \frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\delta\gamma_1-\delta_1\gamma} \\ n & b & l & q & \frac{\beta\delta_1-\beta_1\delta}{\gamma\delta_1-\delta_1\gamma} & \frac{\beta\gamma_1-\beta_1\gamma}{\delta\gamma_1-\delta_1\gamma} \\ m & l & c & r & 1 & 0 \\ p & q & r & d & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & & \end{vmatrix}$$

Multipliant la dernière colonne par $\delta\gamma_1-\delta_1\gamma$, et l'avant-dernière par $\gamma\delta_1-\delta_1\gamma$, on obtient

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & \alpha\delta_1-\alpha_1\delta & \alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma \\ n & b & l & q & \beta\delta_1-\beta_1\delta & \beta\gamma_1-\beta_1\gamma \\ m & l & c & r & \gamma\delta_1-\gamma_1\delta & \gamma\gamma_1-\gamma_1\gamma \\ p & q & r & d & \delta\delta_1-\delta_1\delta & \delta\gamma_1-\delta_1\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & & \end{vmatrix}$$

Développant ce déterminant suivant les deux dernières colonnes, et faisant usage de la propriété qu'un déterminant s'évanouit quand deux de ses colonnes sont identiques, on obtient la résultante sous la forme

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & \alpha & \alpha_1 \\ n & b & l & q & \beta & \beta_1 \\ m & l & c & r & \gamma & \gamma_1 \\ p & q & r & d & \delta & \delta_1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & & \end{vmatrix}$$

XIV.

Ueber den Schwerpunkt des Trapeziums, insbesondere über die graphische Bestimmung desselben.

Von

dem Herausgeber.

(Figuren s. Taf. VIII.)

In dem Trapezium $ABCD$ (Fig. 1.) sei $AB=a$, $CD=b$; die Höhe des Trapeziums sei k; alle diese Grössen werden als positiv betrachtet.

Man nehme A als den Anfang, AB als den positiven Theil der Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, in welchem die positiven y von AB an nach der Seite von CD hin genommen werden; die gehörig als positiv oder negativ betrachtete erste Coordinate des Punktes C in diesem Systeme sei c. Unter diesen Voraussetzungen sind die

Coordinaten von A: $0,\ 0$;
„ „ B: $a,\ 0$;
„ „ C: $c,\ k$;
„ „ D: $c-b,\ k$.

Folglich sind nach einem bekannten Satze die

Coordinaten des Schwerpunkts von ΔABC:

$$\tfrac{1}{3}(0+a+c)=\tfrac{1}{3}(a+c),\quad \tfrac{1}{3}(0+0+k)=\tfrac{1}{3}k;$$

Coordinaten des Schwerpunkts von ΔACD:

$\frac{1}{3}(0+c+c-b) = \frac{1}{3}(2c-b)$, $\frac{1}{3}(0+h+h) = \frac{2}{3}h$;

oordinaten des Schwerpunkts von ΔABD:

$\frac{1}{3}(0+a+c-b) = \frac{1}{3}(a-b+c)$, $\frac{1}{3}(0+0+h) = \frac{1}{3}h$;

Coordinaten des Schwerpunkts von ΔBCD:

$\frac{1}{3}(a+c+c-b) = \frac{1}{3}(a-b+2c)$, $\frac{1}{3}(0+h+h) = \frac{2}{3}h$.

Daher ist die Gleichung der Geraden durch die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ACD:

$$y-\tfrac{1}{3}h = \frac{\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}h}{\frac{1}{3}(2c-b)-\frac{1}{3}(a+c)}\{x-\tfrac{1}{3}(a+c)\},$$

also:

$$y-\tfrac{1}{3}h = \frac{h}{c-a-b}\{x-\tfrac{1}{3}(a+c)\} \quad \ldots\ldots (\text{I.});$$

und die Gleichung der Geraden durch die Schwerpunkte der Dreiecke ABD und BCD ist:

$$y-\tfrac{1}{3}h = \frac{\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}h}{\frac{1}{3}(a-b+2c)-\frac{1}{3}(a-b+c)}\{x-\tfrac{1}{3}(a-b+c)\},$$

also:

$$y-\tfrac{1}{3}h = \frac{h}{c}\{x-\tfrac{1}{3}(a-b+c)\} \quad \ldots\ldots (\text{II.}).$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Schwerpunkts des Trapeziums $ABCD$ durch X, Y; so haben wir nach (I.) und (II.) zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$Y-\tfrac{1}{3}h = \frac{h}{c-a-b}\{X-\tfrac{1}{3}(a+c)\},$$

$$Y-\tfrac{1}{3}h = \frac{h}{c}\{X-\tfrac{1}{3}(a-b+c)\};$$

aus denen man durch Elimination von Y zur Bestimmung von X sogleich die Gleichung:

$$\frac{X-\frac{1}{3}(a+c)}{c-a-b} = \frac{X-\frac{1}{3}(a-b+c)}{c}$$

oder:

$$\frac{X-\frac{1}{3}(a+c)}{c-a-b} = \frac{X-\frac{1}{3}(a+c)+\frac{1}{3}b}{c},$$

und hieraus ohne alle Schwierigkeit:

$$1) \ldots\ldots\ldots X-\tfrac{1}{2}(a+c)=\frac{b(c-a-b)}{3(a+b)},$$

also:

$$2) \ldots\ldots\ldots X=\tfrac{1}{2}(a+c)+\frac{b(c-a-b)}{3(a+b)},$$

oder:

$$3) \ldots\ldots\ldots X=\frac{(a+b)(a-b+c)+bc}{3(a+b}$$

oder auch:

$$4) \ldots\ldots\ldots X=\tfrac{1}{2}(a-b+c+\frac{bc}{a+b})$$

erhält. Diese Ausdrücke von X sind sämmtlich von der Höhe des Trapeziums unabhängig, was man leicht geometrisch zu deuten verstehen wird.

Ferner ist nach dem Obigen:

$$Y-\tfrac{1}{2}h=\frac{h}{c-a-b}\cdot\frac{b(c-a-b)}{3(a+b)},$$

also:

$$5) \ldots\ldots\ldots Y-\tfrac{1}{2}h=\frac{bh}{3(a+b)},$$

oder:

$$6) \ldots\ldots\ldots Y=\tfrac{1}{2}h+\frac{bh}{3(a+b)}=\frac{(a+2b)h}{3(a+b)},$$

und folglich:

$$7) \ldots\ldots\ldots h-Y=\frac{(2a+b)h}{3(a+b)}.$$

Die Coordinaten zweier Punkte seien:

$$a+b,\ 0 \quad \text{und} \quad -(a+b-c),\ h.$$

Die Gleichung der durch diese beiden Punkte gehenden Geraden ist:

$$y=-\frac{h}{2a+2b-c}\{x-(a+b)\}.$$

Nach 3) ist:

$$X-(a+b)=\frac{(a+b)(a-b+c)+bc}{3(a+b)}-(a+b),$$

also, wie man leicht findet:

$$X-(a+b)=\frac{(a+2b)(c-2a-2b)}{3(a+b)},$$

und folglich, wenn man dies für $x-(a+b)$ in die obige Gleichung einführt:

$$y=-\frac{h}{2a+2b-c}\cdot\frac{(a+2b)(c-2a-2b)}{3(a+b)}=\frac{(a+2b)h}{3(a+b)},$$

also $y=Y$ nach 6). Hieraus ergiebt sich, dass die durch die beiden, durch die Coordinaten

$$a+b,\ 0 \quad \text{und} \quad -(a+b-c),\ h$$

bestimmten Punkte gehende Gerade durch den Schwerpunkt (XY) des Trapeziums geht.

Macht man in Fig. 2, auf den Verlängerungen der parallelen Seiten des Trapeziums $BB'=CD=b$, $DD'=AB=a$; so sind die Coordinaten der Punkte B' und D' offenbar respective $a+b$, 0 und $-(a+b-c)$, h; und die Linie $B'D'$ geht also nach dem Obigen durch den Schwerpunkt (XY) des Trapeziums.

Die Coordinaten zweier Punkte seien ferner:

$$-b,\ 0 \quad \text{und} \quad a+c,\ h.$$

Die Gleichung der durch diese beiden Punkte gehenden Geraden ist:

$$y=\frac{h}{a+b+c}(x+b).$$

Nach 3) ist:

$$X+b=\frac{(a+b)(a-b+c)+bc}{3(a+b)}+b=\frac{(a+b+c)(a+2b)}{3(a+b)},$$

und folglich, wenn man dies für $x+b$ in die obige Gleichung einführt:

$$y=\frac{h}{a+b+c}\cdot\frac{(a+b+c)(a+2b)}{3(a+b)}=\frac{(a+2b)h}{3(a+b)},$$

also $y=Y$ nach 6). Hieraus ergiebt sich, dass die durch die beiden, durch die Coordinaten

$$-b,\ 0 \quad \text{und} \quad a+c,\ h$$

bestimmten Punkte gehende Gerade durch den Schwerpunkt (XY) des Trapeziums geht.

Macht man in Fig. 2. auf den Verlängerungen der parallelen

Seiten des Trapezium's $AA' = CD = b$, $CC = AB = a$; so sind die Coordinaten der Punkte A' und C' offenbar respective $-b$, 0 und $a+c$, h; und die Linie $A'C'$ geht also nach dem Obigen durch den Schwerpunkt (XY) des Trapezium's.

Da nun der Schwerpunkt des Trapezium's bekanntlich auch in der die Mittelpunkte M und N der parallelen Seiten des Trapezium's mit einander verbindenden Geraden liegt, so führt das Vorhergehende unmittelbar zu der folgenden graphischen Bestimmung des Schwerpunkts des Trapezium's:

Trägt man von den diagonalen Eckpunkten B und D oder A und C aus die gegenüberliegenden Parallelseiten CD und AB in den Verlängerungen der Parallelseiten in BB' und DD' oder in AA' und CC' auf, so schneidet die Gerade $B'D'$ oder $A'C'$ den Schwerpunkt S auf der Linie MN ab, welche die Mittelpunkte M und N der parallelen Seiten mit einander verbindet.

Diese Construction findet sich in: „Die graphische Statik von K. Culmann. Zürich. 1866. S. 151." Dieselbe ist zwar — theoretisch genommen — einfach, sie erfordert aber zu ihrer Ausführung meistens grossen Raum, und scheint sich daher für den praktischen Gebrauch nicht sehr zu empfehlen, weshalb ich im Folgenden ein Paar andere, weniger Raum erfordernde, gleichfalls einfache Constructionen geben werde, die freilich eine Eintheilung einer geraden Linie in gleiche Theile in Anspruch nehmen, welche aber graphisch durch einiges Probiren bei einiger Uebung immer leicht mit aller Genauigkeit ausgeführt werden kann.

Die Gleichung der Linie AB (Fig. 1.) ist $y = 0$.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der durch die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ACD gehenden Geraden mit der Linie AB durch u, v; so haben wir zu deren Bestimmung nach (I.) die Gleichungen:

$$v = 0,\quad v - \tfrac{1}{3}h = \frac{h}{c-a-b}\{u - \tfrac{1}{3}(a+c)\};$$

woraus sich leicht:

$$u = \tfrac{1}{3}(2a+b),$$

und hieraus ferner:

$$u - a = \tfrac{1}{3}(2a+b) - a = -\tfrac{1}{3}(a-b),$$
$$u - b = \tfrac{1}{3}(2a+b) - b = \tfrac{2}{3}(a-b)$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der durch die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ACD gehenden Geraden mit der Linie CD, deren Gleichung $y=h$ ist, durch u', v'; so ist nach (I.):

$$v' = h, \quad v' - \tfrac{1}{3}h = \frac{h}{c-a-b}\{u' - \tfrac{1}{3}(a+c)\};$$

woraus sich leicht:

$$u' = c - \tfrac{1}{3}(a+2b),$$

und hieraus ferner:

$$u' + a = c - \tfrac{1}{3}(a+2b) + a = c + \tfrac{2}{3}(a-b),$$

$$u' + b = c - \tfrac{1}{3}(a+2b) + b = c - \tfrac{1}{3}(a-b)$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die erste Coordinate des Durchschnittspunkts der durch die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ACD gehenden Geraden mit der Linie AB in Bezug auf B als Anfang durch u_1, so ist, weil a die primitive erste Coordinate von B ist:

$$u = a + u_1, \quad u_1 = u - a;$$

also nach dem Obigen:

$$u_1 = -\tfrac{1}{3}(a-b).$$

Bezeichnen wir ferner die erste Coordinate des Durchschnittspunkts der durch die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ACD gehenden Geraden mit der Linie CD in Bezug auf D als Anfang durch u_1', so ist, weil $c-b$ die primitive erste Coordinate von D ist:

$$u' = c - b + u_1', \quad u_1' = u' - (c-b);$$

also nach dem Obigen offenbar:

$$u_1' = -\tfrac{1}{3}(a-b).$$

Es ist also:

$$u_1 = u_1' = -\tfrac{1}{3}(a-b).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der durch die Schwerpunkte der Dreiecke ABD und BCD gehenden Geraden mit der Linie AB, deren Gleichung $y=0$ ist, durch p, q; so haben wir zu deren Bestimmung nach (II.) die Gleichungen:

$$q = 0, \quad q - \tfrac{1}{3}h = \frac{h}{c}\{p - \tfrac{1}{3}(a-b+c)\};$$

woraus sich leicht

$$p = \tfrac{1}{2}(a-b)$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der durch die Schwerpunkte der Dreiecke ABD und BCD gehenden Geraden mit der Linie CD, deren Gleichung $y = h$ ist, durch p', q'; so haben wir zu deren Bestimmung nach (II.) die Gleichungen:

$$q' = h, \quad q' - \tfrac{1}{2}h = \frac{h}{c}\{p' - \tfrac{1}{2}(a-b+c)\};$$

woraus sich leicht:

$$p' = c + \tfrac{1}{2}(a-b)$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die erste Coordinate des Durchschnittspunkts der durch die Schwerpunkte der Dreiecke ABD und BCD gehenden Geraden mit der Linie CD in Bezug auf C als Anfang durch p_1', so ist, weil c die primitive erste Coordinate von C ist:

$$p' = c + p_1', \text{ also } p_1' = p' - c = \tfrac{1}{2}(a-b).$$

Es ist also:

$$p = p_1' = \tfrac{1}{2}(a-b).$$

Hieraus ergeben sich nun unmittelbar die folgenden graphischen Bestimmungen des Schwerpunkts des Trapeziums:

In Fig. 2. mache man $AG = BH = CD = b$, so ist $AH = BG = AB - CD = a-b$; hierauf theile man AH und BG in drei gleiche Theile; die den Punkten A und B zunächst liegenden Theilpunkte seien beziehungsweise A'' und B''; macht man dann $CC'' = AA''$ und $DD'' = BB''$ und zieht die Geraden $A''C''$ und $B''D''$, so geht jede dieser beiden Geraden durch den Schwerpunkt des Trapeziums, welcher also deren Durchschnittspunkt ist.

Da der Schwerpunkt auch in der Geraden MN, welche die Mittelpunkte der parallelen Seiten AB und CD mit einander verbindet, liegt: so giebt jede Combination der drei Geraden $A''C''$, $B''D''$, MN zu zweien in dem Durchschnittspunkte der beiden Geraden den Schwerpunkt des Trapeziums.

Diese graphische Bestimmung bedarf zu ihrer Ausführung eines geringeren Raumes als die von Herrn Culmann gegebene Construction, und scheint mir sich daher zu der Anwendung in der Praxis besser zu eigenen als diese.

XV.

De seriebus quibusdam annotationes factae

a

Christiano Fr. Lindman,
Lectore Strengn.

1. Thomas Simpsonius integrandam proposuit*) aequationem differentialem

$$y + ay' - a^2y'' = 0$$

et reperit

$$y = A(x + \frac{x^2}{1.2.a} + \frac{2x^3}{1.2.3.a^2} + \frac{3x^4}{1.2.3.4.a^3} + \text{etc.}),$$

ubi est $A =$ const. et coëfficientes terminorum seriei infinitae sunt ejusmodi, ut consequens quaelibet sit aequalis summae duarum proxime antecedentium. Summa igitur seriei invenietur, si integrale aequationis differentialis sub forma finita exhiberi poterit. Quae res quamquam nihil habet negotii, tamen seriem ipsam adgredi libet. Itaque primum omnium quaerendum est, num sum-

*) Vide The Doctrine and Applic. of Fluxions. London 1805. p. 223.

mam habeat, id est, num convergens sit. Quod quoniam reperiri non poterit, nisi forma coëfficientium generalis cognita erit, ea prius quaerenda est. Si K_p designat coëfficientem p^{ti} termini, habemus aequationem

$$K_p = K_{p-1} + K_{p-2},$$

unde, ut docuit Eytelwein*), invenitur

$$K_p = \frac{\alpha_1{}^p - \alpha_2{}^p}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

ubi est $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, et terminus generalis

$$u_p = \frac{K_p x^p}{a^{p-1}\Gamma(p+1)}.$$

Jam vero series convergens est, si $\frac{u_{p+1}}{u_p}$ limiti, qui unitate minor est, indefinite appropinquat. Valoribus introductis habebimus

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{1+(-1)^p\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^{p+1}}{1+(-1)^{p-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^{p+1}} \cdot \frac{x(\sqrt{5}+1)}{2a(p+1)},$$

atque ideo

$$\lim_{(p=\infty)} \frac{u_{p+1}}{u_p} = 0.$$

Ex iis, quae jam dicta sunt, sequitur, ut summa ($=s$) seriei sit

$$s = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{K_p x^p}{a^{p-1}\Gamma(p+1)} = \frac{a}{\alpha_1-\alpha_2} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(\alpha_1{}^p - \alpha_2{}^p)x^p}{a^p\,\Gamma(p+1)}.$$

Quod si memoria repetimus formulam notissimam

$$e^{bz} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{b^p x^p}{\Gamma(p+1)},$$

facile patet, esse summam

$$s = \frac{a}{\alpha_1-\alpha_2}\left(e^{\frac{\alpha_1 z}{a}} - e^{\frac{\alpha_2 z}{a}}\right)$$
$$= \frac{a}{\sqrt{5}}\left[e^{\frac{\sqrt{5}+1}{2a}z} - e^{-\frac{\sqrt{5}-1}{2a}z}\right].$$

*) Grundlehren d. höheren Analysis. Berlin 1824. II. Band. pag. 971.

Positis

$$s_1 = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{K_p' x^p}{a^{p-1}\Gamma(p+1)}, \quad K_p' = mK_{p-1}' + nK_{p-2}',$$

non minus facile invenimus

$$K_p' = \frac{\alpha_1^p - \alpha_2^p}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

ubi tamen est $\alpha_1 = \frac{1}{2}(m + \sqrt{m^2+4n})$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}(m - \sqrt{m^2+4n})$. His valoribus in s substitutis, prodit s_1.

Si in aequatione Simpsonii ponimus $y = e^{\int t dx}$, facile invenitur

$$y = s.$$

II. Jam summam seriei

$$s_n = \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha}\cdot\frac{a+\beta}{\alpha+\beta} + \frac{a}{\alpha}\cdot\frac{a+\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{a+2\beta}{\alpha+2\beta} + \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{a}{\alpha}\cdot\frac{a+\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{a+2\beta}{\alpha+2\beta}\ldots\frac{a+\overline{n-1}.\beta}{\alpha+\overline{n-1}.\beta}$$

reperire conemur. Positis $\frac{a}{\beta} = r$, $\frac{\alpha}{\beta} = \varrho$, invenitur

$$s_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{r(r+1)\ldots(r+p)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+p)} = \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(r)} \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{\Gamma(r+p+1)}{\Gamma(\varrho+p+1)}.$$

Quum vero sit

$$\frac{\Gamma(r+p+1)}{\Gamma(\varrho+p+1)} = \frac{1}{\Gamma(\varrho-r)} \int_0^1 x^{r+p}(1-x)^{\varrho-r-1}dx,$$

evadit

$$s_n = \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(r)\,\Gamma(\varrho-r)} \sum_{p=0}^{p=n-1} \int_0^1 x^{r+p}(1-x)^{\varrho-r-1}dx$$

vel

$$s_n = \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(r)\,\Gamma(\varrho-r)} \int_0^1 x^r(1-x)^{\varrho-r-1}dx \sum_{p=0}^{p=n-1} x^p$$
$$= \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(r)\Gamma(\varrho-r)}\left[\int_0^1 x^r(1-x)^{\varrho-r-2}dx - \int_0^1 x^{n+r}(1-x)^{\varrho-r-2}dx\right].$$

Jam est

$$\int_0^1 x^r (1-x)^{\varrho-r-2} dx = \frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(\varrho-r-1}{\Gamma(\varrho)},$$

$$\int_0^1 x^{n+r} (1-x)^{\varrho-r-2} dx = \frac{\Gamma(n+r+1)\,\Gamma(\varrho-r-1)}{\Gamma(n+\varrho)},$$

ubi necesse est, sit $\varrho > r+1$, atque ideo invenitur

$$s_n = \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(r)\,\Gamma(\varrho-r)}\left[\frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(\varrho-r-1)}{\Gamma(\varrho)} - \frac{\Gamma(n+r+1)\,\Gamma(\varrho-r-1)}{\Gamma(n+\varrho)}\right]$$

vel

$$s_n = \frac{r}{\varrho-r-1}\left[1 - \frac{\Gamma(\varrho)\,\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n+\varrho)}\right].$$

E formula, a Laplace data *),

$$\Gamma(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}(1+\varepsilon),$$

ubi est $\varepsilon =$ quantitati, quae nihilo eo propius appropinquat, quo magis x crescit, sequitur, ut sit

$$\frac{\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(n+\varrho)} = \frac{(n+r+1)^{n+r+\frac{1}{2}} e^{-(n+r+1)}(1+\varepsilon)}{(n+\varrho)^{n+\varrho-\frac{1}{2}} e^{-(n+\varrho)}(1+\varepsilon')}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{r+1}{n}\right)^{n+r+\frac{1}{2}} e^{\varrho-r-1}(1+\varepsilon)}{\left(1+\frac{\varrho}{n}\right)^{n+\varrho-\frac{1}{2}} n^{\varrho-r-1}(1+\varepsilon')}.$$

Facile patet, esse

$$\lim_{(n=\infty)} \left(1+\frac{r+1}{n}\right)^n = e^{r+1},$$

$$\lim_{(n=\infty)} \left(1+\frac{\varrho}{n}\right)^n = e^{\varrho},$$

$$\lim_{(n=\infty)} \frac{1}{n^{\varrho-r-1}} = 0 \qquad (\varrho > r+1)$$

atque ideo

$$\lim_{(n=\infty)} \frac{\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(n+\varrho+1)} = 0.$$

Quae quum ita sint, sequitur, ut sit

$$s_\infty = \frac{a}{\alpha}\left(1+\frac{r+1}{\varrho-r-1}\right) = \frac{a}{\alpha-a-\beta}. \qquad (\alpha > a+\beta).$$

*) Vide Klügel, Math. Wörterb. I. Supplem.-Band pag. 200.

XVI.

Ein merkwürdiger Brief des achtzehnjährigen Lagrange an den Conte Giulio Carlo da Fagnano.

Nach
Herrn *Angelo Genocchi* in Turin
mitgetheilt von
dem Herausgeber.

In dem Literar. Ber. Nr. CLXXXXIV. S. 15. ist von uns in der durch die Literarischen Berichte gebotenen Kürze berichtet worden über die sehr verdienstliche und interessante Schrift des Herrn Placido Tardy in Genua:

Intorno ad una formola del Leibniz. Nota del Prof. Placido Tardy, Rettore della R. Università di Genova. Estratto dal Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo I. — Giugno 1868. Roma. 1868. 4°.

in welcher Herr P. Tardy sich in sehr eingehender und lehrreicher Weise mit der Geschichte der jetzt gewöhnlich nach Johann Bernoulli benannten Reihe *) beschäftigt, und das Hauptverdienst der Erfindung dieser Reihe und anderer hierher

*) M. s. z. B. Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, auctore S. l'Huilier. Tubingae. 1795. 4°. Caput IV. De serie Bernoulliana.

gehörender analytischer Ausdrücke auf Leibniz zurückführt. Auf diese Schrift des Herrn P. Tardy sind wir dann im Liter. Ber. Nr. CLXXXVI. S. 6. zurückgekommen, und haben verschiedene überaus dankenswerthe Bemerkungen zu derselben mitgetheilt, die von dem Herrn Principe B. Boncompagni in Rom uns gütigst zugesandt worden waren. In der That handelt es sich aber hierbei — was natürlich auch in den vorhergehenden Schriften keineswegs unbemerkt gelassen und schon besonders hervorgehoben und weiter ausgeführt worden ist — keineswegs bloss um die sogenannte Bernoulli'sche Reihe allein, sondern vielmehr im Allgemeinen und überhaupt um den ersten Gebrauch und die erste Erfindung des durch verschiedene neuere Mathematiker jetzt nach so vielen Richtungen hin so sehr ausgebildeten symbolischen Calculs mit Charakteristiken, zunächst insbesondere um die Newton'sche Binomialreihe, die Leibniz'sche Formel für die höheren Differentiale eines Products, und die jetzt gewöhnlich nach Johann Bernoulli benannte Reihe für ein Integral, in ihrem Verhältniss zu und ihrer gegenseitigen Abhängigkeit von einander.

Der obigen Schrift des Herrn P. Tardy hat jetzt Herr A. Genocchi in Turin die Schrift:

Di una formola del Leibniz e di una lettera di Lagrange al Conte Fagnano per Angelo Genocchi. Torino, Stamperia Reale. 1869. 8°.

folgen lassen, in welcher er in der eingehendsten und verdienstlichsten Weise die Geschichte dieses Gegenstandes vervollständigt und weiter ausführt, so dass wir auf diese neue Schrift des Herrn A. Genocchi neben der Schrift des Herrn P. Tardy dringend aufmerksam machen müssen.

Nun hatte aber schon Herr P. Tardy in seiner Schrift p. 9. bemerkt, dass im Jahre 1754 der junge achtzehnjährige, von Leibniz's Untersuchungen und Erfindungen nicht die geringste Kenntniss habende Lagrange in einem an den Conte Fagnano gerichteten Briefe demselben mitgetheilt hatte, dass er ganz dieselben vorher besprochenen Entdeckungen wie Leibniz — dessen Name natürlich in dem Briefe nicht mit einem Worte erwähnt wird — gemacht habe; und diesem Briefe von Lagrange ist die höchst verdienstliche und interessante Schrift des Herrn A. Genocchi vorzugsweise gewidmet. Derselbe ist in einer in dem oben genannten Jahre in Turin erschienenen Druckschrift veröffentlicht worden, und drei Jahre später im Jahre 1757 hat ihn

der Jesuit P. F. A. Zaccaria in der in Modena erschienenen Storia letteraria d'Italia. Vol. X. p. 107 bis p. 112. reproducirt, mit dem, wahrscheinlich von Lagrange selbst herrührenden Zusatze: „Diciamo non affatto nuova la serie del N. A. perchè ritrovasi nel 1°. tomo del libro stampato l'anno 1743 in Ginevra con questo titolo: Virorum celeberrimorum Got. Guill. Leibnitii et Joh. Bernoullii Commercium Philosophicum et Mathematicum. Lett. X. CXVIII con poca diversità. L'Autore stesso ha poi conosciuto, che mancale quello della novità; ma noi crediamo che altri pregi non gliene manchino.“

Zu den beiden oben genannten Schriften der Herren P. Tardy und A. Genocchi ist nun endlich neuerlichst noch die folgende Schrift gekommen:

Sur une formule de Leibniz. Par J. Hoüel, Professeur de Mathématiques pures à la faculté des sciences de Bordeaux. Bordeaux. 1869. 8°.

in welcher Herr Hoüel über die beiden Schriften der Herren Tardy und Genocchi einen ungemein klaren und übersichtlichen Bericht erstattet hat, so dass wir die Leser des Archivs, denen die Schriften der beiden trefflichen italienischen Gelehrten nicht zugänglich sein sollten, hauptsächlich auf diese Schrift des Herrn Hoüel glauben verweisen zu können.

In dieser Schrift sagt Herr Hoüel pag. 11.:

„Peu de temps après l'impression de sa lettre, Lagrange retrouva sa formule dans la Correspondance de Leibniz et de Bernoulli. Arago raconte, dans son Éloge de Fresnel (Oeuvres d'Arago, t. I. p. 119.), que le jeune auteur fut saisi d'un si violent chagrin, qu'il s'évanouit, et que ce premier échec faillit le faire renoncer pour toujours aux Mathématiques. De nos jours, comme le fait remarquer M. Tardy en rapportant cette anecdote, plus d'un auteur aurait la fibre moins sensible, et (pour employer une expression habituelle de Fresnel, qui avait, lui aussi, debuté par une semblabe mésaventure) se consolerait plus aisément d'avoir enfoncé des portes ouvertes.

Die oben genannte, im Jahre 1754 erschienene, den Brief Lagrange's — welcher, beiläufig bemerkt, das Einzige ist, was Lagrange in italienischer Sprache publicirt hat — enthaltende Schrift ist jetzt so ausserordentlich selten, dass es Herrn B. Boncompagni ungeachtet seiner so ausserordentlich grossen bibliographischen Kenntniss und Erudition nur möglich gewesen

ist, fünf Exemplare derselben aufzufinden, worüber er in einer sehr interessanten Note zu der Schrift des Herrn Tardy pag. 9. Folgendes sagt:

„Della suddetta lettera di Giuseppe Luigi Lagrange si ha una edizione intitolata „LETTERA || DI || LUIGI DE LA GRANGE TOURNIER || TORINESE || *ALL' ILLUSTRISSIMO SIGNOR CONTE* || GIULIO CARLO DA FAGNANO || Marchese de'Toschi, e di S. Onorio, Nobile Romano, || e Senogagliese, Matematico celebratissimo. || *Contenente una nuova serie per i differenziali, ed integrali* || *di qualsivoglia grado corrispondente alla Nevvtoniana* || *per le potestà, e le radici.* || IN TORINO, MDCCLIV. || NELLA STAMPERIA REALE. *Con lic. de' Sup.* „Questa edizione è composta di otto pagine, in 4.° piccolo, delle quali le prime due non sono numerate, e le 3^a—8^a sono numerate coi numeri 3—8. Cinque esemplari della edizione stessa sono a me noti, uno de'quali trovasi nelle carte 96^a—99^a d'un volume ora posseduto dalla Bibliotéca di Brera di Milano e contrassegnato „XM* || VI || 37" (cioè „ScaffaleXM*", „palchetto VI, numero 37 progressivo de'volumi ora collocati in questo palchetto)"; un altro è contenuto nelle carte 12^a—15^a d'un volume ora posseduto dalla Biblioteca della Reale Accademia delle Scienze di Torino, e contrassegnato „DD. XII. 14", cioè „Scansia DD, palchetto IX, numero 14 „progressivo de'volumi ora collocati in questo palchetto"; un terzo trovasi nelle carte 4^a—7^a d'un volume privo di segnatura, ora posseduto dalla Signora Baronessa Sofia Plana, e da lei conservato nella sua abitazione in Torino (Piazza Vittorio Emmanuele n°. 12, secondo piano); un quarto è posseduto dal Sig. Cavaliere Michele Lagrange, Colonnello in ritiro, e da lui conservato nella sua abitazione in Torino (Via Carlo Alberto, n°. 14); ed un quinto è ora da me posseduto. Ciò che si legge nelle pagine 3^a—8^a, numerate 3—8, della medesima edizione, trovasi interamente ristampato, salvo varietà ortografiche, nel volume intitolato „STORIA || LETTERARIA || D'ITALIA || SOTTO LA PROTEZIONE || *DEL SERENISSIMO* || FRANCESCO III. || DUCA DI MODENA ec. ec. || VOLUME X. || Dal Luglio a tutto il Dicembre MDCCLIV. || IN MODENA, MDCCLVII. || A SPESE REMONDINI. || *CON LICENZA DE' SUPERIORI, e PRIVILEGIO.*" (pag. 116^a—119^a, numerate 108—111; pag. 120^a, numerata 112, lin. 2—31, LIBRO I., CAPO IV, paragrafo III). Un esemplare di questo volume è ora posseduto dalla Biblioteca Casanatense di Roma, e contrassegnato „V. VIII. 39", cioè „Scansia V, Palchetto VIII, numero 39 progressivo de' volumi ora collocati in questo palchetto". B. B.

Wegen dieser ungemein grossen Seltenheit dieses merkwürdigen Actenstücks zur Geschichte der Mathematik hat sich daher Herr A. Genocchi durch den neuen Abdruck desselben in seiner oben genannten Schrift ein sehr grosses, nicht genug anzuerkennendes Verdienst erworben, wobei wir zugleich rücksichtlich des Briefes selbst besonders hervorzuheben nicht unterlassen wollen, dass derselbe sich mit ungemeiner, den betreffenden Gegenstand in seinem innersten Wesen und seiner grossen allgemeinen Bedeutung darlegenden Klarheit, welche also, wie später in allen seinen Werken, den grossen Lagrange schon in seinem achtzehnten Lebensjahre auszeichnete, über alles hier zur Sache Gehörende verbreitet, und auch dadurch das grösste Interesse für sich lebhaft in Anspruch nimmt. Weil man sich italienische Schriften leider immer noch nicht ganz leicht und in kürzerer Zeit in Deutschland zu verschaffen im Stande ist, habe ich geglaubt, den Lesern des Archivs einen Dienst zu erweisen, wenn ich die den merkwürdigen Brief enthaltende, im Jahre 1754 erschienene, höchst seltene Schrift aus der Schrift des Herrn Genocchi nachstehend abdrucken lasse, und dadurch zur weiteren und allgemeineren Bekanntschaft mit derselben in Deutschland u. s. w. Einiges beizutragen suche; in den sechsten Theil der Ausgabe der sämmtlichen Werke von Lagrange wird derselbe aufgenommen werden:

LETTERA
DI
LUIGI DE LA GRANGE TOURNIER
TORINESE
ALL'ILLUSTRISSIMO SIGNOR CONTE
GIULIO CARLO DA FAGNANO
Marchese de'Toschi e di S. Onorio, Nobile Romano,
e Senogagliese, Matematico celebratissimo.

Contenente una nuova serie per i differenziali, ed integrali di qualsivoglia grado corrispondente alla Newtoniana per le potestà, e le radici.

IN TORINO, MDCCLIV.

NELLA STAMPERIA REALE. *Con lic. de'Sup.*

ILLUSTRISSIMO SIGNORE.

Nella serie, che ho comunicata a V. S. Illustriss., mi lusingava ben io d'avere ampiamente comprese varie operazioni del calcolo si differenziale, che integrale di qualunque grado; e col

paragone di quella colla tanto celebratissima serie Newtoniana per le potestà mi pareva in vero d'aver scoperta una corrispondenza non dispregevole tra 'l calcolo delle infinite, e quello delle finite grandezze; ma poichè in somma non altro, che nuova comprensione, e riporto di calcoli notissimi per quello qualunque ritrovamento si palesava, e nulla realmente si disvelava, che nuova scienza chiamarsi potesse, anzi che offrirlo al pubblico, che oramai tutto nausea, e schifa, che non sia di somma importanza per le umane cognizioni, pensava trarne assai ampio frutto, ritenendolo per me a mio privato uso, e ad agevolare gli studj della mia affatto giovenile età, la quale, anzichè atta a somministrare altrui, è pur del tutto bisognosa di ricevere da altri lume e scienza; Ma i cenni della degnevolissima Lettera di V. S. Illustriss. mi sono in luogo di autorevole comandamento; e poichè a Lei piace, che si pubblichi la suddetta serie, non dubito di recar malgrado a veruno, obbedendo a Lei, ed a Lei anzi offerendola, che molto più di quello, che essa abbia in se, può darle di dignità col suo ragguardevolissimo giudizio, se come si è compiaciuta di commendarla, finchè era nelle mie mani, vorrà riguardarla con egual benignità ora, che la ripongo nelle sue. Che se pur Ella tollerasse, che a Lei sola questo mio picciolo ritrovato io presentassi, sarebbe di già compita interamente l'offerta, senza che ora di vantaggio estendermi dovessi in dichiararlo. Che sa bene tutto il mondo letterato, come e le sottili sue opere, ed i grandissimi applausi dalle più celebri Accademie ricevuti ne lo attestano, che a Lei basta il proporsi a snodare qualunque più riposto arcano delle Matematiche, per comprenderne tosto in uno e lo scioglimento, e le conseguenze. Ed altronde, queste, che a Lei offro, mie riflessioni, sono pur di tal natura, che anche a ingegni meno sublimi basta accennarle, perchè ad essi spontaneamente possano manifestarsi. Ma pure giacchè Ella vuole, che io scriva ad ognuno, che di si fatte materie abbia comunque vaghezza, penso, che non m'abuserò della pazienza di Lei, se più oltre mi dilungherò, come tale mira richiede, e vuole. Dunque primieramente propongo le due serie, la Newtoniana per le potestà, e la mia per i differenziali, ed integrali, sicchè in una sola occhiata se ne comprenda ogni possibile rapporto, e corrispondenza.

$$(a+b)^m = a^m b^0 + a^{m-1} b^1 + m\frac{(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 +$$

$$m\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3} a^{m-3} b^3 + \text{ec.}$$

$$(xy)^m = x^m y^0 + mx^{m-1}y^1 + m\frac{(m-1)}{2}x^{m-2}y^2 +$$
$$m\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3}x^{m-3}y^3 + \text{ec.}$$

Dunque I. Siccome la prima serie serve per elevare a qualunque potestà la somma di due, e conseguentemente di quantunque quantità date, facendo l'esponente m eguale al numero del grado della potestà data; così la seconda serve per differenziare in qualsivoglia grado un qualunque prodotto di due, e conseguentemente di quantunque variabili, facendo nella stessa guisa l'esponente m èguale al numero del differenzial proposto,

II. Siccome la prima serie vale similmente per estrarre qualunque radice dalla somma di due, o quantunque quantità, facendo l'esponente m eguale al numero rotto del grado della radice data; così la seconda serve per ridurre ad integrale di qualunque grado un qualunque prodotto di due, o quantunque quantità finite, od infinitesime, facendo l'esponente m eguale al numero intero (ma preso negativamente) del grado dell'integrale dato.

Finalmente, siccome nella prima serie l'esponente, ove resta eguale a zero, fa, che la quantità, cui esso appartiene si debba intender elevata alla potestà nulla, e conseguentemente eguale ad 1; così nella seconda esso indica in tal quantità non avervi luogo, nè differenziazione, nè integrazione, e perciò doversi essa lasciare tal quale si trova.

Onde, come diceva nella stessa guisa appunto, che dell'una ci serviamo per l'elevazioni a potestà, ed estrazioni di qualunque radice, potremo dell'altra valersi per le differenziazioni, ed integrazioni di qualsivoglia grado.

Sia dunque da differenziarsi la quantità xy; in questo caso poichè il differenzial cercato si è il primo, m sarà $= 1$, e però la serie generale piglierà questa forma $x^1y^0 + x^0y^1$, cioè ridotta alla comune maniera di scrivere (che secondo l'uso introdotto il numero del grado della differenziazione si applica alla lettera d, o pure si segna con altrettanti punti) $dxy + xdy$.

Se in luogo del primo si voglia il secondo, o il terzo differenziale sarà $m = 2$, od $= 3$, ed i ricercati differenziali, fatte le sostituzioni in luogo di m, saranno il secondo $x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2$, ed il terzo $x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + x^0y^3$, i quali come sopra ridotti rendono l'uno $d^2xy + 2dxdy + xd^2y$, e l'altro $d^3xy + 3d^2xdy + 3dxd^2y + xd^3y$, veri differenziali della quantità proposta, se si

pigli anche il dx per fluente, e lo stesso s'intenda dei differenziali di qualunque siasi ulteriore grado.

E come queste operazioni di differenziare per questa serie nulla più hanno di difficoltà, che quelle di elevare a potestà per la Newtoniana, così nulla più difficile si è l'integrare con quella di quel, che lo sia l'estrar le radici per mezzo di questa.

Debbasi per esempio, per aver la quadratura indefinita di qualsivoglia curva, ritrovar l'integrale dell'elemento dell'area ydx. Si supponga nel canone generale $dx=x$, sarà per quel, che di sopra s'è detto $m=-1$, i quali valori in esso sostituiti, avremo la serie particolare $dx^{-1}y^0-dx^{-2}y^1+dx^{-3}y^2-dx^{-4}y^3+dx^{-5}y^4-$ec.

Ora dx^{-1} dinota l'integrale di dx, dx^{-2} l'integral dell'integrale di dx (cioè l'integrale di x), che io chiamo integral secondo di dx, e segno in questa guisa $\int^2 dx$, dx^{-3} l'integral terzo di dx, cioè $\int^3 dx$ ec.

Ma $\int dx=x$, $\int^2 dx=\frac{x^2}{2dx}$, $\int^3 dx=\frac{x^3}{2.3dx^2}$, e generalmente, $\int^m dx=\frac{x^m}{2.3.4.5....mdx^{m-1}}$ (come chiunque se ne può accertare, differenziando tali quantità, una, due, tre volte secondo il grado dell'integrazione, pigliando però sempre il dx per costante); dunque sostituiti questi valori nella serie ultimamente trovata, e posti secondo l'usanza dy, d^2y, d^3y ec. in luogo di y^1, y^2, y^3 ec. essa sarà in fine

$$xy-\frac{x^2dy}{2dx}+\frac{x^3d^2y}{2.3dx^2}-\frac{x^4d^3y}{2.3.4dx^3}+\frac{x^5d^4y}{2.3.4.5dx^4}-\text{ec.}=\int ydx.$$

La qual serie particolare dalla mia universal derivata, vede benissimo, V. S. Illustriss., che non è altra, che quella stessa tanto celebrata, che di già scoprì il Chiarissimo Sig. Giovanni Bernoullio, e pubblicò poscia negli atti degli eruditi del mese di Novembre 1694.

Del resto, non solo a'differenziali di primo grado si estende questa mia serie, ma bensì ad integrar con una sola operazione eziandio quelli di qualunque ulterior grado. Richerchisi l'integral secondo di $dydx$, fatto dunque $m=-2$.. e supposto $x=dx$, ed $y=dy$ otterremo la seguente serie

$$dx^{-2}dy^0-2dx^{-3}dy^1+3dx^{-4}dy^2-4dx^{-5}dy^3+\text{ec.}$$

la qual come l'altra ridotta da . . . . . .

$$\frac{x^2dy}{2dx} - \frac{2x^3d^2y}{2.3\,dx^2} + \frac{3x^4d^3y}{2.3.4\,dx^3} - \frac{4x^5d^4y}{2.3.4.5dx^4} + \text{ec.} = \int dydx$$

eguale ancora ad $\int ydx$, e per conseguenza all'altra poco fa trovata, la qual egualità, sebbene apertamente non si manifesti, tuttavia si può vedere, differenziando e l'una, e l'altra due volte, posto il dx costante, conciosiachè distruggendosi vicendevolmente tutti gl'altri termini, altro non vi resta in amendue, che il $dydx$.

Molte altre considerazioni, che mi occorrerebbono, per ora le ometto, e come non del tutto necessarie, e come poco dicevoli alla intenzion mia, onde anzi che annojarla, con dilungarmi in cose a Lei superflue, bramo unicamente di attestarle il mio ossequiosissimo rispetto.

Dunque ringraziandola del gradimento, che V. S. Illustriss. s'è compiaciuta significarmi di questa mia tenuissima cosa, non meno che del prezioso regalo, che mi fa della dottissima sua lettera ultimamente impressa; e pregandola istantemente a continuarmi le sue pregiatissime grazie, ho l'onore di protestarmi con tutta la maggior stima, e con la più umile riverenza ec.

P. S. Rileggendo V. S. Illustriss. questa mia formola, non potranno all'acutezza del suo ingegno non occorrere sopra di essa qualcune importanti, ed utili riflessioni; Supplico per tanto la somma di lei bontà, e cortesia, che di già ho avuta la sorte di esperimentare, a volermi far la grazia di communicarmele, e di bel nouovo sono

Torino li 23 Luglio 1754.

Di V. S. Illustriss.

Devotiss., ed obbligatiss. Servitore
LUIGI DE LA GRANGE.

XVII.

Verschiedene Aufsätze zur Zahlenlehre.

Von

Herrn *P. Seeling*
in Hückeswagen.

A.

Sechsstellige Perioden.

S. Archiv der Mathematik und Physik, Theil XLIX., S. 17.

$$A = n^2 + \frac{2n((ab+1)(bc+1)+ab)+b(bc+2)}{c(ab+1)^2+2a(ab+1)}.$$

I. Setzt man $a=2$, $b=1$, $c=n-1$, so ist:

$$A = n^2 + \frac{2n(3n+2)+n+1}{9(n-1)+12} = n^2 + \frac{6n^2+5n+1}{9n+3}$$
$$= n^2 + \frac{2n+1}{3} = n^2 + n - \frac{n-1}{3}.$$

II. Setzt man hingegen $a=1$, $b=1$, $c=\frac{2n-2}{3}$, so ist:

$$A = n^2 + \frac{2n\left(2.\frac{2n+1}{3}+1\right)+\frac{2n+4}{3}}{\frac{8n-8}{3}+4} = n^2 + \frac{2n(4n+5)+2n+4}{8n+4}$$
$$= n^2 + \frac{8n^2+12n+4}{8n+4} = n^2+n+1.$$

III. Setzt man endlich $a=1$, $b=2$, $c=n$, so ist:

$$A = n^2 + \frac{2n(6n+5)+4n+4}{9n+6} = n^2 + \frac{12n^2+14n+4}{9n+6} = n^2 + \frac{4n+2}{3} = n^2 + n + \frac{n+2}{3}.$$

In allen drei Fällen muss n die Form $3r+1$ haben. Dann erhält man die Reihen:

	$n =$	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31,	34,	37,	40,	43,
	$\frac{n-1}{3} =$	1;	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,
	$\frac{n+2}{3} =$	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,
I.	$A = n^2+n-\frac{n-1}{3} =$	19,	54,	107,	178,	267,	374,	499,	642,	803,	982,	1179,	1394,	1627,	1878,
II.	$A = n^2+n+1 =$	21,	57,	111,	183,	273,	381,	507,	651,	813,	993,	1191,	1407,	1641,	1893,
III.	$A = n^2+n+\frac{n+2}{3} =$	22,	59,	114,	187,	278,	387,	514,	659,	822,	1003,	1202,	1419,	1654,	1907,

u. s. w.

B.

Ueber die geraden Zahlen von der Form n^2+16.

I. $n = 8v$.

Hier fällt $A = n^2+16$ unter die Form $n^2 + \frac{2n}{a}$, also ergibt $\sqrt{A}$ zweistellige Perioden. Form der Periode: $(8v)$; v, $16v$.

II. $n = 8v+4$.

Hier fällt $A = n^2+16$ unter die Form $n^2 + \frac{4n}{q}$, wo q ungerade ist; also ergibt $\sqrt{A}$ achtstellige Perioden. Form: $(8v+4)$; v, 1, 1, $4v+1$, 1, 1, v, $16v+8$.

III. $n = 8v - 2$.

Hier ergibt $\sqrt{A}$ 14stellige Perioden von der Form:

$$(8v-2);\ v-1,\ 1,\ 3,\ v-1,\ 1,\ 1,\ 4v-2,\ 1,\ 1,\ v-1,\ 3,\ 1,\ v-1,\ 16v-4.$$

IV. $n = 8v + 2$.

Hier ergibt $\sqrt{A}$ 14stellige Perioden von der Form:

$$(8v+2);\ v,\ 3,\ 1,\ v-1,\ 1,\ 1,\ 4v,\ 1,\ 1,\ v-1,\ 1,\ 3,\ v,\ 16v+4.$$

Bei III. und IV. muss demnach $v > 1$ sein.

Da die Perioden, das letzte Glied abgerechnet, symmetrisch sind, so wurden die folgenden Extractionen nur bis zur Mitte der Perioden entwickelt.

II. $$\sqrt{((8v+4)^2+16)} = 8v+4+\frac{\sqrt{((8v+4)^2+16)}-(8v+4)}{1} = 8v+4+\frac{1}{x^I}$$

$$x^I = \frac{1}{\sqrt{((8v+4)^2+16)}-(8v+4)} = \frac{\sqrt{((8v+4)^2+16)}+(8v+4)}{16} = v + \frac{\sqrt{((8v+4)^2+16)}-(8v-4)}{16} = v + \frac{1}{x^{II}}$$

$$x^{II} = \frac{16}{\sqrt{((8v+4)^2+16)}-(8v-4)} = \frac{\sqrt{((8v+4)^2+16)}+(8v-4)}{8v+1} = 1 + \frac{\sqrt{((8v+4)^2+16)}-5}{8v+1} = 1 + \frac{1}{x^{III}}$$

$$x^{III} = \frac{8v+1}{\sqrt{((8v+4)^2+16)}-5} = \frac{\sqrt{((8v+4)^2+16)}+5}{8v+7} = 1 + \frac{\sqrt{((8v+4)^2+16)}-(8v+2)}{8v+7} = 1 + \frac{1}{x^{IV}}$$

$$x^{IV} = \frac{8v+7}{\sqrt{((8v+4)^2+16)}-(8v+2)} = \frac{\sqrt{((8v+4)^2+16)}+(8v+2)}{4} = 4v+1+\frac{\sqrt{((8v+4)^2+16)}-(8v+2)}{4} = 4v+1+\frac{1}{x^V}$$

III. $\sqrt{((8v-2)^2+16)} = 8v-2+\dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-2)}{1} = 8v-2+\dfrac{1}{x^I}$

$x^I = \dfrac{1}{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-2)} = \dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}+(8v-2)}{16} = v-1+\dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-14)}{16} = v-1+\dfrac{1}{x^{II}}$

$x^{II} = \dfrac{16}{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-14)} = \dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}+(8v-14)}{12v-11} = 1+\dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(4v+3)}{12v-11} = 1+\dfrac{1}{x^{III}}$

$x^{III} = \dfrac{12v-11}{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(4v+3)} = \dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}+(4v+3)}{4v-1} = 3+\dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-6)}{4v-1} = 3+\dfrac{1}{x^{IV}}$

$x^{IV} = \dfrac{4v-1}{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-6)} = \dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}+(8v-6)}{16} = v-1+\dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-10)}{16} = v-1+\dfrac{1}{x^V}$

$x^V = \dfrac{16}{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-10)} = \dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}+(8v-10)}{8v-5} = 1+\dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-5}{8v-5} = 1+\dfrac{1}{x^{VI}}$

$x^{VI} = \dfrac{8v-5}{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-5} = \dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}+5}{8v+1} = 1+\dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-4)}{8v+1} = 1+\dfrac{1}{x^{VII}}$

$x^{VII} = \dfrac{8v+1}{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-4)} = \dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}+(8v-4)}{4} = 4v-2+\dfrac{\sqrt{((8v-2)^2+16)}-(8v-4)}{4} = 4v-2+\dfrac{1}{x^{VIII}}$

IV. $$\sqrt{((8v+2)^2+16)} = 8v+2+\frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-(8v+2)}{1} = 8v+2+\frac{1}{x^I}$$

$$x^I = \frac{1}{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-(8v+2)} = \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}+(8v+2)}{16} = v + \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-(8v-2)}{16} = v + \frac{1}{x^{II}}$$

$$x^{II} = \frac{16}{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-(8v-2)} = \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}+(8v-2)}{4v+1} = 3 + \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-(4v+5)}{4v+1} = 3 + \frac{1}{x^{III}}$$

$$x^{III} = \frac{4v+1}{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-(4v+5)} = \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}+(4v+5)}{12v-5} = 1 + \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-(8v-10)}{12v-5} = 1 + \frac{1}{x^{IV}}$$

$$x^{IV} = \frac{12v-5}{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-(8v-10)} = \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}+(8v-10)}{16} = v-1 + \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-(8v-6)}{16} = v-1 + \frac{1}{x^V}$$

$$x^V = \frac{16}{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-(8v-6)} = \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}+(8v-6)}{8v-1} = 1 + \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-5}{8v-1} = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$$

$$x^{VI} = \frac{8v-1}{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-5} = \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}+5}{8v+5} = 1 + \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-8v}{8v+5} = 1 + \frac{1}{x^{VII}}$$

$$x^{VII} = \frac{8v+5}{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-8v} = \frac{\sqrt{((8v+2)^2)+16)}+8v}{4} = 4v + \frac{\sqrt{((8v+2)^2+16)}-8v}{4} = 4v + \frac{1}{x^{VIII}}$$

Uebersichtliche Zusammenstellung von Beispielen.

v	n	Form.	A	Stellenzahl.	Kettenbruchsnenner a, b, c, d, e, f, g für die 14stell. Perioden.	Kettenbruchsn. a, b, c, d f. d. 8stell. Period.
	2		20	2		
	4		32	4		
1	6	$8v-2$	52	6		
	8	$8v$	80	2		
	10	$8v+2$	116	10		
	12	$8v+4$	160	8		1, 1, 1, 5
2	14	$8v-2$	212	14	1, 1, 3, 1, 1, 1, 6	
	16	$8v$	272	2		
	18	$8v+2$	340	14	2, 3, 1, 1, 1, 1, 8	
	20	$8v+4$	416	8		2, 1, 1, 9
3	22	$8v-2$	500	14	2, 1, 3, 2, 1, 1, 10	
	24	$8v$	592	2		
	26	$8v+2$	692	14	3, 3, 1, 2, 1, 1, 12	
	28	$8v+4$	800	8		3, 1, 1, 13
4	30	$8v-2$	916	14	3, 1, 3, 3, 1, 1, 14	
	32	$8v$	1040	2		
	34	$8v+2$	1172	14	4, 3, 1, 3, 1, 1, 16	
	36	$8v+4$	1312	8		4, 1, 1, 17
5	38	$8v-2$	1460	14	4, 1, 3, 4, 1, 1, 18	
	40	$8v$	1616	2		
	42	$8v+2$	1780	14	5, 3, 1, 4, 1, 1, 20	
	44	$8v+4$	1952	8		5, 1, 1, 21
6	46	$8v-2$	2132	14	5, 1, 3, 5, 1, 1, 22	
	48	$8v$	2320	2		
	50	$8v+2$	2516	14	6, 3, 1, 5, 1, 1, 24	
	52	$8v+4$	2720	8		6, 1, 1, 25
7	54	$8v-2$	2932	14	6, 1, 3, 6, 1, 1, 26	
	56	$8v$	3152	2		
	58	$8v+2$	3380	14	7, 3, 1, 6, 1, 1, 28	
	60	$8v+4$	3612	8		7, 1, 1, 29

(Diese Mittheilungen werden fortgesetzt.)

XVIII.

Miscellen.

Zu der Lehre von den Transversalen im Dreieck und der dreiseitigen Pyramide.

Von Herrn Dr. R. Most, Lehrer an der Realschule I. Ord. in Stettin.

In Thl. XLVIII. Nr. XXXII. p. 467 beweist Herr Professor Grunert in Verbindung mit anderen Sätzen den folgenden Satz:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt M von den drei Spitzen eines Dreiecks ABC drei Transversalen AA_1, BB_1, CC_1, so ist:

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1;$$

die Grössen MA_1, MB_1 oder MC_1 sind negativ zu nehmen, wenn M in Bezug auf A_1, B_1 oder C_1 eine entgegengesetzte Lage zu A, B oder C hat.

Beweis. $\frac{MA_1}{AA_1} = \frac{\Delta BMC}{\Delta BAC}$, denn die Grössen MA_1 und AA_1 verhalten sich wie die auf BC von M und A gefällten Höhen; liegt nun M in dem Dreieck, so ist:

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{BMC + CMA + AMB}{ABC} = 1.$$

Für andere Lagen von M ergeben sich die entsprechenden Gleichungen.

Für die dreiseitige Pyramide $ABCD$ erhält man durch die entsprechende Betrachtung:

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} + \frac{MD_1}{DD_1} = 1.$$

Ueber die Summirung gesetzmässig ausgewählter Reihenglieder.

Von Herrn Dr. R. Most, Lehrer an der Realschule I. Ord. in Stettin.

Aus einer gegebenen Reihe, deren Summe $f(x)$ bekannt ist, die geraden oder ungeraden Glieder auszuwählen und zu summiren, ist eine Operation, die oft in Anwendung kommt und leicht durch $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ und $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ gelöst wird. Es mag gestattet sein, darauf aufmerksam zu machen, dass in diesen Formen eine allgemeine Methode angedeutet ist. Handelt es sich darum, aus der Reihe der Function $f(x)$ das $p$te, das $2p$te, $3p$te u. s. w. Glied auszuwählen und zu summiren, so kann diese Aufgabe leicht durch die Wurzeln der Gleichung $\alpha^p = 1$ gelöst werden; bezeichnet man die p Wurzeln der Gleichung mit α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_p$, so ist bekanntlich:

$$\alpha_1{}^r + \alpha_2{}^r + \alpha_3{}^r + \ldots \alpha_p{}^r = p \text{ oder Null},$$

je nachdem r ein Vielfaches von p ist oder nicht; ist also

$$fx = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.$$

gegeben, so ist:

$$(1) \ldots . \frac{1}{p}[f(\alpha_1 x) + f(\alpha_2 x) + \ldots . f(\alpha_p x)] = A_0 + A_p x^p + A_{2p} x^{2p} + \ldots$$

Will man aber etwa mit dem $q$ten Gliede beginnen und dann in Intervallen von p fortschreiten, so hat man:

$$(2) \qquad \frac{1}{p}\left[\frac{f(\alpha_1 x)}{\alpha_1{}^q} + \frac{f(\alpha_2 x)}{\alpha_2{}^q} + \ldots \frac{f(\alpha_p x)}{\alpha_p{}^q}\right]$$

$$= A_q x^q + A_{q+p} x^{q+p} + A_{q+2p} x^{q+2p} + \ldots .$$

Des Beispieles halber sollen die beiden Reihen

$$y = 1 + \frac{x}{\Pi(s)} + \frac{x^2}{\Pi(2s)} + \frac{x^3}{\Pi(3s)} + \ldots .\ ^*),$$

$$z = \frac{1}{\Pi(q)} + \frac{x}{\Pi(q+s)} + \frac{x^2}{\Pi(q+2s)} + \ldots .$$

summirt werden, so ist, wenn

$$\alpha_k = \cos\frac{2\pi k}{s} + i\sin\frac{2\pi k}{s} = e^{i\frac{2\pi k}{s}}$$

ist, nach (1):

$$y = \frac{1}{s}\left[e^{\alpha_1 x^{\frac{1}{s}}} + e^{\alpha_2 x^{\frac{1}{s}}} + \ldots . e^{\alpha_s x^{\frac{1}{s}}}\right]$$

und nach (2)

$$z = \frac{1}{s x^{\frac{q}{s}}}\left[e^{\alpha_1 x^{\frac{1}{s}} - i\frac{2\pi q}{s}} + e^{\alpha_1 x^{\frac{1}{s}} - i\frac{4\pi q}{s}} + \ldots . e^{\alpha_s x^{\frac{1}{s}} - i2\pi q}\right].$$

*) $\Pi(s)$ fällt für ganze Zahlen wie hier mit $1.2.3..\ s = s!$ zusammen.

Druckfehler.

Thl. 49. S. 428. Z. 13. v. u. statt „denn“ s. m. „dann“.

XIX.

Die Gesetze der Lichtbrechung.

Von

Dr. *Jos. Kudelka*,

Kaiserlich Königlichem Lyceal-Professor zu Linz.

(Schluss von Nr. X. S. 121.)

(Figuren s. Taf. IX. X. — Fig. 52. auf Taf. IX.)

---

§. 22. Ueber die Sammellinse.

Man wird vielleicht fragen: „Was kann man denn über die Sammellinse noch Neues erfahren? Diese, als ein Hauptbestandtheil der optischen Instrumente, dürfte doch schon hinlänglich erforscht sein.

Nun, ich habe einen Versuch mitzutheilen, der so einfach ist und dabei so unbedeutend erscheint, dass er sich wahrscheinlich desshalb bis nun der Beachtung entzogen haben dürfte. Wenigstens ist mir nicht bekannt, dass er gemacht oder besprochen worden wäre. Dieser Versuch erscheint mir nun aber für die Theorie der Linsen von ganz besonderer Wichtigkeit. Bevor ich ihn jedoch beschreibe, finde ich es zweckdienlich, einige einleitende Bemerkungen vorauszuschicken, durch welche gewisse Begriffe in etwas anderer Art, als es gewöhnlich geschieht, festgestellt werden.

1°. Es sei demnach (Fig. 43) eine Sammellinse *MN* und man denke sich einen längs der optischen Axe verschiebbaren leuchtenden Punkt. Seine anfängliche Lage sei innerhalb der Brennweite der Linse in *a*. Ein von *a* ausgehender Strahl *ab*, der in *b* die Linse trifft, wird innerhalb derselben den Weg *bd* nehmen und hierauf in der Richtung *dx* austreten. Diese letztere Richtung divergirt nach aufwärts mit der optischen Axe und es

werden überhaupt alle von *a* anf die Linse fallenden Strahlen nach ihrem Austritte mit der Axe divergiren.

Verschiebt man den leuchtenden Punkt von *a* nach *e*, so erleidet dadurch der einfallende Strahl eine Drehung um den Punkt *b*; er kommt aus der Lage *ab* in die Lage *eb*. Bei dieser neuen Lage wird der gebrochene Strahl innerhalb der Linse den Weg *bk* und nach dem Austritte den Weg *ky* einschlagen. Ist *e* der Brennpunkt der Linse, so wird der austretende Strahl *ky* parallel zur optischen Axe' sein und es werden überhaupt alle von *e* herkommenden Strahlen parallel austreten, freilich wie diess bekannt ist, annäherungsweise.

Kommt endlich der leuchtende Punkt an den Ort *h*, der bereits ausserhalb der Brennweite der Linse liegt, so wird der von ihm zu dem Elemente *b* der Linse gezogene Strahl *hb* nach erlittenen Brechungen den Weg *bgz* nehmen und indem jetzt der austretende Strahl gegen die Axe konvergirt, schneidet er dieselbe in *z*. So wie dieser, werden auch alle übrigen austretenden Strahlen, die von *h* herkommen, gegen die Axe konvergiren, aber sie werden sie nicht in einem und demselben Punkte *z*, sondern bekanntlich in verschiedenen Punkten schneiden; so dass also der kleinste Querschnitt des austretenden Lichtkörpers bei *z* nicht ein Punkt, sondern ein kleiner Kreis (Abweichungskreis) sein wird.

Das Auge wird sich, um den leuchtenden Punkt mittelst des Elementes *b* zu sehen, natürlich immer in der Richtung des austretenden Strahles, also etwa in *x*, dann in *y* und zuletzt in *z* befinden müssen.

Ruhet das Auge gerade in *z* und ist der Abweichungskreis nicht grösser als die Pupille, so wird es alle Strahlen, die der leuchtende Punkt durch die Linse hindurchsendet, aufnehmen können und es wird in diesem Falle der leuchtende Punkt als eine helle Scheibe erscheinen.

Jetzt lassen wir den leuchtenden Punkt und das Auge ihre Plätze vertauschen, so dass der Gang des Lichtes umgekehrt wird und so, wie wir zuvor den leuchtenden Punkt längs der Axe verschoben und in drei wesentlich verschiedenen Lagen betrachtet haben, eben dasselbe wollen wir jetzt mit dem Auge des Beobachters thun.

Befindet sich demnach das Auge, das wir uns als Punkt denken wollen, zuerst innerhalb der Brennweite in *a*, so kann es

von dem Elemente *b* der Linse nur in der geraden Richtung *ba* einen Eindruck erhalten, denn es ist Gesetz der Optik, dass die Wirkung des Lichtes in einem gleichförmigen Medium nur in geraden Linien vor sich gehet. Wenn also *ba* einen austretenden, gebrochenen Strahl vorstellt, so muss der ihm entsprechende einfallende die Richtung *xd* haben: d. h. soll ein leuchtender Punkt in der Richtung *ab* gesehen werden, so muss er sich an irgend einer Stelle in der Geraden *dx* befinden. Ist also das Auge innerhalb der Brennweite der Linse, so müssen die einfallenden Strahlen, wie *xd*, gegen die Linse konvergiren, wenn sie nach erlittener Brechung in's Auge gelangen sollen. Solche Strahlen kommen aber nothwendig von verschiedenen Punkten eines ausgedehnten Gegenstandes, den wir betrachten.

Versetzen wir das Auge in den Brennpunkt *e* der Linse, so werden wiederum die einzelnen Punkte eines ausgedehnten Gegenstandes nur mittelst solcher Strahlen gesehen, welche von ihnen, wie *yk*, parallel zur Axe ausgesendet werden.

Ist endlich das Auge ausserhalb der Brennweite in *h*, so kann es von demselben Elemente *b* der Linse nur in der Geraden *bh* einen Eindruck erhalten und es muss somit der leuchtende Punkt, von dem dieser Eindruck herkommt, an irgend einer Stelle der Geraden *tg* sich befinden. Es müssen also bei der Lage *h* des Auges die Strahlen, welche von den einzelnen Punkten eines ausgedehnten Gegenstandes ausgesendet werden, sich in *z* durchkreuzen, wenn sie überhaupt ins Auge gelangen sollen.

2°. Unter Gesichtsfeld verstehet man bekanntlich die auf einmal übersehenen Gegenstände oder wenn der Gegenstand zu gross ist, den auf einmal übersehenen Theil desselben. Nimmt man an, dass der Rand der Linse bis auf den zentralen, kreisförmigen Theil, dessen Durchmesser = *bc* (Fig. 43) mit einem Diaphragma bedeckt ist, und dass somit bloss dieser zentrale Theil das Licht durchlässt, so wird von einer Fläche *PQ* der Theil *mn* gesehen werden können, wenn sich das Auge innerhalb der Brennweite in *a* befindet; ich sage „können", denn ob dieser Theil *mn* wirklich gesehen werde, das wird von dem Grade der Deutlichkeit abhängen, welchen die von jedem einzelnen Punkte desselben ins Auge gelangenden Eindrücke besitzen. Ist das Auge im Brennpunkte *e*, so wird schon ein kleinerer Theil *pq* und wenn es sich ausserhalb der Brennweite in *h* befindet, der noch kleinere *rs* gesehen werden können. Das Gesichtsfeld hängt also seiner Grösse nach von der Lage des Auges gegen die Linse ab.

Ueberdiess wird es auch durch die Entfernung des Gegenstandes beeinflusst. Die einfallenden Strahlen, worunter wir natürlich immer nur jene verstehen, die nach erlittener Brechung in das Auge gelangen, bilden nemlich in ihrer Gesammtheit, bei der Lage *a* des Auges einen gestutzten Kegel, dessen kleinere Basis die Linsenfläche ist, die andere aber, nemlich *mn*, das Gesichtsfeld vorstellt. Es muss demnach in diesem Falle das Gesichtsfeld immer grösser werden, je weiter die betrachtete Fläche *PQ* von der Linse entfernt wird, und es wird auch ein einfallender Strahl, wie *nd*, immer anderen Punkten des Gesichtsfeldes angehören, die desto weiter von der Mitte desselben abstehen werden, je weiter es selbst von der Linse abstehet.

Da bei der Lage *e* des Auges die einfallenden Strahlen einen Cylinder bilden, so wird das Gesichtsfeld immer die nemliche Grösse beibehalten, es mag die Entfernung der betrachteten Fläche *PQ* welche immer sein, und es wird ein Strahl, wie *qk*, bei jeder Entfernung des Gesichtsfeldes von dem nemlichen Punkte desselben herkommen.

Bei der Lage *h* des Auges bilden die einfallenden Strahlen Doppelkegel. Würden alle diese Kegel den Punkt *z* zum gemeinschaftlichen Scheitel haben, so würde fürs Erste das Gesichtsfeld *rs* immer kleiner, je mehr sich die Fläche *PQ* diesem Punkte *z* nähert; dann aber würde es zu einem geometrischen Punkte zusammenschrumpfen, wenn *PQ* in *z* ankäme und von der ganzen Fläche *PQ* würde alsdann bloss dieser Punkt *z* sichtbar sein; über *z* hinaus wird aber das Gesichtsfeld wieder zunehmen.

Da nun aber die Scheitel der Doppelkegel an verschiedene Stellen der Axe fallen, so wird der kleinste Querschnitt des einfallenden Strahlenkörpers bei *z* nicht ein Punkt, sondern ein kleiner Kreis sein (Abweichungskreis); das Gesichtsfeld wird demnach auch nicht kleiner werden können, als dieser Kreis.

Je nach der Entfernung des Gesichtsfeldes von der Linse wird wiederum ein einfallender Strahl, wie *sg*, von verschiedenen Punkten desselben herkommen. Würde aber das Gesichtsfeld zu einem geometrischen Punkte zusammenschrumpfen können, so würden natürlich alle einfallenden Strahlen diesem einen Punkte angehören.

Hier wird sich auch ereignen können, dass der durch die Linse betrachtete Körper verkehrt erscheint. Das wird immer der Fall sein, wenn er sich, wie z. B. *tu* jenseits der Kreuzungsstelle *z* der einfallenden Strahlen befindet, denn alsdann wird der

links liegende Punkt *t* dieses Objektes *tu* in der Verlängerung von *hb*, also rechts — und der rechts liegende Punkt *u* in der Verlängerung von *hc*, somit links gesehen. Befindet sich aber ein Gegenstand, wie *rs*, innerhalb der Durchkreuzungsweite, so muss er natürlich aufrecht erscheinen, denn alsdann wird ja der rechtsliegende Punkt *s* desselben mittelst des gebrochenen Strahles *bh* auch rechts und der links liegende Punkt *r* mittelst des Strahles *ch* auch links gesehen. Damit also die relative Lage zweier Punkte durch die Linse umgekehrt werde, dazu ist nothwendig, dass die von diesen Punkten herkommenden, einfallenden Strahlen sich durchkreuzen, (was wiederum der Fall sein wird, wenn sich das Auge ausserhalb der Brennweite befindet); aber das reicht noch nicht hin, sondern es muss auch dieser Durchkreuzungspunkt *z* zwischen das betrachtete Objekt *tu* und die Linse fallen, oder der Linse näher liegen, als das Objekt. Muss man die einfallenden Strahlen, wie *sg* und *ri*, die von dem Objekte *rs* herkommen, erst hinter dieses verlängern, damit der Durchschnitt erfolge, ist also der Durchschnittspunkt der einfallenden Strahlen weiter von der Linse entfernt als das Objekt, so findet keine Umkehrung der relativen Lage der Punkte, hier *r* und *s*, Statt.

Es muss hier hauptsächlich beherzigt werden, dass durch die Lage, die man dem Auge gegen die Linse gibt, die Richtungen für die gebrochenen Strahlen, durch welche die Elemente der Linse ihre Eindrücke dem Auge übermitteln, unmittelbar festgestellt oder fixirt werden; dadurch werden mittelbar auch die Richtungen für die entsprechenden einfallenden Strahlen fixirt. Diese letzteren Richtungen bilden, wie bereits gesagt wurde, geometrische Körper und es wird daher zunächst die Gestalt dieser Körper durch die Lage des Auges bestimmt. Das Gesichtsfeld resultirt erst, wenn ein solcher Körper durch irgend einen lichtausstrahlenden Gegenstand geschnitten wird. Es entsteht also ganz so, wie ein Schlagschatten.

3°. Die Grösse der Gegenstände, wie sie mit dem blossen Auge beurtheilt wird, heisst bekanntlich die scheinbare Grösse und wird durch den Gesichtswinkel bestimmt. Nicht anders, als so, wird auch die Grösse des Gesichtsfeldes bestimmt werden müssen, wenn wir uns einer Linse bedienen. Der optische Winkel gehört zu den schärfsten Begriffen der Optik und es ist kein Grund vorhanden hier davon abzugehen.

Nehmen wir nun an, das Auge befinde sich ausserhalb der Brennweite in *h* (Fig. 43) und das Gesichtsfeld sei *rs*. Alsdann

würde *rs* mit unbewaffnetem Auge unter dem Winkel $rhs = \omega$ gesehen, welchen man erhält, wenn man in Gedanken die Punkte *r* und *s* mit *h* verbindet; mittelst der Linse sieht man es unter dem Winkel $bhc = \varphi$. Der Quotient $\frac{\varphi}{\omega} = m$ drückt das Verhältniss der scheinbaren Grössen in diesen beiden Fällen aus. Bei den optischen Instrumenten, namentlich den Fernröhren, bedeutet dieser Quotient die Vergrösserung, welche das Instrument bewirkt. Hier aber dürfte es passender sein, ihn „die Grössenveränderung" zu nennen, weil die Sammellinse nicht bloss vergrössert, sondern unter gewissen Umständen auch verkleinert. So lange $\varphi > \omega$ ist, wird die Linse vergrössern; ist $\varphi = \omega$, so erscheint der Gegenstand mittelst der Linse ebenso gross wie bei der Betrachtung mit blossem, unbewaffneten Auge; ist endlich $\varphi < \omega$, so wird die Linse verkleinern.

Die blosse Betrachtung der Figur 43 wird uns belehren, dass solange das Auge innerhalb der Brennweite oder im Brennpunkte liegt, die Linse stets vergrössern müsse, weil sowohl der Winkel $nam < bac$, als auch $peq < bec$ ist; dass aber alle drei Fälle eintreten können, sobald sich das Auge ausserhalb der Brennweite befindet; denn man vergleiche nur den Winkel *tzu*, den die sich kreuzenden, einfallenden Strahlen bilden, mit dem Winkel *bhc*. Der letztere Winkel wird offenbar desto kleiner, je mehr sich das Auge von der Linse entfernt; aber unter dieser Voraussetzung rückt der Durchschnittspunkt *z* immer näher an die Linse und somit wird der Winkel *tzu* immer grösser. Die gedachten Winkel erleiden also entgegengesetzte Aenderungen, wenn das Auge längs der optischen Axe verschoben wird.

Denkt man sich das Auge zuerst wohl ausserhalb der Brennweite der Linse aber doch so nahe an derselben, dass $bhc > tzu$, so werden die gleichliegenden Schenkel beider Winkel, nemlich *hc* und *tz*, dann *hb* und *zu*, nach aufwärts divergiren; bei einer gewissen grösseren Distanz des Auges wird $bhc = tzu$ sein und gedachte Schenkel werden parallel laufen. Entfernt man das Auge über diese Grenze hinaus, so wird $bhc < tzu$ und es werden die gleichliegenden Schenkel dieser Winkel jetzt nach aufwärts konvergiren und gehörig verlängert sich durchschneiden.

Gehet nun das Gesichtsfeld gerade durch diese Durchnittspunkte, so ist $\varphi = \omega$ und die Linse wird weder vergrössern noch verkleinern; liegt es aber jenseits dieser Durchschnittspunkte, so wird sie schon verkleinern; liegt es diesseits derselben, so wird sie natürlich vergrössern. Bei einer der folgenden Figuren werde

ich Gelegenheit haben auf diesen Fall zurückzukommen und ihn anschaulicher zu machen.

4°. Betrachtet man einen ausgedehnten Gegenstand mit freiem Auge, so dringt von jedem einzelnen Punkte desselben ein Strahlenkegel in dasselbe ein, der die Pupille zur Basis hat und an dessen Scheitel der betrachtete Punkt liegt. Von einem und demselben Punkte gelangen also die Strahlen divergirend ins Auge. Von verschiedenen Punkten kommen sie aber konvergirend, denn alsdann bildet das Auge den Scheitel und die betrachtete Fläche die Basis des Strahlenkörpers.

Diesen Hergang müssen wir uns gegenwärtig halten, denn er scheint die Bedingung, woran der Prozess des Sehens geknüpft, ist zu enthalten. Dem gemäss müsste jeder Punkt eines Gegenstandes, soll er deutlich gesehen werden, divergirende Strahlen in das Auge senden. Wenigstens ist es klar, dass wenn durch irgend ein Mittel bewirkt würde, dass die von den einzelnen Punkten eines Gegenstandes ausgehenden Strahlen konvergirend ins Auge eintreten, kein deutliches Sehen mehr möglich wäre; denn dann erscheint der betrachtete Punkt von der Grösse der Basis des Lichtkegels, also als Kreis und es wird die Undeutlichkeit desto grösser, je grösser dieser Kreis ist. Bei Betrachtung von Schriftzügen wird sich dieser Umstand ganz besonders geltend machen, denn indem die Punkte des Papiers als weisse, die der Buchstaben als schwarze Kreise erscheinen und sich gegenseitig überdecken, erhält das Gesichtsfeld einen ganz unbestimmten, gleichförmigen Anstrich; die Schrift erscheint ganz verschwommen und verworren; sie ist absolut unlesbar. Ich habe oben sub 2 gesagt, dass jeder Lage des Auges ein bestimmtes Gesichtsfeld von einer gewissen Grösse entspreche, aber daraus folgt noch nicht, dass jedes einzelne Gesichtsfeld auch schon geeignet sei, die es ausfüllenden Objekte zur klaren, deutlichen Anschauung zu bringen. Das wird eben von der Beschaffenheit seiner Eindrücke abhängen.

Die Deutlichkeit ist jedoch hier, wie selbstverständlich, nicht in jenem Grade zu verstehen, der ihr erst durch die Beseitigung der chromatischen Abweichung zu Theil wird. Wir wollen nun die Umstände etwas näher beleuchten, unter welchen eine Sammellinse von einem Gegenstande beim Hindurchsehen ein deutliches Bild zu geben vermag.

Denken wir uns demnach jetzt wieder das Auge zuerst innerhalb der Brennweite einer solchen Linse (Fig. 44) in *a*. Unter dieser Voraussetzung wird das Element *b* der Linse, wie diess

zuvor schon gesagt wurde, seine Eindrücke in der Geraden *ba* dem Auge übermitteln. Hat aber der gebrochene Strahl die Richtung *ba*, so muss der einfallende die Richtung *xd* haben.

Je nach der Lage, die der leuchtende Punkt in der *dx* hat, d. i. je nach der Entfernung, die er von der Linse hat, werden die von ihm herrührenden, austretenden Strahlen bald divergirend, bald parallel, bald konvergirend die Linse verlassen. Man versetze daher den leuchtenden Punkt zuerst an den Ort *f* in eine solche Entfernung *fd*, dass die von ihm ausgehenden Strahlen, die den Kegel *gfp* bilden, nach ihrem Austritte, die zu *ab* parallelen Richtungen *hi*, *kl* etc. annehmen. Es wird in diesem Falle von dem leuchtenden Punkte ein dünner Lichtzylinder, dessen Querschnitt der Pupille gleich ist, in das bei *a* ruhende Auge eintreten und wenn man einen ausgedehnten Gegenstand betrachtet, so wird jeder einzelne Punkt desselben einen solchen dünnen Lichtzylinder ins Auge senden.

Unter diesen Umständen ist *f* offenbar ein Brennpunkt und man kann daher sagen, dass sich der leuchtende Punkt in seinem Brennpunkte befinde. Unter den von *f* ausgehenden Strahlen wird einer wie *fp* mit dem Krümmungshalbmesser *cp* der oberen Linsenfläche zusammenfallen. Dieser Strahl *fp* wird daher in seinem Einfallspunkte *p* keine Brechung erleiden; er wird erst an der unteren Fläche in *k* gebrochen, wo er dann die Richtung *kl* einschlägt. Diese normal zu der oberen Linsenfläche von *f* gezogene Linie *fp* muss als Abstand des der Richtung *dx* entsprechenden Brennpunktes, den man den elementaren nennen kann, angesehen werden.

Rücken wir den leuchtenden Punkt von dem Orte *f* näher an die Linse, so befindet er sich schon innerhalb seiner elementaren Brennweite und die ihm angehörigen austretenden Strahlen werden nicht mehr parallel zu *ab* sein, sondern sie werden damit nach abwärts zu divergiren und es wird in diesem Falle von jedem Punkte eines ausgedehnten Gegenstandes ein Strahlenkegel in das bei *a* ruhende Auge eindringen, dessen Basis die Pupille ist.

Verschiebt man aber den leuchtenden Punkt in der *dx* über *f* hinaus, so befindet er sich schon ausserhalb seiner Brennweite und es werden die ihm angehörigen Strahlen, nach ihrem Austritte, jetzt gegen die *ab* konvergiren und sie schneiden.

Dieser Durchschnittspunkt der konvergent austretenden Strahlen wird irgendwo in der Verlängerung von *ab* z. B. nach *y* fallen;

das hängt natürlich von der Lage des leuchtenden Punktes in der dx ab. Da $ab < yb$ ist, so befindet sich in diesem Falle das Auge in dem Bereiche konvergenter Strahlen; wäre aber das Auge in a', so dass $a'b > yb$, so würde es schon von divergenten Strahlen getroffen.

Diese Betrachtung, der wir uns eben jetzt hingegeben haben, gilt, wie diess ja von selbst einleuchtet, nicht bloss für den Ort a des Auges, den wir als innerhalb der Brennweite der Linse liegend supponirt haben, sondern auch bei jeder anderen Lage desselben: also auch, wenn es sich im Brennpunkte, oder ausserhalb der Brennweite befindet.

Da nun jedem Elemente der Linse ein besonderer Brennpunkt zukommt, so wird man zu unterscheiden haben zwischen den Elementar-Brennpunkten und dem Linsen-Brennpunkte, welcher letztere gleichsam aus den ersteren resultirt. Beschreibt man mit cf als Halbmesser um den Mittelpunkt c ein Stück einer Kugelfläche, so liegen auf dieser alle elementaren Brennpunkte. Wird das Gesichtsfeld von einer ebenen, gegen die optische Axe senkrecht gehaltenen Fläche gebildet, so ist es klar, dass nicht alle Punkte desselben in ganz gleichen Verhältnissen stehen können. Ist z. B. der mittlere in der optischen Axe liegende Punkt der Fläche in seinem elementaren Brennpunkte, so können es die anderen Punkte nicht mehr sein; es wird vielmehr jeder derselben schon ausserhalb seiner elementaren Brennweite liegen und zwar desto mehr, je weiter er von der optischen Axe entfernt ist.

5°. Dem Gesagten zu Folge ist es nun klar, dass eine innerhalb der Brennweite einer Linse befindliche Schrift deutlich erscheinen und lesbar sein werde, das Auge mag sich in beliebigen Entfernungen d. h. innerhalb oder ausserhalb der Brennweite oder im Brennpunkte selbst befinden; weil ja unter dieser Voraussetzung die einem nemlichen Punkte des Objektes angehörigen Strahlen, stets divergent in das Auge gelangen werden, dieses letztere mag was immer für eine Entfernung von der Linse haben, und daher das Sehen in diesem Falle, wenigstens annäherungsweise, noch unter den nemlichen Bedingungen zu Stande kommt, wie mit unbewaffnetem Auge. Wird aber die Schrift ausserhalb der Brennweite der Linse gehalten, so erscheint sie ganz verworren und absolut unlesbar, namentlich stets wenn sich das Auge innerhalb der Brennweite befindet, denn da empfängt es schon, wie vorhin gezeigt wurde, von jedem Punkte des Objektes konvergente Strahlen. Ist aber das Auge ausserhalb der Brenn-

weite, so liesse sich eine Entfernung desselben vermuthen, bei welcher es die Schrift wieder deutlich sehen müsste. Die gebrochenen Strahlen treten nemlich zwar konvergent aus, aber eben desshalb werden sie von der Stelle an, wo sie sich schneiden, wieder divergirende Richtungen annehmen müssen. Von da angefangen müsste also die Schrift wiederum lesbar werden. Aber hier ist nun der Ort, meinen Versuch zu beschreiben, wenn ich nicht Gefahr laufen will, dass er sich allmählig ganz in theoretische Betrachtungen auflöse, da er schon grossentheils durch das Vorangehende antizipirt sein dürfte.

Man bohre mit einer nicht zu dünnen Stecknadel eine kleine, runde Oeffnung in ein Blatt Papier und halte dieses so, dass die Oeffnung in den Brennpunkt *F* (Fig. 45) der Linse *MN* zu liegen komme; hinter dieser Oeffnung befinde sich in beliebiger Entfernung ein Gegenstand *ik* z. B. eine Schrift, wenn man beim Tageslichte beobachtet, oder eine brennende Lampe, wenn der Versuch Abends gemacht wird. Man halte nun das Auge, indem man die Oeffnung des Papierschirmes fixirt, Anfangs ziemlich nahe an der Linse; entfernt man es hierauf successive immer mehr und mehr von derselben, so erscheint die fixirte Oeffnung immer grösser und grösser und zuletzt, wenn die Distanz des Auges von der Linse eine bestimmte Grösse erreicht hat, wenn sich also das Auge etwa an der Stelle *O* in der optischen Axe befindet, erscheint die Oeffnung des Papierschirmes so gross, wie die Linse selbst und man sieht dann durch dieselbe die hinter ihr befindliche Schrift oder Lampe ganz ebenso gut und deutlich, wie mit voller Linse, ohne Anwendung dieses Diaphragma. Man wendet zu diesem Versuche am besten eine Linse an, deren Brennweite nicht gross ist, etwa bloss $2\frac{1}{2}$ Zoll beträgt, weil sich eine solche bequem handhaben lässt. Hält man bei diesem Versuche das Diaphragma und die Linse mit den Händen, wie hier vorausgesetzt wurde, so ist es wegen der zitternden Bewegung der letzteren sehr schwer und anstrengend, die Oeffnung des Diaphragma und den optischen Mittelpunkt der Linse unverrückt in der Visirlinie zu erhalten. Um also den Versuch mit mehr Bequemlichkeit auszuführen, wird es angezeigt sein, die Linse *MN* in ein Rohr zu fassen, dessen Länge $= OF$ ist, und das man an beiden Enden mit Deckeln (etwa papierenen) versieht, in deren jedem sich eine in der optischen Axe der Linse liegende Oeffnung befindet, durch deren eine das Licht von den Objekten eindringt, während durch die andere das Auge hindurchschaut.

Es wird uns gewiss interessiren durch diese zwei so kleinen

Oeffnungen die betrachteten Objekte ebenso gut wahrzunehmen, wie beim direkten Hindurchsehen durch die Linse. Das Rohr könnte auch aus verschiebbaren Theilen bestehen, wodurch es möglich würde, die für das Auge bestimmte Oeffnung der Linse auch zu nähern und so auch den Effekt dieser Annäherung zu verfolgen.

Dieser Versuch liefert unzweideutig den Beweis, dass die in das Auge eindringenden Strahlen sich vor ihrer Brechung durchkreuzen und zwar im Brennpunkte *F*.

Die Entfernung *Ol* des Auges von der Linse, wenn es den durch den Versuch ausgemittelten Platz in *O* eingenommen hat, ist weit grösser als die Brennweite der Linse. Auch dürfte diese Distanz *Ol* unter übrigens gleichen Umständen von der Beschaffenheit des Auges abhängen.

Der Ort *O* ist es also, wo für das Auge ausserhalb der Brennweite wieder ein deutliches Sehen beginnt; ich sage „beginnt" weil die Deutlichkeit nicht leidet, selbst wenn man dem Auge eine noch grössere Entfernung gibt, als *Ol*.

Betrachtet man von *O* aus, nach Beseitigung des Diaphragma irgend einen Gegenstand in beliebigen Entfernungen von der Linse, innerhalb oder ausserhalb ihrer Brennweite, so wird man ihn bald aufrecht, bald verkehrt; bald vergrössert, bald verkleinert, aber stets deutlich sehen.

Den eben beschriebenen Versuch kann man auch in folgender, abgeänderter Form anstellen. Man trage auf einem Blatte Papier einen schwarzen Punkt mit Dinte auf, also eigentlich ein sehr kleines, rundes Scheibchen, ziehe um dasselbe ein paar kleine, konzentrische Kreise und betrachte dieses Objekt von *O* aus, indem man es zuerst innerhalb der Brennweite nahe an der Linse hält, dann aber allmählig von derselben entfernt. Man wird finden, dass bei successiver Annäherung dieses Objektes an den Brennpunkt *F* die Kreise, indem sie immer grösser werden, nach einander aus dem Gesichtsfelde verschwinden, zuerst der grössere, dann der kleinere und dass, wenn der schwarze Punkt im Brennpunkte angekommen ist, man nur mehr noch diesen sieht. Die ganze Linse bis an ihren Rand erscheint gleichsam voll von diesem schwarzen Punkte, vorausgesetzt, dass man ihn nicht zu klein aufgetragen hat. Das Gesichtsfeld ist also offenbar zu einem blossen Punkte (aber freilich nicht zu einem geometrischen) zusammengeschrumpft. Entfernt man das Objekt über *F* hinaus, so kommen die Kreise wiederum zum Vorschein,

aber verkehrt, was man leicht erkennt, wenn man eine ihrer Seiten vorher mit einem Zeichen versehen hat. Das schwarze Scheibchen erscheint also, wenn es im Brennpunkte der Linse liegt, unter dem Winkel *MON* (Fig. 45), also so gross, wie die Linse selbst, — das ist Thatsache und somit schneiden sich die vom Brennpunkte ausgehenden Strahlen in dem Punkte *O* der Axe.

Aber wie ist diess möglich? Das widerspricht ja einem bekannten, allgemein als richtig anerkannten Satze der Optik, dem zu Folge die vom Brennpunkte herkommenden Strahlen parallel zur Axe auszutreten haben. Dieser Einwurf ist gewichtig, allein er dürfte sich heben, wenn man den Parallelismus der austretenden Strahlen bloss für die elementaren Brennpunkte, deren Existenz nicht zu bezweifeln sein dürfte, vindizirt und zugleich erwägt, dass der Linsenbrennpunkt, da er aus den elementaren resultirt, einen etwas grösseren Abstand von der Linse haben dürfte, als diese letzteren. Ich muss jedoch hinzufügen, dass ich weit entfernt bin, diese kurze Bemerkung schon für eine genügende Antwort auf die hier vorliegende Frage zu halten. Dazu wäre erforderlich den inneren Zusammenhang zwischen dem Linsenbrennpunkte und den elementaren systematisch nachzuweisen.

Dieser Versuch bietet jedoch eine Eigenthümlichkeit dar, die denjenigen, die ihn wiederholen, allsogleich auffallen dürfte und die ich nicht unberührt lassen kann. Der schwarze Fleck, den wir jetzt ohne die vorher erwähnten, konzentrischen Kreise, auftragen wollen, wird nemlich nicht unter allen Umständen die ganze Linse ausfüllen, sondern in vielen Fällen wird er als schwarze Scheibe, die von einem konzentrischen, schwarzen Ringe umgeben ist, erscheinen. Die Erklärung dieser Erscheinung ergibt sich ganz ungezwungen. Der kleinste Querschnitt des einfallenden Lichtkörpers bei *F* (Fig. 45) ist, wie bekannt ein kleiner Kreis, denn die einfallenden Lichtstrahlen durchschneiden die Axe nicht in einem und demselben Punkte. Verfolgt man diese Strahlen in der Richtung vom Rande der Linse gegen ihre Mitte (Fig. 46), so schneiden sich je zwei aufeinanderfolgende in den Punkten α, β, γ, δ etc. Liegt nun ein Gegenstand *P* der Linse so nahe, dass alle diese Durchschnittspunkte hinter denselben fallen, so werden alle Punkte dieses Gegenstandes wie z. B. *a*, *b*, *c*, *d* etc. mittelst der Linse in derselben relativen Lage erscheinen, in welcher sie sich wirklich befinden. Bringt man aber diesen Gegenstand in grössere Entfernung von der Linse, etwa nach *Q*, so werden bereits einige dieser Durchschnittspunkte, wie α, β etc.

vor demselben liegen; es werden das die Durchschnittspunkte sein, die den Randstrahlen entsprechen. Diese Randstrahlen werden somit schon die relative Lage derjenigen Punkte des Gegenstandes, von welchen sie herkommen, umkehren, während die Zentralstrahlen, deren Durchschnittspunkte, wie γ, δ etc. noch hinter dem Gegenstande liegen, die mittlere Parthie desselben, von welcher sie herkommen, noch aufrecht erscheinen lassen. Erst wenn der Gegenstand nach R gerückt wird, so weit, dass alle erwähnten Durchschnittspunkte vor denselben fallen, findet eine vollständige Umkehrung Statt. Befindet sich also das Blatt Papier mit dem schwarzen Fleck gerade in der Lage Q, und liegt der schwarze Fleck in der optischen Axe, so wird man ihn mittelst der Zentralstrahlen aufrecht als schwarze Scheibe sehen und da er nicht so gross ist, so wird auch noch ringsum ein Theil der weissen Papierfläche gesehen; zugleich wird man auch mittelst der Randstrahlen von gewissen Theilen des Fleckes auch bereits ein umgekehrtes Bild erhalten. Der erwähnte konzentrische Ring verdankt also dieser partiellen Umkehrung seine Entstehung. Bei einer gewissen Distanz des Fleckes von der Linse wird das zwischen der Scheibe und dem konzentrischen Ringe enthaltene weisse Mittelfeld verschwinden und dann werden beide ein zusammenhängendes Ganze bilden.

Da bei der Lage O des Auges (Fig. 45) die einfallenden Strahlen sich im Brennpunkte durchkreuzen, so wird man wenigstens annäherungsweise annehmen können, dass es von jedem Punkte eines ausgedehnten Gegenstandes nur einen einzelnen Strahl empfange. Stellt man sich z. B. das Gesichtsfeld gh vor, so werden von dem Punkte i desselben zwar unzählige, in ihrer Gesammtheit einen Kegel bildende Strahlen auf die Linse fallen; aber von allen Strahlen dieses Kegels wird nur derjenige, der durch den Brennpunkt gehet, nemlich ip in das Auge gelangen, indem er nach seinem Austritte aus der Linse die Richtung kO einschlägt.

Unter diesen Umständen wird also jeder Gegenstand, er mag sich innerhalb oder ausserhalb der Brennweite befinden, nur mittelst solcher Strahlen gesehen, die dem Brennpunkte angehören.

Bekanntlich erzeugt ein ausserhalb der Brennweite einer Sammellinse liegender Gegenstand cd hinter derselben ein verkehrtes Bild ru, das man auf einem Schirme sichtbar machen kann. Dieses Bild könnte man füglich das objektive nennen; jenes andere aber, das beim unmittelbaren Hindurchsehen durch die Linse wahrgenommen wird, das subjektive. Das objektive Bild ru kommt bekanntlich durch die Lichtkegel zu Stande,

welche von den einzelnen Punkten des Objektes ausgehen und deren jeder die Linsenfläche zur Basis hat. So z. B. bilden die vom Punkte *c* auf die Linse fallenden Strahlen den Kegel *cMN*; nach der Brechung werden diese Strahlen, da sie sich in *u* schneiden, innerhalb des Kegels *MNu* liegen und von *u* angefangen nach abwärts divergiren.

Es herrscht nun die Ansicht, dass dieses Bild *ru* die Rolle des Objektes spiele, welches dem in *O* ruhenden Auge zur Betrachtung vorliegt. Allein, wenn man in *F* das Diaphragma mit der kleinen Oeffnung anbringt, sind da noch solche Lichtkegel, welche die Linsenfläche zur Basis haben, möglich? kann da überhaupt das Bild *ru* noch entstehen? Es scheint nicht, und doch entstehet und bestehet das subjektive Bild. Es kann also das erstere keine Bedingung sine qua non für das letztere sein.

Wir wollen uns, um in dieser Beziehung sichere Anhaltspunkte zu gewinnen, der folgenden Betrachtung hingeben.

Die Figur 47 stellt eine Sammellinse und zwar der Einfachheit wegen eine plankonvexe vor. Es sei *OA* ein beliebiger, einfallender Strahl, der von einem, in der optischen Axe liegenden Punkte *O* herkommt; *AB* sei der entsprechende gebrochene. Verlängert man diesen letzteren, bis er die Austrittsfläche in *E* trifft und zieht von *E* die $ED \parallel OA$, so stellt *ED* die Grösse des austretenden Strahles vor. Legt man dann zu dem Punkte *E* der krummen Fläche die Tangente *uz*, zieht $BK \perp uz$ und beschreibt mit *ED* um *E* einen Bogen, der jenes Perpendikel in *J* durchschneidet, so gibt die von *J* durch *E* gezogene Gerade *JH* die Richtung des austretenden Strahles. Der leuchtende Punkt *O* hat hier eine solche Entfernung von der Linse, dass das entsprechende Eintrittsbild *B* noch näher der Linse liegt, als der Krümmungsmittelpunkt *C*. In diesem Falle wird der austretende Strahl *EH*, der den leuchtenden Punkt an der Stelle *J* (und nicht etwa in *S*, wo er die Axe schneidet) erscheinen lässt, unter allen Umständen nach abwärts mit der Axe divergiren; es werden überhaupt alle, von *O* ausgehenden Strahlen, divergent austreten, wenn ihre respektiven Eintrittsbilder zwischen den Krümmungsmittelpunkt und die Linse fallen. Entfernt sich *O* immer mehr von der Linse, so wird sich auch *B* entfernen und zuletzt in den Krümmungsmittelpunkt *C* zu liegen kommen. Auch in diesem Falle wird der austretende Strahl mit der Axe divergiren; es wird aber seine Richtung, da *EH* bei der supponirten Bewegung des leuchtenden Punktes sich schraubenrechts drehet, bereits mit dem Krümmungshalbmesser zusammenfallen.

Ueberschreitet B den Krümmungsmittelpunkt, so wird EH auf die linke Seite des Einfallslothes Ex übergehen; und zuletzt parallel mit der Axe werden.

Wir wollen nun aber voraussetzen, dass alle von O ausgehenden Strahlen nach ihrem Austritte aus der Linse divergiren, dass sich also O innerhalb ihrer Brennweite befinde.

Diese austretenden Strahlen bilden keinen vollkommenen Kegel, da sie sich nicht in einem einzigen Punkte der Axe schneiden, welchen man als Scheitel betrachten könnte. Da jeder dieser Strahlen den leuchtenden Punkt an einem anderen Orte (in der ihm zugehörigen Senkrechten) erscheinen lässt, so sieht man ihn vielfach, somit als eine runde (jedenfalls krumme) Fläche.

Da die Pupille wegen ihrer Kleinheit nur wenige der austretenden Strahlen aufnimmt, so kann man, wenigstens annäherungsweise, den in sie eintretenden Lichtkörper als vollkommen kegelförmig betrachten; es wird jedoch das Bild des leuchtenden Punktes nicht im Scheitel dieses Kegels liegen, sondern in einer kleinen Entfernung davon und zwar bezüglich des beobachtenden Auges vor dem Scheitel; es wird also ein in der Nähe des Scheitels liegender Querschnitt des Kegels das Bild vorstellen und da dieser Querschnitt bei Weitem kleiner ist, als die Basis des Kegels d. i. als die Pupille, so wird in diesem Falle die Deutlichkeit sehr wenig beeinträchtigt werden. Das ist der Grund, warum Objekte, die sich innerhalb der Brennweite der Linse befinden, noch so deutlich gesehen werden, wiewohl die Bedingungen nicht ganz dieselben sind, wie bei der Betrachtung mit unbewaffnetem Auge, denn in diesem letzteren Falle zeigt jeder der divergent in dasselbe eintretenden Strahlen den leuchtenden Punkt wirklich im Scheitel des Kegels.

Wenn ferner die einem leuchtenden Punkte angehörigen Strahlen parallel zu einander aus der Linse austreten, so dringt in das Auge ein Lichtzylinder ein, dessen Basis die Pupille ist. Ein Querschnitt dieses Zylinders, dessen Lage durch das Gesetz des Snellius genau bestimmt ist, wird das Bild des leuchtenden Punktes vorstellen. Es erscheint somit ebenfalls als Scheibe, deren Durchmesser schon jenem der Pupille gleichkommt. Dieser Umstand wird wohl schon etwas mehr der Deutlichkeit Abbruch thun, als es zuvor der Fall war, allein wegen der Kleinheit der Pupille doch nicht in zu hohem Grade.

Ich übergehe nun zu dem dritten Falle, wo die einem und

demselben leuchtenden Punkte angehörigen Strahlen aus der Linse konvergent austreten.

Denkt man sich demnach das Auge zuerst an irgend einer Stelle innerhalb des Kegels *MuN* (Fig. 45) so ist es der Punkt *c*, der als Scheibe erscheint, da die den gedachten Kegel bildenden Strahlen alle von *c* herkommen. Der Durchmesser dieser Scheibe wird hier stets grösser sein, als jener der Pupille und zwar desto grösser je mehr sich das Auge dem Durschnittspunkt *u* nähert, weil dann immer mehr Strahlen in dasselbe eindringen; ja es kann die Scheibe zuletzt so gross erscheinen, wie die Linse selbst, wenn nemlich das Auge in den Scheitel *u* des Kegels eintritt. Ueberschreitet es diesen Punkt, so dass es den divergirenden Strahlen des Kegels *Ouz* sich aussetzt, so muss auch jetzt, wie vorhin, der Punkt *c* als Scheibe erscheinen und zwar an demselben Orte, wie früher. Unmöglich kann das Auge die vermöge der divergenten Strahlen erhaltenen Eindrücke in den Kreuzungspunkt *u* dieser Strahlen versetzen, denn das widerspricht dem Gesetze des Snellius. Je weiter sich aber das Auge von *u* innerhalb dieses zweiten Kegels entfernt, desto wenigere Strahlen werden in dasselbe eintreten und desto kleiner wird der Durchmesser der Scheibe sein. Die austretenden Strahlen wirken also, nach ihrer Durchkreuzung, wo sie divergiren, ebenso ungünstig, wie vor der Durchkreuzung, wo sie konvergiren. Wenn daher in dem Falle der Figur 45 bei der Lage *O* des Auges ein so deutliches Sehen Statt findet, so ist dieses nur dem Umstande zuzuschreiben, dass von jedem Punkte des Objektes annäherungsweise nur ein einzelner Strahl in das Auge gelangt. Das wird nicht mehr der Fall sein, wenn man das Auge von dem Platze *O* näher an die Linse rückt und daher wird auch die Undeutlichkeit mit dieser Annäherung des Auges immer grösser und grösser.

Der eben gegebenen Auseinandersetzung gemäss wird demnach zur Deutlichkeit zunächst erfordert, dass der Durchmesser der Bildscheibe, als welche jeder leuchtende Punkt erscheint, wenigstens nicht grösser sei, als jener der Pupille. Diese Bedingung erfüllen aber die divergenten Strahlen und zwar in allen Abstufungen der Divergenz bis zum Parallelismus. Es müssen jedoch die Strahlen gleich am Anfange ihres Weges gegen das Auge divergiren. Strahlen, die erst auf dem Wege selbst in den Zustand der Divergenz gerathen, indem sie ursprünglich konvergiren und sich hierauf durchkreuzen, vermögen die gedachte Bedingung nicht zu erfüllen. Das Gesagte ist, wie es sich von selbst verstehet, nur auf das subjektive Bild zu beziehen. Zur Entstehung des objektiven Bildes werden wiederum solche Strahlen

erfordert, die sich nach ihrem Austritte aus der Linse durchkreuzen, denn fängt man die austretenden Strahlen mit einem Schirme auf, so wird jene Stelle desselben, welche von dem Scheitel *u* (Fig. 45) getroffen wird, sehr hell erscheinen müssen, da sie von so vielen, nemlich von allen Strahlen des Kegels beleuchtet wird. Der Begriff des objektiven Bildes ist demnach klar und deutlich; welches sind nun aber die charakteristischen Merkmale des subjektiven?

Der Ort *u*, d. i. der Scheitelpunkt des aus der Linse austretenden Lichtkegels ist wohl für das objektive Bild der günstigste, bezüglich des subjektiven aber der ungünstigste, denn bringt man das Auge an diesen Ort, so ist der Durchmesser des scheibenförmigen Bildes des Punktes *c* am grössten, da er unter dem Gesichtswinkel *MuN* erscheint. Da ferner von jedem Punkte dieser Bildscheibe nur ein einzelner Strahl in das Auge gesendet wird, so besitzt sie nicht einmal die Helligkeit, welche dem leuchtenden Punkt als solchem zukommt, wenn er mit unbewaffnetem Auge betrachtet wird; denn in diesem letzteren Falle werden die Eindrücke, welche die in das Auge eindringenden Strahlen erzeugen, alle in denselben Punkt, nemlich den Scheitel des Kegels, woher sie kommen, wieder zurückversetzt, sie verstärken sich also wechselseitig und daher muss wohl die Helligkeit dieses Punktes mit der Anzahl der Strahlen zunehmen.

Für die Eintrittsfläche der Linse (Fig. 47) ist der leuchtende Punkt *O* ohne Zweifel als Objekt zu betrachten. Dieses Objekt wird nun durch die Brechung an dieser Eintrittsfläche modifizirt, — es wird in ein anderes verwandelt. Diese Umwandlung betrifft natürlich nur seine optischen Eigenschaften. Ist die Eintrittsfläche der Linse, wie in Figur 47 angenommen wurde, eine Ebene, so verwandelt sich der leuchtende Punkt *O* in eine leuchtende Linie, welche in die optische Axe zu liegen kommt. Diese Linie unterscheidet sich aber schon wesentlich von leuchtenden fisischen Linien; denn ein beliebiger Punkt derselben sendet nicht mehr Lichtstrahlen nach allen möglichen Richtungen aus, sondern alle Strahlen, die er wirklich aussendet, bilden den Mantel eines hohlen Kegels, dessen Axe mit der optischen Axe der Linse zusammenfällt. Jedem Punkte der Linie entspricht also so ein konischer Strahlenmantel und diese Mäntel stecken wie Düten in einander. Diese eigenthümliche Linie ist nun wieder das Objekt für die Austrittsfläche der Linse und da letztere sphärisch gekrümmt ist, so wird dieses Objekt wiederum in der Art modifizirt, dass es die Figur einer krummen Fläche erhält. Jeder Punkt der gedachten Linie wird nemlich in einen Ring

verwandelt, dessen Mittelpunkt in die optische Axe fällt. Je weiter der den Ring erzeugende Punkt von der Linse abstehet, desto grösser wird der Ring sein, und da diese Ringe in verschiedenen zu einander parallelen Ebenen liegen, so werden sie wohl in ihrer Gesammtheit eine krumme Fläche darstellen müssen, — und nur annäherungsweise eine ebene Scheibe. Diese leuchtende Scheibe ist es nun wieder, die bezüglich des Auges als Objekt zu betrachten ist und die sich wiederum von einer leuchtenden fisischen Scheibe dadurch unterscheidet, dass von jedem Punkte derselben nicht ein Lichtkegel, dessen Basis die Pupille ist, in das Auge dringt, sondern immer nur ein einzelner Strahl.

Die aufeinanderfolgenden Brechungen ändern somit nur das ursprünglich gegebene Objekt und zwar in der Art, dass seine optische Erscheinung eine andere wird. Das, was wir subjektives Bild nennen, ist also nichts anderes, als eine optische Modifikation des Objektes selbst. Das subjektive Bild hat also im Raume seinen bestimmten Ort und wird ganz so wahrgenommen, wie irgend ein fisisches Objekt ohne Vermittelung der Linse.

Aber wenn dem wirklich so ist, so vermag ja die Linse die Helligkeit eines einzelnen leuchtenden Punktes nicht zu erhöhen, auch wenn sie noch so viele Strahlen von demselben in das Auge bringt. In der That, sie vermag es nicht, denn die Vermehrung der Strahlen wird nur die Scheibe vergrössern, aber ihre Helligkeit verbleibt die nemliche, wie zuvor. Anders verhält es sich, wenn das betrachtete Objekt, wie z. B. eine Flamme, aus sehr vielen leuchtenden Punkten bestehet, denn indem die scheibenförmigen Bilder dieser Punkte in sehr grosser Anzahl übereinanderfallen, muss daraus wohl ein verstärkter Licht-Effekt resultiren.

Mit Bezugnahme auf die Figur 46 kann ich nicht umhin, hier noch eine Bemerkung zu machen, welche die Brennweite betrifft. Es sei demnach AF die Brennweite der äussersten Randstrahlen d. h. wenn sich in F ein leuchtender Punkt befindet, so werden nur die äussersten Randstrahlen nach ihrem Austritte aus der Linse in einer Zylinderfläche liegen. Ist nun ebenso AG die Brennweite für die innersten Zentralstrahlen, so kann man den Unterschied FG dieser beiden Grenzwerthe das Brenn-Intervall nennen. So lange die Entfernung eines leuchtenden Punktes von der Linse noch $< AF$ ist, divergiren alle austretenden Strahlen mit der Axe, sobald sie aber $> AG$ wird, konvergiren alle gegen die Axe. Das Brenn-Intervall ist also jene Strecke, auf welcher die Umwandlung der divergenten Strahlen in parallele und hierauf in konver-

gente oder umgekehrt bewerkstelligt wird, jenachdem sich der leuchtende Punkt von *F* gegen *G* oder umgekehrt bewegt. Von diesem Umwandlungsprozesse werden, wenn der leuchtende Punkt sich von *F* gegen *G* bewegt, zuerst die Randstrahlen ergriffen und hierauf succesive die anderen, wie sie gegen die Mitte der Linse auf einanderfolgen.

Befindet sich innerhalb des Brenn-Intervalles ein Auge, welches ein ausserhalb der Brennweite der Linse liegendes Objekt, z. B. eine Flamme betrachtet, so wird es mittelst der Zentral-Strahlen die Mitte des Objektes aufrecht sehen, während gleichzeitig die Randstrahlen andere Theile des Objektes umgekehrt erscheinen lassen. Dieses umgekehrte Bild umgibt ringförmig das aufrechte. Dieser Versuch ist nicht zu verwechseln mit dem früher besprochenen, bei welchem sich das Objekt innerhalb des Brenn-Intervalls befand. Man muss zu diesem Versuche, da bei der vorausgesetzten Lage des Auges die Undeutlichkeit sehr gross ist, natürlich ein Objekt ohne Kontraste wählen, das an sich hinreichend hell und, falls man den Ring sehen will, auch nicht zu gross ist. Eine kleine Flamme oder eine runde Oeffnung in dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers wird sich dazu am besten eignen.

Hier ist auch der Ort, mein sub 3 gegebenes Versprechen zu erfüllen. Unter den Bedingungen, die dem Entwurfe der Figur 45 zu Grunde liegen, müssen die Kegel *gFh* und *MON*, von denen der erstere die einfallenden, der letztere die gebrochenen austretenden Strahlen umfasst, sich in der Art durchschneiden, dass sie den gemeinschaftlichen Querschnitt *cd* geben. Befände sich das Auge in *F*, so würde das Gesichtsfeld, welches auch seine Entfernung sein mag, stets unter dem nemlichen Winkel *gFh* erscheinen. Da sich nun aber das Auge nicht in *F*, sondern in *O* befindet, so wird das Gesichtsfeld *cd* unter dem Winkel *cOd*, das entferntere *gh* unter dem grösseren *gOh* gesehen.

Es wird also das Gesichtsfeld dem unbewaffneten Auge unter einem desto grösseren Winkel erscheinen, je entfernter es ist, während andererseits das Bild immer unter dem gleichen Winkel *MON* gesehen wird. Liegt also das Gesichtsfeld an dem Orte des gemeinsamen Querschnitts *cd*, so wird es dem unbewaffneten Auge unter demselben Winkel *cOd* erscheinen, wie das Bild, denn es ist $cOd = MON$ und da wird, wie schon oben gesagt wurde, der Gegenstand mittelst der Linse ebenso gross gesehen, wie ohne dieselbe.

Ueber diese Grenze hinaus wird die Linse verkleinern, denn

liegt *gh* ausserhalb dieser Grenze, so wird es mit unbewaffnetem Auge unter dem Winkel *gOh* gesehen, während es die Linse unter dem kleineren *MON* erscheinen lässt. Das bestätigt sich alles ganz genau durch den Versuch.

6°. Durch Hinzunahme einer zweiten Sammellinse kann ein deutliches Sehen selbst in jenen Fällen erzielt werden, wo sich das Auge nicht in *O* (Fig. 45), sondern näher an der Linse befindet, ja selbst, wenn es innerhalb der Brennweite derselben liegt, und wir wollen nun eine solche Kombination zweier Linsen betrachten.

Es sei demnach eine Sammellinse *MN* (Fig. 48) und innerhalb ihrer Brennweite $= p$ ein leuchtender Punkt in *O*. Unter diesen Umständen werden die von ihm ausgehenden Strahlen *Oc* und *Od* in den Richtungen *by* und *ax* austreten, welche Richtungen mit der optischen Axe nach aufwärts divergiren; verlängert man diese Richtungen nach abwärts so schneiden sie die Axe in *h*. Die aus der Linse *MN* austretenden Strahlen scheinen also von dem Punkte *h* herzukommen. Läge dieser Punkt *h* innerhalb der Brennweite $= p'$ der zweiten Linse *PQ*, so würden beide Linsen zusammen noch gerade so wirken, wie eine einzelne; es würden dann die Strahlen aus der zweiten Linse ebenfalls noch mit der Axe nach aufwärts divergiren Wir wollen aber annehmen, dass *h* ausserhalb *p'* liege, alsdann werden die aus der zweiten Linse *PQ* austretenden Strahlen nach aufwärts konvergiren und die Axe in *f* schneiden.

Denken wir uns nun umgekehrt, *f* sei ein leuchtender Punkt und das Auge in *O*, so werden die von *f* ausgehenden Strahlen *fe* und *fg* nach ihrem Durchgange durch beide Linsen genau gegen das Auge konvergiren und sich daselbst schneiden. Aber eben weil sie konvergirend in das Auge eintreten, wird ein deutliches Sehen unmöglich sein. Es würde auch keine Deutlichkeit zu Stande kommen, wenn der leuchtende Punkt von dem Orte *f* näher an die Linse *PQ* gerückt würde, etwa nach *u*, denn alsdann würde sich der Vereinigungspunkt der aus der Linse *MN* austretenden Strahlen von dieser Linse weiter entfernen, etwa nach *r*; das Auge aber, das innerhalb des Kegels *crd* liegt, befände sich alsdann jedenfalls in dem Bereiche konvergenter Strahlen, deren es wegen der Ausdehnung der Pupille nicht wenige aufzunehmen vermag. Die Undeutlichkeit ist so gross, dass man eine Schrift, die sich zwischen *f* und *PQ* befindet, so zu sagen, gar nicht wahrnimmt. Anders verhält sich die Sache, wenn man den leuchtenden Punkt über *f* hinaus in eine grössere Entfernung

von der Objektivlinse *PQ* versetzt, etwa nach *q*; denn da werden die von *q* ausgehenden Strahlen nach erlittener Brechung in der Objektivlinse sich schon in *k* vereinigen, welcher Punkt zwischen den beiden Linsen liegt. Von diesem Punkte *k* gelangen dann die Strahlen, indem sie weiter ihre Wege fortsetzen, in divergirenden Richtungen zur Okularlinse *MN*. Fällt nun *k* bezüglich des Okulars in einen elementaren Brennpunkt, so werden die Strahlen aus dem Okular parallel austreten; liegt aber *k* ausserhalb oder innerhalb der elementaren Brennweite, so werden die Strahlen aus dem Okular konvergiren oder divergiren. In den beiden letzteren Fällen wird der leuchtende Punkt *q* als Scheibe erscheinen, die grösser ist als die Pupille. Der günstigste Fall wird also der erste sein, denn da erscheint das Bild des leuchtenden Punktes so gross, wie die Pupille, und nicht grösser.

Schon aus dem früher Gesagten erhellet, dass *k* in Bezug auf das Okular nicht die Rolle eines Objektes spielen kann, was sich übrigens schon daraus ergibt, dass ein innerhalb der Brennweite einer Sammellinse liegender Gegenstand desto deutlicher gesehen wird, je näher er an die Linse gerückt wird, während bezüglich des Vereinigungspunktes *k* das gerade Gegentheil Statt findet, — mit seiner Annäherung an das Okular nimmt die Undeutlichkeit zu. Soll also bei einer solchen Kombination zweier Linsen noch ein deutliches Sehen Statt finden, so muss *k* in einen elementaren Brennpunkt fallen, welcher ein wenig innerhalb der Brennweite des Okulars liegen dürfte. So wie *k*, müssen auch die objektiven Bilder der übrigen Punkte des ausgedehnten Gegenstandes *st* (Fig. 48) in ihre respectiven elementaren Brennpunkte zu liegen kommen.

Da nun aber der Ort *k* des objektiven Bildes sich mit der Entfernung des leuchtenden Punktes *q* ändert, so ist klar, dass sich auch die Distanz der beiden Linsen nach der jeweiligen Entfernung des Objektes werde richten müssen.

Streng genommen ist die Objektivlinse selbst schon als Objekt für das Okular zu betrachten, aber als ein solches, welches die dahinter befindlichen Gegenstände wahrzunehmen gestattet und überdiess auch die Richtungen der von diesen Gegenständen herkommenden Strahlen abzuändern vermag.

Die Wirkung einer solchen Kombination zweier Linsen ist übrigens eine sehr komplizirte. Sie hängt ab von der Lage des Auges gegen das Okular, von der Entfernung des Gegenstandes und unter übrigens gleichen Umständen von der Distanz der beiden Bestandtheile.

Hat das Auge eine bestimmte Lage in *O* (Fig. 48) eingenommen, so ist das System der austretenden Strahlen, die den Kegel *cOd* bilden und durch welche das Okular seine Eindrücke dem Auge übermittelt, ein für allemal fixirt. Welches auch immer die Entfernung des Gegenstandes und welches auch immer die Distanz der beiden Linsen sei, das Auge vermag nur längs der Richtungen, die innerhalb des Kegels *cOd* liegen, seine Wahrnehmungen zu erhalten. Ist aber das System der austretenden Strahlen fixirt, so ist es auch das der einfallenden. Bei der Lage *O* des Auges (Fig. 48) bilden also die auf das Okular fallenden Strahlen den Kegelstutzen *ybax*, der unten die Fläche des Okulars zur Basis hat und dessen obere Basis ganz oder zum Theile von der Objektivlinse *PQ* gebildet wird. Die von irgend einem Objekte auf die Objektivlinse fallenden Strahlen werden demnach auch ein ganz bestimmtes System darstellen müssen, nemlich ein solches, das nach seiner Brechung in dieser Linse den gestutzten Kegel *ybax* zu geben vermag. Dieses System wird unter den obwaltenden Umständen immer eine Kreuzungstelle *f* haben, welche bekanntlich ein Kreis ist, durch den also alle auffallenden Strahlen durchgehen.

Bringt man das Auge successive in immer grössere Entfernungen vom Okular, so wird der Lichtkörper, den die auf diese Linse fallenden Strahlen bilden, immer andere Gestalten annehmen, wie Figur 43 zeigt. Hatte er Anfangs bei der Lage *a* des Auges die Gestalt eines Stutzens, so ist er bei der Lage *e* zylindrisch und bei der Lage *h* bildet er Doppelkegel.

Im ersten Falle wird das Objektiv, je nach seiner Entfernung vom Okulare, bald das ganze Gesichtsfeld dieses letzteren ausfüllen, bald nur irgend einen Theil desselben einnehmen. In diesem letzteren Falle, wo das Objektiv nicht das ganze Gesichtsfeld des Okulars einnimmt, werden jene Theile des Gesichtsfeldes, welche die Objektivlinse umgeben, bloss durch die Okularlinse gesehen. Das Auge erhält daher von diesen Theilen nur ein sehr verworrenes Bild, welches auch die Wirkung jener Strahlen, die, ihren Weg durch das Objektiv nehmen mussten, nothwendig beeinträchtigt. Man muss daher sorgen, dass das Objektiv stets das ganze Gesichtsfeld des Okulares einnehme oder mit seinen periferischen Theilen über dasselbe hinausreiche. Es ist übrigens klar, dass je mehr die Objektivlinse *PQ* vom Okular entfernt wird, der Durchschnittspunkt *f* (Fig. 48) desto näher an die Objektivlinse heranrücken, aber stets ausser ihrer Brennweite verbleiben müsse.

Im zweiten Falle wird die Objektivlinse bei jeder Distanz einen gleich grossen Theil von dem Gesichtsfelde des Okulars einnehmen und der Durchschnittspunkt *f* wird immer in gleicher Entfernung vom Objektiv sich befinden, nemlich in seinen Brennpunkt fallen.

Die meiste Abwechslung bietet der dritte Fall. Es kann nemlich die Objektivlinse diesseits oder jenseits der Durchschnittsstelle *z* (Fig. 43) oder an dieser Stelle selbst liegen. Liegt sie hinlänglich nahe an *z*, so wird sie mit ihren periferischen Theilen über das Gesichtsfeld des Okulars hinausreichen und zwar desto mehr je näher daran sie liegt. Fällt *z* gerade in die Oberfläche der Objektivlinse (Fig. 48) oder innerhalb ihres Körpers, so wird ein zentraler Theil des Objektivs von dem Durchmesser *mn* hinreichen, um alle zum Auge gehenden Strahlen durchzulassen. Man muss jedoch bedenken, dass *z* kein Punkt, sondern ein Kreis ist, und desshalb wird der Durchmesser *mn* etwas grösser ausfallen müssen.

Man kann somit den Rand der Objektivlinse bis auf diesen zentralen Theil bedecken und wird doch, wie man sich leicht überzeugen kann, durch die verhältnissmässig kleine Oeffnung des Diaphragma, die betrachteten Gegenstände ganz eben so gut sehen, wie bei Anwendung der vollen, unbedeckten Objektivlinse. Es findet also auch bei einer Kombination zweier Linsen etwas ähnliches Statt, wie bei einer einzelnen. Es verstehet sich von selbst, dass jene Strahlen, welche etwa durch den aus dem Gesichtsfelde des Okulares herausragenden Theil des Objektives hindurchgehen, gar nicht ins Auge gelangen können. Setzt man den Fall der Figur 45 voraus, so wird der Effekt abhängen von der Entfernung, welche das Objektiv von *F* hat; ob sich nemlich *F* innerhalb oder ausserhalb der Brennweite des Objektives oder im Brennpunkte desselben befindet, denn von diesen Umständen wird zunächst wieder die Gestalt des auf das Objektiv fallenden Lichtkörpers abhängen.

In dem Falle, wo sich *F* ausserhalb der Brennweite des Objektivs befindet, wird dieser letztere Lichtkörper die Gestalt von Doppelkegeln haben, und es wird somit wiederum eine Durchschnittsstelle vorhanden sein, die wir in Gedanken mit *G* bezeichnen wollen. Die Strahlen schneiden sich dann zweimal in *G* und *F*, bevor sie ins Auge kommen. Liegt ein Gegenstand der Objektivlinse näher als *G*, so wird er noch verkehrt gesehen, liegt er aber jenseits *G*, so erscheint er wieder aufrecht.

Wird die Distanz der beiden Linsen im Allgemeinen grösser

genommen als $p + p'$, so wird nach Umständen das Objekt *st* (Fig. 48) recht nahe an den Brennpunkt des Objektivs gerückt werden müssen, wenn das durch die letztere Linse erzeugte objektive Bild noch innerhalb der Brennweite des Okulars fallen soll. Dieser Fall findet bei den Mikroskopen seine Anwendung.

Ist die Distanz der beiden Linsen $= p + p'$ oder kleiner als diese Summe der Brennweiten, so wird der betrachtete Gegenstand schon weiter vom Objektiv abstehen müssen, wenn das durch das letztere erzeugte objektive Bild innerhalb der Brennweite des Okulars fallen soll, und zwar desto weiter, je kleiner die Distanz der Linsen ist. Dieser Fall liegt den Fernröhren zu Grunde. Da sich die Entfernung der äusseren Gegenstände nicht ändern lässt, so wird man die richtige Einstellung des objektiven Bildes nur dadurch erreichen, dass man die Distanz der Linsen abändert, und da ferner die Deutlichkeit hier ganz unabhängig ist von der Lage des Auges gegen das Okular, so kann das Auge in verschiedene Entfernungen von diesem versetzt werden, ohne dass die Deutlichkeit leidet, aber die Grösse des Gesichtsfeldes wird sich natürlich verändern.

Was die Vergrösserung anbelangt, welche eine solche Linsen-Kombination bewirkt, so muss sie nach denselben Prinzipien, wie bei einer einzelnen Linse, ohne Rücksicht darauf, ob die Kombination den Zweck eines Fernrohres oder Mikroskopes zu erfüllen hat, bestimmt werden. Ist das Auge in *O* (Fig. 48), so sieht es das Bild von *st* unter dem Winkel *cOd*; dem unbewaffneten Auge aber erscheint *st* unter dem Winkel *sOt*, daher die Vergrösserung $= \frac{cOd}{sOt}$. Diese Vergrösserung wird sich natürlich ändern in allen den Fällen, wo sich die Winkel selbst ändern.

§. 23. Ein Prisma erzeugt von einem Objekte unzählige hinter einander liegende Bilder, von denen jedes folgende bezüglich des vorhergehenden ein wenig verschoben erscheint.

Wir wollen zuerst den Fall in Betrachtung ziehen, wo das Licht bloss eine einmalige Brechung und zwar an einer ebenen Trennungsfläche *mn* (Fig. 49) erleidet und dann zum Prisma übergehen.

Ist demnach *o* ein leuchtender Punkt und geschieht die Brechung zum Einfallslothe, so werden die unzähligen Bilder desselben wie *r*, *s*, *t* etc. bekanntlich alle oberhalb *o* in der Verlängerung der Senkrechten *oz* liegen. In ihrer Gesammtheit geben diese Bilder eine Linie *rt*, die sowohl für ein innerhalb des bre-

chenden Mediums befindliches Auge als auch bezüglich der Austrittsfläche als Objekt zu betrachten ist. Alle Strahlen, die von irgend einem Punkte dieser Linie ausgesendet werden, liegen, wie bereits bekannt, in der Oberfläche eines Kegels. So entspricht dem Punkte *t* der Strahlenmantel *tab*, der von der Austrittsfläche, falls diese gegen *mn* geneigt ist, in einer Ellipse *ab* geschnitten wird. Ebenso entsprechen den anderen Punkten *r* und *s* die Strahlenmäntel *grh* und *esf*. Ein innerhalb des brechenden Mediums befindliches Auge wird wegen der geringen Ausdehnung der Pupille natürlich nicht die ganze Linie *rt* übersehen können, sondern nur irgend ein Stück derselben. Da jedoch die Punkte des übersehenen Stückes alle in der nemlichen Senkrechten liegen und sich daher ihre Eindrücke in der Wahrnehmung decken, so folgt, dass der leuchtende Punkt *o* nicht als Linie, sondern wiederum nur als Punkt erscheinen könne. Die Projektion von *rt* in der Ebene *mn* ist ein Punkt und es ist geradeso, als wenn diese Projektion von dem Auge wahrgenommen würde.

Ist nun ferner *pq* ein ausgedehnter Gegenstand, so werden von diesem ebenfalls unzählige hinter einander liegende Bilder, wie *gh*, *ik*, *lu* etc. entstehen und auch diese werden sich in der Wahrnehmung vollkommen decken müssen, da sich ihre Projektionen in der Ebene *mn* decken.

Ganz dasselbe wird auch Platz greifen, wenn wir einen Gegenstand durch ein von parallelen Ebenen begrenztes Medium betrachten, weil in diesem Falle die Normale der Austrittsfläche mit der Normalen *oz* der Eintrittsfläche zusammenfällt.

Ganz Anders wird sich aber die Sache bei einem Prisma verhalten. Da werden die unzähligen, von einem leuchtenden Punkte entstehenden Bilder (Austrittsbilder) in einer Kurve *dag* (Fig. 32) liegen, wenn man die Erscheinung in einer durch den leuchtenden Punkt senkrecht gegen die brechende Kante gelegten Ebene betrachtet. Die Figur 32 wurde übrigens unter der Voraussetzung entworfen, dass alle drei Strahlenpartheien zur Erzeugung der Kurve mitwirken. Auf einmal wird man jedoch diese Kurve, wie leicht begreiflich, nicht übersehen; es kommen jedoch alle ihre Theile nach einander zur Anschauung, wenn man das Prisma vor dem Auge um seine Axe drehet. Hält man das Prisma zuerst so, dass die Kantenstrahlen in das Auge gelangen, so wird die Kurve an dem Ende *d* sichtbar und wenn man dann durch Drehung des Prisma allmählig zu den Strahlen der mittleren und offenen Parthie übergehet, werden ihre anderen Theile, wie sie von *d* gegen

g zu aufeinanderfolgen, zur Anschauung gelangen. Nehmen wir nun an, dass bloss gewisse Strahlen der mittleren Parthie in das Auge eindringen, so mögen die diesen Strahlen entsprechenden Eintrittsbilder des leuchtenden Punktes *o* zwischen *r* und *t* (Fig. 50) in der Verlängerung der Geraden *oz* liegen, welche auf der Eintrittsfläche *mn* des Prisma *mnp* senkrecht stehet.

Fällt man nun von allen diesen Eintrittsbildern Perpendikel auf die Austrittsfläche *pn* des Prisma, wie *ru*, *sv*, *tw* etc., so werden den Eintrittsbildern *r*, *s*, *t* die Austrittsbilder *a*, *c*, *e* entsprechen und es wird unmittelbar *rt*, mittelbar aber der leuchtende Punkt *o* wieder in eine Linie *ae* verwandelt, welche jene Perpendikel schräg durchschneidet.

Diese Linie *ae* ist als derjenige Theil der Austrittskurve zu betrachten, den man auf einmal übersieht. Ihre Projektion in der Ebene *pn* wird, da sie gegen diese Ebene geneigt ist, nicht mehr ein Punkt, sondern ebenfalls eine Linie sein.

Ist nun das betrachtete Objekt ausgedehnt, z. B. eine Linie *oq*, die wir uns in einer auf die brechende Kante senkrecht gelegten Ebene liegend vorstellen wollen, so werden natürlich von dieser ebenfalls sehr viele Bilder wie *ab*, *cd*, *ef* etc. entstehen. Diese Bilder liegen wohl auch jetzt hintereinander, so wie zuvor bei einem von parallelen Ebenen begrenzten Medium, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt jedes folgende Bild gegen das unmittelbar vorhergehende ein wenig verschoben erscheint. Die Projektionen dieser Bilder in der Austrittsfläche des Prisma werden sich daher nicht mehr vollständig decken und es wird eine solche Deckung auch in der Wahrnehmung nicht mehr Statt haben können. Die Verschiebung beträgt aber von einem Bilde zum andern nicht gleichviel, weil ja die Perpendikel nicht gleiche Abstände haben.

Noch Eines muss ich hier bemerken. Wir haben bis nun die Erscheinung in einer gegen die brechende Kante senkrecht gelegten Ebene betrachtet. Unter dieser Voraussetzung kommen von dem ganzen Strahlenmantel *atb* (Fig. 49) natürlich nur die zwei Strahlen *tb* und *ta*, die um 180° von einander abstehen, zur Berücksichtigung. Zieht man von *t* die *tx* senkrecht auf die Austrittsfläche, so wird der Strahl *tb*, der in der Richtung *bc* austritt, jenes Perpendikel in α schneiden und der Strahl *ta*, welcher nach seinem Austritte die Richtung *ad* annimmt, wird es in β schneiden. Es werden demnach α und β die Austrittsbilder sein, welche den genannten um 180° abstehenden Strahlen entsprechen. Da nun aber die übrigen Strahlen des Mantels *atb*,

welche zu beiden Seiten der gegen die brechende Kante senkrecht gelegten Ebene liegen, an der Austrittsfläche ebenfalls gebrochen werden, so werden die diesen letzteren Strahlen entsprechenden Austrittsbilder nothwendig zwischen α und β in jene Senkrechte fallen. Werden also alle Strahlen des Mantels *atb* in Betracht gezogen, so wird *t* in ein lineares Bild $\alpha\beta$ verwandelt. Dieses Bild $\alpha\beta$ liegt ganz in dem Perpendikel *tx* und hat die Eigenthümlichkeit, dass von jedem Endpunkte desselben nur ein Strahl, von jedem intermediären Punkte aber zwei Strahlen ausgesendet werden. Da nun das Gesagte auch von den anderen Punkten der Linie *tr* gilt, so wird diese letztere durch die Brechung an der Austrittsfläche des Prisma eigentlich zu einer ebenen, auf der brechenden Kante senkrecht stehenden Fläche ausgedehnt.

Diese Betrachtung wird im Allgemeinen, unter Berücksichtigung der obwaltenden Einschränkungen auch dann in Anwendung kommen müssen, wenn, wie das beim Auge der Fall ist, nicht alle, sondern nur einige wenige Strahlen eines solchen Mantels in dasselbe eindringen. Denn ruhet das Auge gerade unterhalb *b*, so wird es nicht bloss den Strahl *tb*, sondern da die Pupille eine gewisse Grösse hat, auch noch mehrere andere Strahlen des Mantels *atb*, die zu beiden Seiten von *tb* liegen, aufnehmen können. Es wird also das Auge ein gewisses Stück vom oberen Ende der Linie $\alpha\beta$ übersehen können. Durchwandert das Auge hierauf in der Richtung von *b* gegen *a* den hohlen Raum des Strahlenmantels *atb*, so kann es von dem Eintrittsbilde *t* keinen Eindruck mehr erhalten, wohl aber von *s*, *r* etc.

Erst wenn das Auge unterhalb *a* ankommt, wird es wiederum den Strahl *at*, der nach *ad* gebrochen wird, und mit diesem noch mehrere andere aufnehmen, so dass jetzt wiederum ein bestimmtes Stück vom unteren Ende der Linie $\alpha\beta$ sichtbar wird. Da sich aber das von dem Auge übersehene Stück der Linie $\alpha\beta$ als ein Punkt auf die Austrittsfläche projizirt, so wird es auch in der Wahrnehmung diesen Charakter haben.

Am Schlusse dieses Paragraphen sei es mir erlaubt das Ergebniss desselben in wenigen Worten zusammenzufassen. Das Ergebniss ist die Thatsache, dass durch die Brechung an der Austrittsfläche des Prisma, eine Verschiebung der Bilder bewirkt werde, welche durch die Brechung an der Eintrittsfläche entstehen. Diese Thatsache hängt innig mit dem Gesetze des Snellius zusammen und es ist dadurch die Wirkungsweise des Prisma genau charakterisirt.

An dieses Resultat knüpft sich unmittelbar der Gedanke, ob diese Verschiebung nicht vielleicht die Ursache der prismatischen Farben sei?

Betrachtet man durch ein Prisma eine Fläche, die in ihrer ganzen Ausdehnung eine gleiche Beschaffenheit hat, so wird aus der gegenseitigen Ueberdeckung ihrer Bilder wohl nichts Neues resultiren können, da immer Gleiches über Gleiches fällt. Wenn aber das Objekt Kontraste enthält, wenn wir z. B. ein weisses Quadrat auf schwarzem Grunde betrachten, werden da nicht nothwendig dunkle Parthieen gewisser Bilder über helle anderer fallen? wird nicht der resultirende Eindruck ein anderer als bei vollkommener Ueberdeckung sein müssen?

Dieser, in der Theorie wurzelnden und unmittelbar daraus sich ergebenden Auffassung ist jedoch die Lehre Newton's entgegen, welche gestützt auf einen Versuch die Farben als Bestandtheile des weissen Lichtes erklärt. So wie das Wasser durch den elektrischen Strom in seine chemischen Bestandtheile zerlegt wird, so wird nach dieser Lehre der Sonnenstrahl durch Vermittlung des Prisma in seine optischen Bestandtheile zerlegt.

Wir müssen uns daher jetzt dem Newton'schen Versuche zuwenden und ihn genau durchprüfen, ob er wirklich jene Beweiskraft besitze, die ihm zugeschrieben wird.

§. 24. Abänderung des Newton'schen Fundamentalversuches.

Es sind bereits zwei Jahrhunderte verflossen, seitdem Newton seinen schönen Versuch, der das Farbenbild liefert, angestellt hat. Das, was dieser Versuch unmittelbar zur Anschauung bringt, die allgemein bekannten, sichtbaren Resultate desselben, sind unantastbar; nicht so der Schluss, der daraus gezogen wurde, dass nemlich der Sonnenstrahl oder überhaupt das weisse Licht aus farbigen oder verschieden brechbaren Theilen zusammengesetzt sei.

In Optice, auctore Isaaco Newton, 1740 finden wir auf Seite 18 folgendes Theorem:

Lumen solis constat e radiis diverse refrangibilibus. Probatio ab experimentis desumpta.

Obgleich nun der Beweis dieses Theorems aus dem Versuche hergenommen wird, so ist das doch nicht in dem Sinne zu verstehen, als ob dieses Theorem nichts anderes wäre, als nur der blosse Ausdruck einer unmittelbaren Wahrnehmung. Est ist vielmehr ein Schluss, denn wir lesen weiter auf Seite 21:

Cum igitur e contrario experientia evincatur, imaginem istam non rotundam esse, sed latitudinem ipsius circiter quinque partibus longitudine superari: omnino radii, qui majori refractione ad superiorem imaginis extremitatem mittuntur, magis quam ii qui ad inferius ejusdem extremum progrediuntur, refrangibiles sint, necesse est; nisi ea forte sit refractionis hujusce inaequalitas, quae casu possit accidere. Quo quidem amplius firmatur id, quod erat prima propositione comprobandum, nempe, quae lumina colore differant, ea itidem refrangibilitate inter se differre.

Was also der Versuch unmittelbar darbietet, ist die Wahrnehmung, dass das Spektrum nicht rund, sondern oblong sei, und daraus zog nun Newton jenen Schluss, den er in der Form des obigen Theorems der Nachwelt überliefert hat.

Dieser Schluss wäre nur dann ganz richtig, wenn ausser dem dünnen Bündel Sonnenstrahlen, die man durch die runde Oeffnung des Fensterladens in das verfinsterte Zimmer leitet, gar keine anderen Strahlen durch das Prisma durchgehen könnten; dann könnte man wohl und mit Recht behaupten, die Farben des Spektrums müssen aus dem weissen Lichte herstammen; dann könnte man sie als ausschliessliches Eigenthum dieses Lichtes betrachten.

Allein die Sache verhält sich anders. Man kann doch unmöglich die kleine, runde Oeffnung oder die schmale, lichtgebende Spalte als das alleinige Objekt betrachten, das sich im Gesichtsfelde des Prisma vorfindet und dieses ganz ausfüllt; man kann unmöglich erwarten, dass das Prisma nur die Oeffnung und nicht auch theilweise ihre Umgebung, d. i. Theile des Fensterladens, inwieweit sie im Gesichtsfelde liegen, abbilden werde.

Wird demnach der Versuch unter den gewöhnlichen, von Newton angegebenen Bedingungen angestellt, so gehen durch das Prisma nebst den Strahlen, welche die Oeffnung liefert, auch noch solche hindurch, die von ihrer Umgebung herkommen. Da nun aber die helle Oeffnung mit ihrer Umgebung, welche dunkel ist, einen Kontrast bildet, so bestehet das Irrthümliche des obigen Schlusses darin, dass das, was möglicher Weise die Wirkung des Kontrastes ist, dem weissen Lichte allein zugeschrieben wird.

Um nun diese Frage mit Sicherheit zu entscheiden, muss man den Newton'schen Versuch in der Art abändern, dass aus dem Gesichtsfelde des Prisma jeglicher Kontrast beseitigt werde. Man erreicht diesen Zweck mit Hilfe einer matt geschliffenen Glastafel. Diese hat die Eigenschaft, dass sie vor das Auge ge-

halten, die äusseren Gegenstände unsichtbar und somit auch ihre Kontraste verschwinden macht. Setzt man sie aber der direkten Einwirkung der Sonne aus, so bildet sie im durchgelassenen Lichte eine weisse, gleichförmig helle Fläche und wird so zu einer ausgiebigen Quelle weissen Lichtes. Eine solche Tafel habe ich nun als Rückwand *MN* (Fig. 51) eines dunklen, vorläufig aus Pappendeckel angefertigten Kastens eingesetzt. In der vorderen Wand *EF* dieses Kastens befand sich eine viereckige Oeffnung zur Aufnahme eines Prisma. Dieses letztere, ein gewöhnliches Glasprisma, wurde an den beiden Seitenflächen, die den brechenden Winkel einschliessen, mit dünnem, geschwärzten Papiere bedeckt, in welches man vorläufig zwei schmale, zur brechenden Kante parallele, einander gegenüberstehende Schlitze oder Spalten *ab* und *cd* eingeschnitten hat. Die dritte Seitenfläche *pn* wurde ebenfalls und zwar ganz mit Papier bedeckt, aber nur desshalb, um ihre störende Einwirkung zu beseitigen.

So zubereitet wurde das Prisma mit seiner Axe vertikal in die gedachte Oeffnung eingestellt, in der Weise, dass es mit der einen Seitenfläche *mn* in die Ebene der Vorderwand des Kastens zu liegen kam. Selbstverständlich ist dafür zu sorgen, dass das von der Glastafel ausgehende Licht durch keine anderen Oeffnungen, als nur durch die beiden Schlitze austreten könne.

Ebenso muss man Vorsorge treffen, dass auch von den dunklen Theilen des Apparates selbst keine Strahlen durch das Prisma hindurchgehen. Am ehesten wäre diess von der Seitenwand *NF* des Kastens zu befürchten. Desshalb müssen die Dimensionen des Apparates so gewählt werden, dass die erweiterte Seitenfläche *mp* des Prisma noch die Glastafel, nicht aber die besagte Seitenwand durchschneide.

Aus demselben Grunde muss auch das Papier, womit das Prisma belegt wurde, recht dünn sein, weil sonst von den Rändern der Spalte *ab* Strahlen durch das Prisma gehen würden; da aber dünnes Papier durchscheinend ist, so habe ich geschwärztes gewählt, damit es diese Eigenschaft in möglichst geringem Grade besitze.

Ueberdiess habe ich noch, weil die Papierbelegungen doch etwas durchscheinend sind, an der Vorderwand des Kastens eine Kappe *mnhf* aus Papier angebracht, die dort, wo die austretenden Strahlen ihren Weg nehmen, mit einem Ausschnitte *gh* versehen wurde. Nachdem Alles so hergerichtet war, wurde der Apparat an den Fensterladen befestigt und dergestalt die mattgeschliffene

Glastafel der direkten Einwirkung der Sonnenstrahlen ausgesetzt.

Die Figur gibt einen horizontalen Durchschnitt des bereits in dieser letzteren Lage befindlichen Apparates. Unter diesen Umständen wird ein von dem Punkte *k* der Glasplatte ausgehendes Strahlenbündel, nachdem es durch die beiden Schlitze gegangen und durch das Prisma abgelenkt worden, einen vorgehaltenen Papierschirm in *i* treffen.

Und was ist das Resultat des mit diesem Apparate angestellten Versuches?

Das Resultat ist der gangbaren Ansicht nicht günstig. Es entsteht auf dem vorgehaltenen Schirme kein Spektrum, sondern ein vollkommen weisses Bild, ohne die geringste Randfärbung. Bestände nun das durch das Prisma geleitete Licht wirklich aus verschiedenfarbigen Theilen, so hätte es hier die schönste Gelegenheit, diese seine Natur zu offenbaren. Da es diess zu thun unterlässt, so wird wohl die Folgerung erlaubt sein, dass es aus keinerlei farbigen oder verschieden brechbaren Theilen zusammengesetzt sei.

So wie das auf dem Schirme entstehende, — also objektive Bild farbenfrei ist, ist es auch das subjektive, wie man sich leicht überzeugt, wenn man das aus dem Prisma austretende Strahlenbündel direkt in das Auge eintreten lässt.

Klebt man aber bei *k* auf die mattgeschliffene Glastafel einen schmalen, schwarzen Papierstreif, so kommen allsogleich, sowohl beim objektiven als subjektiven Bilde Farben zum Vorschein.

Da nun das Theorem sich als irrig erwiesen hat, so wird es uns auf der durch das Gesetz des Snellius vorgezeichneten Bahn nicht mehr hindernd entgegentreten und wir werden skrupelfrei und entschieden die Folgerungen aus diesem Gesetze, wie sie im vorhergehenden Paragraphen präzisirt wurden, anerkennen dürfen.

In diesem Paragraphen wurde zur Evidenz erhoben, dass das Prisma senkrecht gegen seine brechende Kante eine Verschiebung der unzähligen Bilder, die es von einem Objekte erzeugt, bewirke. Diese Verschiebung nun ist als die wahre Ursache des auffallenden Unterschiedes zwischen den beiden Dimensionen des Spektrums in dem Newton'schen Versuche anzusehen. Aber zur Erklärung der Farben reicht sie allein noch nicht aus, sondern dazu wird noch die weitere Bedingung erfordert, dass das Objekt einen Kontrast aufzuweisen habe.

Da ferner die verschobenen Bilder nicht in einer Ebene, sondern hintereinander liegen, so dringt sich von selbst noch die Frage auf, ob vielleicht auch diese Postposition zur Entstehung der Farben mitwirke, ob sie etwa auch eine Bedingung sine qua non sei?

Es scheint nicht, denn bei dem objektiven Spektrum, wie es nemlich auf einem Schirme zu Stande kommt, findet keine solche Postposition Statt und doch zeigt es die Farben eben so gut, wie das subjektive.

Am Schlusse dieses Paragraphen muss ich noch eines wohlbekannten Falles erwähnen, der volle Berücksichtigung verdient.

Es sei ein Prisma *pmn* (Fig. 52) und unterhalb desselben eine weisse Papierfläche *MN*, die schief gehalten bis an die erweiterte Basis *mn* des Prisma hinanreicht und dieselbe in *M* trifft. Hat man bloss das Element *A* der Basis im Auge, so werden alle Strahlen, welche von der Papierfläche durch dieses Element in das Prisma einzudringen vermögen, innerhalb des Winkels *MAK* liegen. Davon wird der Strahl *MA*, dessen Einfallswinkel $= 90^0$ ist, den Grenzstrahl *AR* geben, der in der Richtung *RO* aus dem Prisma austritt, und dem einfallenden Strahle *KA* wird der gebrochene *AL* entsprechen, der bereits bei *L* die totale Reflexion erleidet.

RO ist ein Schenkel des dem Elemente *A* der Basis *mn* entsprechenden dunklen Winkels *ORn*. Alle Richtungen, die wir uns $\parallel RO$ denken, werden ebenso Schenkel der dunklen Winkel sein, die den übrigen Elementen der Basis *mn* entsprechen.

Schauet man nun von Oben herab durch das Prisma auf die Papierfläche, so wird man finden, dass wenn man das Auge z. B. oberhalb *R* hält, dort wo der von *A* herkommende Grenzstrahl austritt, rothgelbe Farben auftreten, obgleich das ganze Gesichtsfeld des Prisma von einer weissen Fläche ausgefüllt wird und somit keinen Kontrast enthält.

Das ist Thatsache und zugleich ein gewaltiger Einwurf, ganz geeignet unsere Zuversicht von Neuem zu erschüttern.

Zum Glücke ist jedoch die Ursache dieser überraschenden Erscheinung unschwer auszumitteln; denn ruhet das Auge oberhalb *R*, so ist der Theil *mA* der Basis unwirksam, — dieser Theil spiegelt also; nur der andere Theil *An* der Basis ist wirksam und durch diesen geschieht somit noch die Betrachtung der weissen Fläche. Der reflektirende Theil *mA* ist offenbar die Ur-

sache der obigen Erscheinung, denn in diesem Spiegel bilden sich die Gegenstände ab, welche hinter der Prismenfläche *pm* liegen, nachdem die von ihnen herkommenden Strahlen an eben dieser Fläche eine Brechung erlitten haben und dieses Spiegelbild kontrastirt offenbar mit jenem Theile der Papierfläche, welcher durch *An* gesehen wird. Auch erscheinen die rothgelben Farben an der Scheidegrenze *A* dieser beiden Theile der Basis.

Bedeckt man die Fläche *pm* des Prisma mit einem Blatt weissen Papieres, so sieht man mittelst *Am* ebenfalls eine weisse Fläche, geradeso wie durch *An*. Der Kontrast verschwindet alsdann und mit ihm auch die Farben. Bedeckt man aber *pm* mit schwarzem Papiere, so tritt die rothgelbe Färbung nur um so stärker hervor.

Ist die Fläche *MN* schwarz, so nimmt das Auge an der Scheidegrenze *A* blau-violette Farben wahr, die um so stärker hervortreten, wenn *pm* mit weissem Papiere bekleidet wird, hingegen ganz verschwinden, wenn *pm* mit schwarzem Papiere bedeckt wird.

Aus diesem Grunde darf die Spalte *cd* (Fig. 51) nicht an einem solchen Orte angebracht werden, von wo aus der spiegelnde Theil der Fläche *mp* sichtbar wird und die Wirkung der Spiegelung sich bereits bemerkbar macht.

Stellt ferner *A* (Fig. 52) einen schmalen auf schwarzem Grunde liegenden weissen Papierstreif vor, der dicht an der Prismenfläche anliegt und zur brechenden Kante parallel ist, so sieht man ihn ungefärbt, wenn man ihn von oben herab durch die andere Fläche *pn* betrachtet. So wie aber der Streif nur ein wenig von der Basis *mn* entfernt wird, kann man schon deutlich eine Färbung seiner Ränder wahrnehmen und es nimmt diese Färbung mit der Grösse seiner Entfernung zu.

Dass nun aber ein Kontrast, sobald er dicht an der Prismenfläche anliegt, nicht farbenerregend wirke, wird uns nicht auffallen, wenn wir uns an das im §. 4. Gesagte erinnern.

In der That, ist *A* (Fig. 52) ein dicht an der Prismenfläche *mn* anliegender, leuchtender Punkt, so werden die von ihm ausgehenden Strahlen an dieser Fläche ganz ebenso gebrochen, wie wenn er in irgend einer messbaren Entfernung vom Prisma sich befände.

Es wird aber unter dieser Voraussetzung von *A* nur ein einziges Eintrittsbild entstehen und zwar an demselben Orte, wo

sich der leuchtende Punkt selbst befindet. Indem nun aber die von *A* in das Prisma eingedrungenen — also gebrochenen — innerhalb des Winkels *RAL* liegenden Strahlen, an der Austrittsfläche *pn* des Prisma eine zweite Brechung erleiden, entstehen wohl in Folge dieser letzteren Brechung unzählige Bilder (Austrittsbilder); da aber diese alle in die nemliche Senkrechte, welche von *A* auf *pn* gefällt wird, zu liegen kommen, so findet keine Verschiebung Statt und somit ist auch kein Grund zur Entstehung von Farben vorhanden.

Das ist auch die Ursache, warum bei dem obigen Versuche über die Unzerlegbarkeit des weissen Lichtes (Fig. 51) das Papier der Belegungen, namentlich jener, worin sich die Eintrittsspalte *ab* befindet, nur sehr dünn sein und dicht anliegen muss.

Gewissermassen verhält sich der leuchtende Punkt *A*, falls er dicht anliegt, so wie ein Punkt der Prismenfläche *mn* selbst, nur mit dem Unterschiede, dass ersterer nur mittelst der innerhalb des Winkels *RAL* liegenden, gebrochenen Strahlen sichtbar wird, während ein Punkt der Prismenfläche auch durch Strahlen, die, wie *AS*, ausserhalb dieses Winkels liegen, gesehen werden kann, — also auch dann, wenn sich das Auge innerhalb des dunklen Winkels *ORn* befindet.

§. 25. Das achromatische Prisma.

Die Möglichkeit ein Prisma aus Crownglas durch eines aus Flintglas zu achromatisiren, wird allgemein aus dem Umstande hergeleitet, dass sich diese beiden Stoffe in Bezug auf die Brechung des Lichtes nur unbedeutend unterscheiden, während die Farbenzerstreuung des letzteren doppelt so gross ist, als die des ersteren. Damit ist offenbar die Ansicht ausgesprochen, dass entweder nur diese beiden Stoffe oder doch nur solche, die ein ähnliches Verhalten zeigen, wie diese beiden, des Achromatismus fähig seien.

Allein diese Ansicht stehet offenbar nicht im Einklange mit den Folgerungen, zu denen uns das Gesetz des Snellius bereits geführt hat. Diess dürfte aus Folgendem erhellen.

Die Figur 50 stellt zwei Prismen *mnp* und *npk* vor. Das erstere sei aus Flintglas, das letztere aus Crownglas und beide mögen sich mit ihren Seitenflächen so innig berühren, dass die Strahlen aus dem ersten Prisma direkt in das zweite eintreten. Da das Crownglas das Licht schwächer bricht, als das Flintglas,

so wird an der Trennungsfläche *pn* jedenfalls eine Brechung vom Einfallslothe Statt finden; es ist daher der Vorgang an dieser Fläche im Allgemeinen ganz derselbe und nur dem Grade nach von demjenigen verschieden, wie er Statt fände, wenn die Strahlen an dieser Trennungsfläche *pn* nicht in Crownglas, sondern in die Luft eintreten würden. Es werden daher die beiden Aeste der Austrittsbilder-Kurve in dem gegenwärtigen Falle nur wenig von einander divergiren, und stellt nun *ae* ein Stück dieser Kurve vor, so wird man es, da es nur eine geringe Ausdehnung hat, als geradlinig betrachten können.

Bekanntlich stellt *ae* das lineare Bild vor, in welches der leuchtende Punkt *O* durch die an der Trennungsfläche *pn* vor sich gehende Brechung verwandelt wird. Dieses Bild *ae* ist nun bezüglich der Austrittsfläche *pk* des Crownglas-Prisma als Objekt zu betrachten und hat *pk* eine solche Lage, dass die Verlängerung von *ae*, also *ei* $\perp$ *pk* stehet, so werden alle Perpendikel, welche man von den Punkten der Linie *ae* auf *pk* fällt, mit einander zusammenfallen. Es werden daher die Bilder, welche von den einzelnen Punkten der Linie *ae* durch die Brechung an der Austrittsfläche *pk* entstehen, alle in die nemliche Senkrechte fallen. Da also in diesem Falle keine Verschiebung Platz greift, so können auch keine Farben sich entwickeln.

Der brechende Winkel des Crownglas-Prisma wird hierbei natürlich stets grösser sein müssen, als jener des Flintglas-Prisma und zwar um den Winkel *eio*, den die verlängerte *ea* mit der Normalen *oi* einschliesst.

Da also zur Herstellung eines achromatischen Prisma bloss erfordert wird, dass das Bild *ae* $\perp$ *pk*, so müssen folgerichtig alle lichtbrechenden Stoffe der Achromatisirung unterzogen werden können, jeder muss fähig sein, mit einem anderen ein achromatisches System zu geben, mag ihr Unterschied im Brechungsvermögen gross oder klein und mag das Verhältniss ihrer Dispersionen welches immer sein.

Um nun diesen theoretischen Folgesatz durch den Versuch zu prüfen, verschaffte ich mir kleine Tröge oder Wannen aus geschliffenem Glase, wie sie im Handel vorkommen. Ich wählte solche, die genau ebene Böden hatten. Nur das Eine war auszustellen, dass die Böden etwas zu dick waren. Dieser Umstand schien sie jedoch nicht unbrauchbar zu machen.

In der Figur 53 stellt *abvd* eine solche Wanne vor. Giesst man in dieselbe etwas von einer Flüssigkeit und neigt sie hier-

auf gegen den Horizont, so erhält man ein flüssiges Prisma *mnb*, dessen brechender Winkel *p* nach Belieben geändert werden kann. Unterhalb der Wanne hielt ich mit der Hand ein gewöhnliches Glasprisma *efg* so, dass es mit seiner Seitenfläche *eg* den Boden der Wanne allenthalben berührte, und dass der brechende Winkel dieses Prisma und jener des flüssigen entgegengesetzte Lagen hatten.

Hielt ich nun das Auge in *O* und schaute von oben herab durch beide Prismen hindurch nach einem auf schwarzem Grunde befindlichen, weissen Papierstreif *k*, so erschien mir dieser vollkommen ungefärbt, sobald ich dem brechenden Winkel *p* des flüssigen Prisma durch Neigen der Wanne eine bestimmte Grösse gegeben hatte. Bei einer anderen Neigung der Wanne, wodurch der Werth von *p* unter die letzt gedachte Grösse herabsinkt oder darüber sich erhebt, zeigt der weisse Streifen an seinen Rändern die bekannten prismatischen Farben und zwar in umgekehrter Ordnung, wenn man von dem einen Falle zu dem anderen übergehet.

Ich habe auf diese Weise mehrere Flüssigkeiten mit dem Glasprisma kombinirt, nemlich: Wasser, Weingeist, Cassiaöl, Benzol, Schwefelkohlenstoff und Steinöl und es wirkte jede derselben bei einer gewissen Neigung der Wanne achromatisirend auf das Glasprisma. Die Grösse dieser Neigung richtet sich natürlich nach jener des brechenden Winkels des Glasprisma. Der Versuch spricht demnach ganz zu Gunsten der Theorie und so dürfte der obige daraus gefolgerte Satz als richtig befunden werden.

Bevor ich schliesse, muss ich noch eines Versuches erwähnen, der mit dem vorhergehenden innig zusammenzuhängen scheint.

In Figur 54. stellt *abc* den Durchschnitt eines Glasprima, bei welchem jeder der drei Winkel als brechender benutzt werden kann, also keine der Seitenflächen matt geschliffen ist. Auch wollen wir voraussetzen, dass die Winkel *b* und *c* einander gleich seien. Ist nun *o* ein leuchtender Punkt, so möge *rs* ein Stück der durch die Brechung an der Eintrittsfläche *ab* sich ergebenden Bilderlinie vorstellen. Da die andere Fläche *bc* des Prisma bekanntlich auch wie ein Spiegel wirkt, so ist *rs* bezüglich dieses Spiegels als Objekt zu betrachten und es wird somit das Spiegelbild *r's'* entstehen. Dieses Bild muss gegen den Spiegel dieselbe Neigung haben, wie der Gegenstand; es müssen daher die Winkel *v* und *u* einander gleich sein, und da *u* als Scheitelwinkel $= z$ ist, so ist auch $v = z$. Die Dreiecke *bfd* und *edc* sind also ähnlich, weil ja nach der Voraussetzung auch Winkel $b = c$ ist.

Es muss also auch der Winkel $dec = bfd$, also $dec = 90^0$ sein, weil $bfd = 90^0$ ist. Die Verlängerung von $r's'$ stehet somit $\perp ac$.

Die von der Fläche bc reflektirten Strahlen gelangen hierauf zu der Flache ac und werden an dieser, indem sie aus dem Prisma austreten, vom Einfallslothe gebrochen.

Befindet sich nun das Auge in der Richtung dieser austretenden Strahlen, schauet es also durch die Fläche ac nach dem Spiegelbilde $r's'$, so wird ihm dieses vollkommen farblos erscheinen.

Ist aber der Winkel c nicht $= b$, sondern $c > b$ oder $c < b$, so wird auch die Verlängerung des Spiegelbildes $r's'$ nicht mehr $\perp ac$ stehen, und da erscheint $r's'$ bereits mit den prismatischen Farben behaftet. Die Anordnung dieser Farben schlägt in die entgegengesetzte um, wenn man von dem Falle $c > b$ zu dem Falle $c < b$ übergehet.

Unter den gemachten Voraussetzungen haben die in das Auge eintretenden Strahlen zwei Brechungen, nemlich an den Flächen ab und ac und dann noch eine Reflexion an der Fläche bc erlitten. Da nun aber die Fläche ac ebenfalls als Spiegel zu fungiren vermag, so wird man bezüglich dieses Spiegels wiederum das Bild $r's'$ als Objekt aufzufassen haben. Die von bc reflektirten Strahlen werden daher an der Fläche ac eine zweite Reflexion erleiden und indem sie hierauf gegen die Fläche ab geworfen und daselbst gebrochen werden, werden sie von dem etwa in O befindlichen Auge aufgenommen werden können.

Das Auge betrachtet in diesem Falle durch die nemliche Fläche, durch welche auch die vom leuchtenden Punkte herkommenden Strahlen in das Prisma eindringen, — nemlich durch die Fläche ab, das in dem Spiegel ac entstehende Bild. Um in dieser Beziehung volle Gewissheit zu haben, bedeckt man die beiden anderen Flächen ac und bc mit Papier. Da das in dem Spiegel ac entstehende Bild nicht mehr $\perp ab$ stehet, so wird es farbig erscheinen.

Ich habe diesen letzteren Versuch mit einem gleichseitigen Prisma angestellt, dann aber auch mit einem solchen, bei dem bloss die zwei Winkel b und c gleich und etwas $> 60^0$ waren. Als Objekt diente eine Kerzenflamme.

XX.

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Par

V. G. Imschenetsky,
professeur à l'Université Impériale de Kazan.

Traduit du russe par J. Hoüel, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, membre honoraire de l'Université de Kazan.

Introduction.

La théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre de la forme la plus générale, créée par les travaux des plus grands géomètres des temps modernes, forme actuellement la partie la mieux approfondie et la plus achevée du Calcul intégral. Dans l'histoire du développement de cette théorie, on rencontre ce fait remarquable, que les successeurs immédiats de Lagrange, son véritable fondateur (1772), considérèrent comme impossible de suivre la voie qu'il avait tracée; tandis qu'au contraire les derniers progrès de cette théorie l'ont ramenée de nouveau aux principes de Lagrange. Pfaff, le premier, se plaçant à un nouveau point de vue, est parvenu (1814) à la solution complète du problème. Mais sa méthode, théoriquement exacte, s'est trouvée peu commode dans la pratique, par suite des difficultés que présente l'intégration successive de plusieurs systèmes d'équations différentielles. Cauchy (1819) et

Jacobi (1837), par des procédés différents, et sans que le second eût aucune connaissance des travaux du premier, montrèrent que le but auquel conduisait la méthode de Pfaff pouvait être atteint plus simplement, par la seule intégration complète du premier des systèmes d'équations différentielles qui se rencontrent dans cette méthode. La question paraissait dès lors complétement épuisée. Néanmoins l'infatigable et fécond génie de Jacobi n'abandonna pas ses investigations sur ce problème, auquel il avait déjà fait faire de si grands pas, et auquel s'attachait un nouvel intérêt, depuis que les recherches d'Hamilton avaient mis en évidence la liaison qui existe entre cette théorie et l'intégration des équations différentielles de la Dynamique. Pendant que Jacobi se livrait à ses nouvelles études sur cette double question, la théorie continuait ses progrès, grâce aux remarquables publications d'autres analystes, Liouville, Bertrand, Donkin, Bour, etc., qui se sont occupés du même objet, et dont les découvertes devaient laisser moins à faire au géomètre allemand, quoique souvent aussi elles dussent coïncider avec les résultats qu'il obtenait de son côté. Nous ne pouvons émettre ici que de simples conjectures, puisque le travail de Jacobi n'a paru qu'après sa mort, rédigé par Clebsch d'après les matériaux trouvés dans ses papiers. Ces détails expliquent les réclamations de priorité auxquelles cette publication a donné lieu de la part de plusieurs auteurs, relativement soit aux théorèmes fondamentaux de la „nouvelle méthode" de Jacobi, soit à son principe général. Mais sans aucun doute le nom du grand géomètre restera attaché à cette théorie, fondée sur ses conceptions et constituée par lui-même sous une forme systématique complète, lors même que des parties isolées et secondaires de cet ensemble appartiendraient à d'autres inventeurs.

En me bornant, pour le moment, à cette courte esquisse du développement successif de ce problème, je me réserve de revenir plus longuement sur les détails historiques dans les Notes qui accompagnent le texte, et je vais donner maintenant un aperçu général du contenu de ce Mémoire.

Dans le Chapitre Ier, j'examine les différentes formes d'intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre; et, de l'intégrale complète, je déduis l'intégrale singulière et l'intégrale générale, par la méthode de la variation des constantes arbitraires, en me fondant sur les propriétés des déterminants fonctionnels.

Dans le Chapitre II, je considère la forme particulière d'inté-

grale générale qui conduit à des équations linéaires par rapport aux dérivées partielles, et je donne un abrégé de la théorie de ces dernières, d'après Lagrange et Jacobi.

Dans le Chapitre III, j'expose l'état général de la question, conformément aux vues indiquées dans le dernier travail de Jacobi, et j'y introduis les conditions d'intégrabilité de Liouville et de Donkin. Après avoir montré que, dans le cas particulier de deux variables indépendantes, la méthode de Jacobi revient identiquement à celle de Lagrange et de Charpit, je reprends la question générale, et j'effectue une première simplification des équations, par l'élimination de la fonction inconnue, en tant qu'elle y entrait explicitement; je signale, en outre, le défaut du procédé employé par Jacobi.

On voit, par le contenu des chapitres précédents, que l'objet principal de mon étude est la „nouvelle méthode" de Jacobi. Après l'avoir exposée, j'ai fait remarquer, d'accord avec l'opinion exprimée par Bour dans un Mémoire imprimé, et par Bertrand dans ses leçons publiques, que Jacobi n'a pas donné à la construction analytique de sa théorie toute la simplicité possible. En suivant les indications de ces deux géomètres, conformes aux résultats de mes propres recherches, j'ai essayé, dans le Chapitre IV, d'établir le théorème fondamental de la méthode de Jacobi sur les principes les plus simples.

Dans le Chapitre V, j'expose avec détail la marche des intégrations qu'exige la méthode de Jacobi. D'abord, pour présenter le procédé fondamental sous la forme la plus simple, je n'ai pas réduit, dans les équations, les variables à leur nombre minimum; en outre, j'ai indiqué les difficultés qui pouvaient se rencontrer, et j'ai examiné des cas où le procédé s'applique très-simplement. Enfin, par l'élimination des variables superflues, j'ai établi la théorie de la méthode dans tout son développement, et j'ai donné des exemples pour bien faire comprendre la marche du calcul.

Le Chapitre VI est consacré à l'intégration des équations simultanées aux derivées partielles du premier ordre. Après avoir montré que la solution de cette question plus générale peut se faire par les procédés qui ont servi à résoudre le problème traité dans les Chapitres précédents, j'applique cette théorie à des problèmes déterminés et indéterminés aux dérivées partielles du premier ordre, conduisant à l'intégration d'équations simultanées, linéaires ou non linéaires. Pour terminer, je considère à un nouveau point de vue la question générale, intéressante d'ailleurs par

elle-même, des conditions d'intégrabilité immédiate d'une expression aux différentielles ordinaires d'ordre quelconque.

Dans le Chapitre VII, j'expose la théorie de l'intégration des équations simultanées aux différentielles ordinaires de la forme canonique; j'explique la liaison qui existe entre le théorème de Poisson relatif aux intégrales de ces équations et le théorème fondamental de la méthode de Jacobi, et je démontre le procédé de Bertrand pour l'intégration des équations de la Dynamique au moyen du théorème de Poisson. J'applique à un même exemple les deux théories.

Enfin, dans le Chapitre VIII, pour compléter l'aperçu des méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile d'ajouter un exposé général de la méthode de Cauchy.

J'ai profité, dans ce travail, des secours que m'ont offerts les publications académiques, les journaux mathématiques et les ouvrages spéciaux, et j'ai indiqué les sources aux endroits correspondants du texte. Je me suis efforcé, dans ma rédaction, d'unir à la clarté et à la rigueur la plus grande généralité possible. Mais je ne puis m'empêcher de craindre que l'oeil pénétrant de la critique ne trouve que j'ai manqué plus d'une fois à cette triple condition, et n'aperçoive encore d'autres défauts dans mon travail. Dans ce cas, mon excuse sera qu'en général, dans un premier essai, on n'atteint qu'imparfaitement le but.

Chapitre Ier.

§. 1.

1. Une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre est une relation donnée entre un certain nombre de variables indépendantes, une fonction inconnue de ces variables, et les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction.

Désignons par

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n$$

les n variables indépendantes; par z la fonction inconnue de ces variables, et par

$$p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_n$$

les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction, de sorte qu'on ait

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

D'après ces notations, le type général des équations dont il s'agit se présentera sous la forme

$$(1) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

la caractéristique F désignant une fonction donnée.

Le problème de l'intégration de l'équation (1) consiste à déterminer l'expression la plus générale de la fonction z, telle qu'en la substituant avec ses dérivées partielles dans l'équation (1), celle-ci se change en identité. Mais, avant d'exposer les différentes méthodes d'intégration, il n'est pas inutile d'examiner les différentes formes de relations primitives entre $x_1, \ldots, x_n, z$, qui, par des différentiations et des éliminations algébriques, peuvent donner naissance à une même équation de la forme (1).

2. La forme la plus simple d'une telle relation est une expression de z en fonction explicite des variables indépendantes,

$$(2) \qquad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

dans laquelle entrent, en outre, n constantes arbitraires a_1, $a_2, \ldots, a_n$. En différentiant la valeur de z par rapport à chacune des variables indépendantes, on obtiendra n équations de la forme

$$(3) \qquad p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et entre ces équations, jointes à l'équation (2), on pourra éliminer les n quantités $a_1, \ldots, a_n$. Si l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue est l'équation donnée (1), alors l'équation (2) représentera l'intégrale de (1). Une telle intégrale, renfermant dans son expression autant de constantes arbitraires que l'équation donnée contient de variables indépendantes, a été nominée par Lagrange une intégrale complète.

§. 2.

3. Il est aisé de voir cependant que l'intégrale complète (2) ne représente pas encore l'expression la plus générale de la fonction z qui puisse satisfaire à l'équation (1). En effet, cette équation (1) se déduit de (2) au moyen des équations (3), et si ces

dernières ne changent pas de forme, l'équation (2) continuera à représenter l'intégrale de (1), de quelque manière que l'on ait généralisé la signification des symboles $a_1, \ldots, a_n$. Supposons donc que $a_1, \ldots, a_n$ désignent des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n$, et voyons quelles conditions ces fonctions doivent remplir pour que les expressions des dérivées partielles $p_1, \ldots, p_n$ conservent leur forme primitive (3).

4. En différentiant l'équation (2) par rapport à chacune des variables, conformément aux nouvelles suppositions, on obtiendra n équations de la forme

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i},$$

lesquelles se réduisent à l'ancienne forme (3), si les fonctions $a_1, \ldots, a_n$ remplissent la condition

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = 0, \tag{4}$$

pour toutes les valeurs de i depuis 1 jusqu'à n. Ces n conditions se présentent sous la forme d'un système d'équations linéaires par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_n}$. En éliminant toutes celles-ci à l'exception d'une seule, nous trouverons des équations de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} \cdot R = 0, \tag{5}$$

pour toutes les valeurs 1, 2, ..., n de l'indice i.

Les conditions (5) peuvent être satisfaites de deux manières:

1°. En posant

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = 0, \tag{6}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On obtient ainsi n équations, suffisantes pour la détermination des fonctions $a_1, \ldots, a_n$; les valeurs trouvées étant substituées dans l'équation (2), la fonction z ne renfermera plus dans son expression rien d'arbitraire. L'intégrale formée par la combinaison des équations (2) et (6) est ce que Lagrange appelle l'intégrale singulière.

2°. On peut satisfaire aux conditions (5) d'une manière générale, en posant

$$R = 0.$$

Or la quantité R est le déterminant du système des équations (4), composé des n^2 éléments représentés dans le tableau suivant,

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial a_n}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial a_n}{\partial x_2}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_n}, \dfrac{\partial a_2}{\partial x_n}, \ldots, \dfrac{\partial a_n}{\partial x_n}. \end{array}\right.$$

Le déterminant ainsi formé, au moyen des dérivées partielles de n fonctions, contenant chacune n variables indépendantes, a reçu de Jacobi le nom de déterminant fonctionnel, et Jacobi a démontré que, si le déterminant fonctionnel est identiquement nul, les fonctions qui entrent dans sa formation ne sont pas indépendantes entre elles, et qu'une ou plusieurs de ces fonctions doivent pouvoir s'exprimer les unes au moyen des autres.

§. 3.

5. D'après le plan que j'ai adopté dans ce travail, j'aurai plus d'une fois à m'appuyer sur ce théorème. C'est pourquoi je pense qu'il ne sera pas inutile d'en rappeler ici la démonstration, qui est d'ailleurs très-simple *).

Considérons le système d'équations

$$a_1 = \varphi_1, \quad a_2 = \varphi_2, \ldots, \quad a_n = \varphi_n,$$

qui sert à exprimer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. De l'une de ces équations, contenant x_1, tirons la valeur de cette variable en fonction de $a_1, x_2, \ldots, x_n$. En substituant cette expression dans l'une des équations restantes, contenant x_1 et x_2, dans la seconde, par exemple, nous aurons a_2 exprimé en fonction de $a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, et nous tirerons de là x_2 en fonction de

*) Nous avons légèrement changé la démonstration que donne le texte original, et que l'on rencontre chez un grand nombre d'auteurs. Il nous a semblé que le raisonnement pouvait être présenté d'une manière plus claire, et le Dr. R. Baltzer, à qui nous avons communiqué cette modification, l'avait aussi trouvée de son côté, et se proposait déjà de l'introduire dans la 3e édition de son Traité des Déterminants. (Note du Traducteur.)

$a_1, a_2, x_3, \ldots, x_n$. En substituant les expressions trouvés, pour x_1, x_2, dans une des équations restantes, qui avec ces deux variables contienne en outre x_3, dans la troisième, par exemple, nous aurons a_3 exprimé en fonction de $a_1, a_2, x_3, \ldots, x_n$, et nous tirerons de là x_3 exprimé en $a_1, a_2, a_3, x_4, \ldots, x_n$. En continuant de la sorte, les expressions primitives de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seront transformées en d'autres telles, qu'en général a_l se trouvera exprimé au moyen de $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n$. Représentons par

$$a_1 = \psi_1 (x_1, \ldots, x_n),$$

$$a_2 = \psi_2 (a_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$a_3 = \psi_3 (a_1, a_2, x_3, \ldots, x_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_l = \psi_l (a_1, \ldots, a_{l-1}, x_l, \ldots, x_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les expressions ainsi obtenues. On retrouvera les valeurs primitives de $a_1, a_2, \ldots, a_l, \ldots$ en $x_1, \ldots, x_n$, si l'on remplace successivement dans le second membre, de chaque équation, $a_1, a_2, \ldots$, par les valeurs tirées des équations précédentes. On aura donc, en différentiant dans cette hypothèse,

$$\frac{\partial a_l}{\partial x_k} = \frac{\partial \psi_l}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \psi_l}{\partial a_{l-1}}\frac{\partial a_{l-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_l}{\partial x_k},$$

d'où l'on tire

$$\text{(M)} \qquad \frac{\partial \psi_l}{\partial x_k} = -\frac{\partial \psi_l}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_k} - \ldots - \frac{\partial \psi_l}{\partial a_{l-1}}\frac{\partial a_{l-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_l}{\partial x_k}.$$

Nous conclurons de cette formule que le déterminant du système

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{array}{llll} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}, \ldots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}, \\ 0, & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \ldots, & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n}, \\ 0, & 0, & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}, \ldots, & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_n}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}, \end{array} \right.$$

peut se mettre sous la forme du produit du déterminant du système (A) par celui du système

$$
(C) \left\{
\begin{array}{lllll}
1, & 0, & 0, \ldots\ldots, & 0, \\
-\frac{\partial\psi_2}{\partial a_1}, & 1, & 0, \ldots\ldots, & 0, \\
-\frac{\partial\psi_3}{\partial a_1}, & -\frac{\partial\psi_3}{\partial a_2}, & 1, \ldots\ldots, & 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
-\frac{\partial\psi_n}{\partial a_1}, & -\frac{\partial\psi_n}{\partial a_2}, & -\frac{\partial\psi_n}{\partial a_3}, \ldots\ldots, & 1.
\end{array}
\right.
$$

En effet, la formule (M) fait voir que la somme des produits des éléments appartenant à la $l^{ième}$ ligne horizontale du système (C) et à la $k^{ième}$ ligne horizontale du système (A) forme l'élément du système (B) situé à l'intersection de la $l^{ième}$ ligne horizontale avec la $k^{ième}$ ligne verticale. Mais, dans chacun des systèmes (B) et (C) les éléments situés de l'un des côtés de la diagonale principale sont nuls; donc les déterminants de ces systèmes sont égaux aux produits des éléments de leurs diagonales principales respectives. Par conséquent

$$
(7) \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\cdots\cdot\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} = R.
$$

6. Si le déterminant R est identiquement égal à zéro il faut alors qu'un des facteurs du produit, dans le premier membre de (7), soit égal à zéro. Mais les $n-1$ premiers facteurs de ce produit sont, en général, différents de zéro, puisque, d'après ce qu'on a supposé, la fonction ψ_1 contient x_1, la fonction ψ_2 contient $x_2, \ldots\ldots$, la fonction ψ_{n-1}, contient x_{n-1}. Par conséquent, le dernier facteur $\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}$ doit être identiquement nul; c'est-à-dire que, par suite des substitutions successives que l'on a opérées, la fonction a_n ne doit plus contenir x_n explicitement, et peut s'exprimer au moyen des seules quantités $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$. Cependant il peut se faire aussi que, par suite des substitutions en question, aucune des fonctions $\psi_n, \psi_{n-1}, \ldots\ldots, \psi_{n-k}$ ne contienne explicitement $x_n, x_{n-1}, \ldots\ldots, x_{n-k}$; il est évident alors que l'on aura identiquement

$$
(q) \qquad \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = 0, \ldots\ldots, \quad \frac{\partial\psi_{n-k}}{\partial x_{n-k}} = 0,
$$

et chacune des fonctions $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_{n-k}$ s'exprimera au moyen des seules quantités $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-k-1}$.

7. La proposition réciproque est évidente. Si les fonctions $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ne sont pas indépendantes les unes des autres,

mais qu'au contraire l'une d'entre elles a_n, ou plusieurs d'entre elles a_n, a_{n-1}, ..., a_{n-k} puissent s'exprimer au moyen des seules fonctions restantes a_1, a_2, ..., a_{n-k-1}, alors la première des égalités (q) ou toutes les égalités (q) auront lieu, d'où il résultera que le déterminant R sera identiquement nul.

§. 4.

8. Ainsi on peut satisfaire à la condition $R = 0$ de la manière la plus générale, en prenant une des fonctions a_1, a_2, ..., a_n égale à une fonction entièrement arbitraire de toutes les autres, en posant, par exemple,

$$a_n = \pi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}); \tag{8}$$

ou d'une manière moins générale, en égalant quelques-unes de ces fonctions à des fonctions arbitraires des autres, par exemple, en faisant

$$\left\{\begin{array}{l} a_n = \pi_n (a_1, a_2, \ldots, a_{n-k-1}), \\ a_{n-1} = \pi_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-k-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-k} = \pi_{n-k}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-k-1}). \end{array}\right. \tag{9}$$

En introduisant cette dernière hypothèse dans les conditions (4), et remarquant, de plus, que, pour toute valeur de l'indice $m \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} n$ et $\begin{matrix} > \\ = \end{matrix} n-k$, on a

$$\frac{\partial a_m}{\partial x_i} = \frac{\partial \pi_m}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \pi_m}{\partial a_{n-k-1}}\frac{\partial a_{n-k-1}}{\partial x_i},$$

nous réduirons ces conditions à la forme suivante,

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_1} + \dfrac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\dfrac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_1} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial \pi_n}\dfrac{\partial \pi_n}{\partial a_1}\right)\dfrac{\partial a_1}{\partial x_i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_{n-k-1}} + \dfrac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\dfrac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_{n-k-1}} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial \pi_n}\dfrac{\partial \pi_n}{\partial a_{n-k-1}}\right)\dfrac{\partial a_{n-k-1}}{\partial x_i} \end{array}\right\} = 0$$

Multiplions cette équation par dx_i, et faisons ensuite la somme de toutes les équations analogues, obtenues en donnant à i toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n; il viendra

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}+\frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_1}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial \pi_n}\frac{\partial \pi_n}{\partial a_1}\right)da_1\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\left(\frac{\partial f}{\partial a_{n-k-1}}+\frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_{n-k-1}}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial \pi_n}\frac{\partial \pi_n}{\partial a_{n-k-1}}\right)da_{n-k-1}\end{aligned}\right\}=0.$$

Les fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k-1}$ étant, par hypothèse, complétement indépendantes entre elles, il faut alors, pour que l'équation précédente ait lieu quelles que soient les valeurs de $da_1, \ldots, da_{n-k-1}$, que l'on pose

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}+\frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_i}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial \pi_n}\frac{\partial \pi_n}{\partial a_i}=0, \tag{10}$$

en attribuant à i successivement toutes les valeurs, depuis 1 jusqu'à $n-k-1$.

9. Pour une forme donnée des fonctions arbitraires $\pi_{n-k}, \ldots, \pi_n$, on peut tirer des équations (10) les valeurs des quantités $a_1, \ldots, a_{n-k-1}$; puis, au moyen des équations (9), les valeurs des quantités $a_{n-k}, \ldots, a_n$; après quoi l'équation (2) donnera la détermination complète de la fonction z au moyen des variables $x_1, \ldots, x_n$. De cette manière, le système des équations (2), (9) et (10) représente une intégrale de l'équation (1). Dans cette intégrale, l'expression (2) de z renferme $k+1$ fonctions arbitraires de $n-k-1$ fonctions données, et plus le nombre k est petit, plus l'expression de z est générale. Pour $k=0$, elle atteint la plus grande généralité possible. Dans ce dernier cas, les équations (9) sont remplacées par la seule équation (8), et les équations (10) par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}+\frac{\partial f}{\partial \pi}\frac{\partial \pi}{\partial a_i}=0, \tag{11}$$

qui ont lieu pour toutes les valeurs de i, depuis 1 jusqu'à $n-1$.

L'intégrale qui résulte de la combinaison des équations (2), (8) et (11) a été appelée par **Lagrange l'intégrale générale.**

§. 5.

10. Pour compléter l'étude de la forme des fonctions qui peuvent être des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, démontrons que toute fonction donnée z des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, satisfaisant à l'équation (1), est renfermée comme cas particulier dans le système des solutions de cette

équation, qui se compose de l'intégrale complète, et des intégrales singulières et générales qui s'en deduisent.

Soit, en effet,

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{12}$$

la fonction donnée, satisfaisant à l'équation

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

et soit

$$z = f(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) \tag{2}$$

l'intégrale complète de cette équation.

En écrivant le système des n équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{13}$$

on pourra, en général, déterminer les valeurs, constantes ou variables, des n quantités $a_1, \ldots, a_n$, qui vérifient ces équations. Ces valeurs satisfont nécessairement aussi à l'équation

$$f = \varphi. \tag{14}$$

En effet, mettons l'équation (1) sous la forme

$$z = F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n);$$

en substituant pour z les expressions (12) et (2), nous obtiendrons les deux identités

$$\varphi = F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right), \tag{15}$$

$$f = F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right). \tag{16}$$

La dernière de ces identités a lieu pour des valeurs arbitraires quelconques de $a_1, \ldots, a_n$, et par conséquent aussi pour les valeurs de ces quantités tirées des équations (13). Mais, par la substitution de ces dernières valeurs, le second membre de (16) devient complétement identique avec le second membre de (15). D'après cela, les premiers membres de ces égalités deviennent identiquement égaux, c'est-à-dire que l'on a $f = \varphi$. On démontrera absolument de la même manière qu'en général, si les valeurs trouvées pour $a_1, \ldots, a_n$ vérifient n équations quelconques du système (13) et (14), elles satisfont aussi à la $(n+1)^{ième}$.

11. Si l'on différentie l'égalité (14) par rapport à chacune des variables indépendantes, en observant que $a_1, \ldots, a_n$, qui entrent dans le premier membre de cette équation et qui sont déterminées par les équations (13), doivent être considérées comme des fonctions des variables; on trouve n égalités de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

lesquelles, en ayant égard à (13), se réduisent aux suivantes,

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = 0.$$

Mais ces dernières ont la forme des équations (4); par conséquent, les valeurs de $a_1, \ldots, a_n$, tirées des équations (13) et ramenant l'intégrale complète (2) à la forme (12), sont renfermées dans le système des valeurs générales de $a_1, \ldots, a_n$ qui transforment l'intégrale complète dans l'intégrale singulière ou dans l'intégrale générale.

Si les valeurs de $a_1, \ldots, a_n$, tirées des équations (13) et (14), sont toutes constantes, alors l'intégrale (12) est un cas particulier de l'intégrale complète. Si les valeurs sont des fonctions des variables, satisfaisant à une ou à plusieurs relations nécessaires, de la forme

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

alors l'intégrale (12) sera un cas particulier de l'intégrale générale. Enfin, si ni l'un ni l'autre de ces deux cas n'a lieu, l'intégrale (12) est l'intégrale singulière.

§. 6.

12. Nous avons considéré l'intégrale complète de l'équation (1) sous la forme d'une fonction explicite z des variables $x_1, \ldots, x_n$. Mais si cette intégrale est donnée sous la forme d'une fonction implicite, déterminée par l'équation

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

la méthode de la variation des constantes arbitraires s'applique dans ce cas absolument comme dans le précédent. En effet, en considérant $a_1, \ldots, a_n$ comme des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n, z$, nous pourrons les déterminer d'abord au moyen des équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0,$$

dans lesquelles nous donnerons à i toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à n. Nous obtiendrons ainsi l'intégrale singulière.

En second lieu, en supposant que a_n, $a_{n-1}, \ldots$, a_{n-k} soient des fonctions entièrement arbitraires de a_1, $a_2, \ldots$, a_{n-k-1}, on peut déterminer ces dernières quantités en fonction des variables par les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-k}} \frac{\partial a_{n-k}}{\partial a_i} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial a_i} = 0,$$

où l'on suppose $i = 1, 2, \ldots, n-k-1$. L'intégrale obtenue de cette manière est une intégrale générale, et elle a sa plus grande généralité pour $k = 0$.

En effet, il est facile de voir que, dans chacun des trois modes de détermination précédents des quantités $a_1, \ldots, a_n$, on obtient, en différentiant l'équation $\varphi = 0$ par rapport à chacune des variables indépendantes, n équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p_i = 0,$$

d'une seule et même forme dans les trois cas. Par conséquent, la détermination de $a_1, \ldots, a_n$ au moyen de ces équations et de $\varphi = 0$ conduit dans ces trois cas à une seule et même équation aux dérivées partielles, puisque le résultat de l'élimination ne dépend pas des valeurs attribuées aux quantités éliminées.

13. Remarquons que, si l'équation aux dérivées partielles ne renferme que deux variables indépendantes, avec une fonction de ces variables, ces trois variables pourront être considérées comme les coordonnées d'un point de l'espace. Alors l'intégrale complète représentera l'équation d'une surface, renfermant deux paramètres arbitraires. La méthode même qui sert à trouver l'intégrale générale et l'intégrale singulière au moyen de la variation des constantes arbitraires devient, dans ce cas, complétement identique avec le procédé employé en Géométrie pour déterminer les surfaces-enveloppes, savoir: dans le cas de l'intégrale singulière, en faisant varier indépendamment les deux paramètres; dans le cas de l'intégrale générale, en établissant entre ces paramètres une dépendance arbitraire.

Chapitre II.

§. 7.

14. Nous avons vu (§. 4., art. 9) que la forme la plus générale de la fonction explicite z satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

est la suivante,

$$z = f[x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-1}, \pi(a_1, \ldots, a_{n-1})],$$

qui renferme dans son expression les n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, puis $n-1$ fonctions données indépendantes entre elles, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ de ces variables, et enfin une fonction arbitraire π de ces fonctions données.

Considérons un cas particulier de cette forme générale, celui où f ne contient explicitement ni $x_1, \ldots, x_n$, ni $a_1, \ldots, a_{n-1}$; nous aurons alors

(1) $z = f[\pi(a_1, \ldots, a_{n-1})]$, ou simplement $z = \pi(a_1, \ldots, a_{n-1})$,

puisque π est une fonction arbitraire.

L'équation aux dérivées partielles du premier ordre correspondante à cette forme d'intégrale s'obtient très-simplement, en s'appuyant sur le théorème du §. 3., en vertu duquel le déterminant fonctionnel des fonctions $z, a_1, \ldots, a_{n-1}$ est égal à zéro, lorsqu'on a entre ces fonction la relation (1). Il vient, d'après cela,

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant le déterminant de degré n, qui forme le premier membre de cette équation, suivant les déterminants partiels de degré $n-1$, qui ne renferment pas les éléments de la première ligne horizontale,

$$(3) \qquad R_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + R_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + R_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

les coefficients R_1, R_2,..., R_{n-1} étant les déterminants de degré $n-1$ formés avec les éléments du déterminant (2), en supprimant constamment la première ligne horizontale, et successivement la 1re, la 2e,...., la $n^{ième}$ ligne verticale, de sorte que

$$R_i = (-1)^{(n-1)(i-1)} \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_{i+1}} & \ldots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} & \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial a_1}{\partial x_{i-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{i+1}} & \ldots & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{i-1}} \end{vmatrix}.$$

L'équation (3) est de forme linéaire par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$; elle n'a pas de terme qui ne contienne aucune dérivée partielle, et ses coefficients ne contiennent pas la fonction z.

15. Prenons maintenant la seconde forme de l'intégrale générale (§. 6.),

$$\varphi[x_1, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_{n-1}, \pi(a_1, \ldots, a_{n-1})] = 0,$$

par laquelle l'inconnue z est déterminée comme fonction implicite des variables indépendantes. Ici φ désigne une fonction donnée, π une fonction arbitraire, et les fonctions données $a_1, \ldots, a_{n-1}$ contiennent, outre les variables indépendantes, la fonction z elle-même.

Considérons le cas particulier où $a_1, \ldots, a_{n-1}$ n'entrent pas directement dans φ, mais seulement par la fonction π; alors l'équation précédente est de la forme

$$\varphi[x_1, \ldots, x_n, z, \pi(a_1, \ldots, a_{n-1})] = 0;$$

en résolvant cette équation par rapport à π, il vient

$$\pi(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \chi(x_1, \ldots, x_n, z),$$

χ désignant une fonction connue. Si l'on pose, pour l'uniformité, $\chi = a_n$, et qu'on profite de ce que la fonction π est arbitraire, on peut remplacer la relation précédente par celle-ci qui lui est équivalente,

$$(4) \qquad \pi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = 0.$$

Voyons de quelle forme est l'équation aux dérivées partielles

[illegible] par l'équation

$$(10) \qquad [illegible] = 0$$

[illegible] en fonction de $x_1, \ldots, x_n$. [illegible] par rapport à chacune [illegible] nous aurons les n égalités

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Par conséquent, en multipliant l'équation donnée par $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$, et transportant tous les termes dans le second membre, on obtient l'égalité

$$(11) \qquad 1 = A_1 \frac{\partial \gamma}{\partial z} + A_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}.$$

D'autre part, en considérant z comme une fonction déterminée par l'équation (10), et prenant la différentielle complète de γ, dans cette supposition, nous aurons identiquement

$$d\gamma = 0$$

Or

$$d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial z} dz + \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \gamma}{\partial x_n} dx_n;$$

donc, en substituant ici la valeur d'une des dérivées partielles de γ, de $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$ par exemple, tirée de l'égalité (11), il viendra

$$d\gamma = \left(dx_1 - \frac{A_1}{A} dz\right)\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + \ldots + \left(dx_n - \frac{A_n}{A} dz\right)\frac{\partial \gamma}{\partial x_n}.$$

Cette expression montre que $d\gamma$ deviendra identiquement nul, si entre les variables $x, \ldots, x_n, z$ on établit des relations satisfaisant aux équations

$$(12) \qquad dx_1 - \frac{A_1}{A} dz = 0, \ \ldots, \ dx_n - \frac{A_n}{A} dz = 0.$$

[illegible] n équations simultanées aux différentielles ordi- [illegible] entre $n+1$ variables, on peut déter- [illegible] renfermant n constantes arbitraires [illegible] intégrales, résolues par rapport

[illegible] $z) = a_2, \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = a_n$.

Au moyen de ces n équations, représentant les intégrales des équations (12), on peut aussi exprimer n des variables $x_1, .., x_n$, z en fonctions de la variable restante et des constantes arbitraires. En substituant ces expressions dans la fonction $\gamma(x_1, .., x_n, z)$, la variable restante, en fonctions de laquelle sont exprimées toutes les autres, devra disparaître d'elle-même, puisque $d\gamma$ doit être nul. Par conséquent, après la substitution, γ ne contiendra plus que les constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_n$.

De là il s'ensuit évidemment que la forme la plus générale que puisse avoir la fonction γ pour satisfaire à la condition précédente, est la forme

$$\pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

π désignant une fonction complétement arbitraire, et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant les fonctions qui forment les premiers membres des équations (13). En effet, si l'on résout les équations (13) par rapport à n quelconques des quantités $x_1, \ldots, x_n, z$, et que l'on substitue de nouveau les valeurs obtenues dans les équations d'où elles ont été tirées, celles-ci devront se réduire à des identités, φ_1 se changeant en a_1, φ_2 en a_2, etc. Par suite, l'intégrale générale de l'équation (9) est

$$\pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0.$$

C'est à peu près sous cette forme que la théorie des équations linéaires a été exposée dans la Leçon XX du Calcul des Fonctions (édition de 1806). Lagrange, après avoir développé cette théorie pour le cas de deux et de trois variables indépendantes, ajoute: „L'analyse précédente est plus simple et plus directe que celle que j'ai donnée dans la Théorie des Fonctions (n°. 101); c'est ce qui m'a engagé à la mettre ici, d'autant qu'elle s'applique avec la même facilité aux équations semblables entre un plus grand nombre de variables. Dans les Mémoires de Berlin de 1779, je m'étais contenté de prouver, a posteriori, la légitimité et la généralité de la méthode."

§. 9.

18. D'après la théorie de Lagrange, l'intégration de l'équation linéaire aux dérivées partielles (9) se ramène à l'intégration du système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires (10). Mais, comme la fait voir Jacobi (Journal de Crelle, [illegible]), les solutions de ces deux questions sont liées par une [illegible]endance mutuelle. La démonstration de cette proposition

complète et éclaircit la théorie de Lagrange, et nous fournit en même temps l'occasion de présenter une esquisse générale de la théorie de l'intégration des équations simultanées de la forme (12).

Les équations (12) peuvent s'écrire sous forme de proportions,

$$\frac{dz}{A} = \frac{dx_1}{A_1} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n},$$

lesquelles sont l'expression de ce problème: Etablir entre les variables z, $x_1,\ldots,$ x_n des relations telles, que les différentielles de ces variables soient proportionnelles aux fonctions données $A, A_1,\ldots, A_n$. En prenant une des variables, z par exemple, pour variable indépendante, on peut considérer toutes les autres $x_1,\ldots,$ x_n comme des fonctions de z, et les équations précédentes, écrites sous la forme

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{A_1}{A},\ldots, \frac{dx_n}{dz} = \frac{A_n}{A},$$

donneront les expressions des dérivées premières de ces fonctions au moyen de $z, x_1,\ldots, x_n$. Il est facile d'en déduire des expressions semblables pour les dérivées d'ordres plus élevés de ces mêmes fonctions. Pour cela, en différentiant, par exemple, l'équation

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{A_i}{A}$$

plusieurs fois consécutivement par rapport à z, considéré comme la variable indépendante, dont $x_1,\ldots, x_n$ sont des fonctions, et, à mesure que $\frac{dx_1}{dz},\ldots, \frac{dx_n}{dz}$ s'introduisent dans les seconds membres, les remplaçant par leurs valeurs respectives $\frac{A_1}{A},\ldots, \frac{A_n}{A}$, on obtiendra les expressions demandées, qui seront de la forme

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dz} = \dfrac{A_i}{A} = \psi_1(z, x_1,\ldots, x_n), \\ \dfrac{d^2x_i}{dz^2} = \psi_2(z, x_1,\ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^nx_i}{dz^n} = \psi_n(z, x_1,\ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On trouvera de cette manière les expressions des dérivées d'ordres supérieurs de toutes les fonctions $x_1,\ldots, x_n$.

Supposons maintenant qu'à une valeur particulière donnée z^0 de la variable indépendante z correspondent des valeurs x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_n^0$, choisies arbitrairement pour les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On pourra développer alors chacune des fonctions $x_1, \ldots, x_n$ en série infinie par la formule de Taylor. On aura de cette manière

$$x_i = x_i^0 + \psi_1(z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\frac{z-z^0}{1} + \psi_2(z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\frac{(z-z^0)^2}{1.2} + \ldots.$$

Ainsi se trouve démontrée l'existence des n fonctions cherchées, remplissant les conditions voulues, et nous voyons en même temps que toutes ces expressions renferment les mêmes constantes arbitraires $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Pour ce qui est de la quantité z^0, elle doit être considérée comme une constante donnée, par exemple comme un nombre donné. Remarquons encore que, au lieu des constantes arbitraires $x_1^0, \ldots, x_n^0$, on peut en introduire d'autres, liées avec les premières par des relations arbitraires, pourvu que les nouvelles constantes arbitraires puissent être déterminées de telle manière que, pour une valeur donnée quelconque de z, les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ puissent prendre des valeurs choisies à volonté.

19. Pour déterminer les expressions finies des n fonctions cherchées $x_1, \ldots, x_n$, il faut, en général, trouver n équations, nommées **intégrales**, entre ces fonctions, la variable indépendante z, et n constantes arbitraires. Ce problème peut être résolu dans certains cas, sans élever l'ordre différentiel des équations (12), et le succès dépend finalement de la forme des fonctions données $A, A_1, \ldots, A_n$.

Il existe encore un autre procédé: l'élimination de $n-1$ des fonctions inconnues, et la réduction du problème à l'intégration d'une seule équation différentielle ordinaire du $n^{ième}$ ordre. Pour cela, prenons, par exemple les n premières équations (14), et éliminons entre elles les $n-1$ quantités $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Nous obtiendrons de cette manière une seule équation entre z, la fonction x_i de z et les dérivées de cette fonction jusqu'au $n^{ième}$ ordre, et cette équation sera de la forme

$$f\left(z, x_i, \frac{dx_i}{dz}, \ldots, \frac{d^n x_i}{dz^n}\right) = 0.$$

Une équation de l'ordre n entre deux variables a, comme on sait, n intégrales premières, qui se présentent sous la forme d'équations différentielles de l'ordre $n-1$, renfermant chacune une con-

stante arbitraire. En résolvant ces équations par rapport aux constantes arbitraires $c_1, .., c_n$, nous aurons n équations de la forme

$$(15)\qquad \begin{cases} f_1\left(z,\ x_i,\ \dfrac{dx_i}{dz},\ \ldots,\ \dfrac{d^{n-1}x_i}{dz^{n-1}}\right) = c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n\left(z,\ x_i,\ \dfrac{dx_i}{dz},\ \ldots,\ \dfrac{d^{n-1}x_i}{dz^{n-1}}\right) = c_n. \end{cases}$$

On peut obtenir un système d'équations équivalent à celui-ci, en trouvant l'intégrale complète de l'équation différentielle du $n^{ième}$ ordre, laquelle renferme n constantes arbitraires, en la différentiant $n-1$ fois, et tirant des n équations ainsi obtenues les valeurs des constantes.

20. En substituant dans les équations (15) les valeurs (14) des dérivées de la fonction x_i, nous obtiendrons les n relations cherchées entre $z,\ x_1, \ldots,\ x_n$, ou les intégrales des équations (12), lesquelles peuvent s'écrire ainsi,

$$(16)\qquad \varphi_1(z,\ x_1, \ldots,\ x_n) = c_1, \ldots,\ \varphi_n(z,\ x_1, \ldots,\ x_n) = c_n.$$

Les équations (16), devant être les intégrales des équations (12), jouiront de cette propriété, que si, au moyen de ces mêmes équations et des autres, on en déduit des relations entre les variables $z,\ x_1, \ldots,\ x_n$ ne renfermant point de constantes arbitraires, ces relations devront être des identités. Dans le cas contraire, en effet, nous ne pourrions plus, pour une valeur donnée de z, choisir à volonté les valeurs correspondantes de $x_1, .., x_n$.

Remarquons encore que les premiers membres des équations (16) représentent n fonctions qui restent constantes pour les variations simultanées de $z,\ x_1, \ldots,\ x_n$. Par conséquent, leurs différentielles sont égales à zéro.

D'après cela, on a

$$d\varphi_i = 0,$$

ou

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dz} + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dz} = 0.$$

En mettant pour $\dfrac{dx_1}{dz}, \ldots, \dfrac{dx_n}{dz}$ leurs valeurs tirées des équations (12), et multipliant le résultat par A, il vient

$$A\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}+A_1\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}+\ldots.+A_n\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}=0,$$

équation qui représente une relation entre $z, x_1, \ldots, x_n$, et qui ne contient aucune constante arbitraire. Donc, d'après la remarque précédente, cette équation doit être identique.

Par conséquent, les fonctions qui forment les premiers membres des équations (16) satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$A\frac{\partial\gamma}{\partial z}+A_1\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}+\ldots.+A_n\frac{\partial\gamma}{\partial x_n}=0, \tag{11}$$

que nous avions dans le paragraphe précédent. Il y a plus: une fonction arbitraire d'une, de plusieurs ou de la totalité de ces fonctions satisfera pareillement à l'équation (11). En effet, si l'on convient, pour abréger, de représenter par $A(\gamma)$ le premier membre de l'équation (11), nous aurons identiquement

$$A(\varphi_1)=0,\ldots., A(\varphi_n)=0.$$

En prenant une fonction π des fonctions $\varphi_1,\ldots., \varphi_n$, il vient

$$\frac{\partial\pi}{\partial z}=\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\ldots.+\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_i}=\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}+\ldots.+\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}.$$

Multiplions la seconde de ces équations par A_i, et ajoutons la somme des expressions analogues pour $i=1, 2,\ldots., n$, à la première équation multipliée par A; il viendra

$$A(\pi)=\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_i}A(\varphi_1)+\ldots+\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_n}A(\varphi_n).$$

Or le second membre de cette égalité est identiquement nul; il en est donc de même du premier.

Enfin, la supposition de $\gamma=0$ permet de considérer z ou l'une des quantités $x_1,\ldots., x_n$, par exemple x_i, comme une fonction de toutes les autres variables; dans ce cas, l'équation (11) se ramène à l'une des suivantes,

$$A_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots.+A_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=A,$$

$$A\frac{\partial x_i}{\partial z}+\ldots+A_{i-1}\frac{\partial x_i}{\partial x_{i-1}}+A_{i+1}\frac{\partial x_i}{\partial x_{i+1}}+\ldots.+A_n\frac{\partial x_i}{\partial x_n}=A_i,$$

et l'équation

$$\pi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0$$

sera l'intégrale complète de ces équations aux dérivées partielles.

Ces conclusions sont complétement conformes à la théorie de Lagrange, et, en les prenant pour bases, on pourra considérer la méthode d'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles comme une simple addition aux propriétés démontrées plus haut, des intégrales des équations simultanées de la forme (12).

21. Pour achever de mettre en lumière la liaison intime et la dépendance réciproque des deux problèmes de l'intégration de l'équation (11) et de celle des équations (12), démontrons encore le théorème suivant:

Toute fonction ψ des variables $z, x_1, \ldots, x_n$, satisfaisant à l'équation linéaire aux dérivées partielles (11), conserve une valeur constante, lorsqu'on fait varier simultanément la quantité z et les quantités $x_1, \ldots, x_n$, considérées comme des fonctions de z déterminées par les équations (12); et par conséquent

$$\psi = \text{const.}$$

est une des intégrales du système d'équations simultanées (12).

En effet, en prenant la différentielle de ψ dans l'hypothèse de $x_1, \ldots, x_n$ fonctions de z, on a

$$d\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dz} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dz}\right)dz;$$

or, en vertu des équations (12),

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{A_1}{A}, \ldots, \frac{dx_n}{dz} = \frac{A_n}{A};$$

donc

$$d\psi = A(\psi).\frac{dz}{A}.$$

D'après les conditions du théorème, $A(\psi)$ est identiquement égal à zéro. Partant,

$$d\psi = 0, \quad \text{d'où} \quad \psi = \text{const.};$$

ce qu'il fallait démontrer.

De là résulte: 1°. Qu'ayant déterminé d'une manière quelconque n fonctions distinctes ou indépendantes entre elles $\varphi_1,\ldots,$ φ_n, satisfaisant à l'équations (11), nous aurons un système complet d'intégrales des équations (12), sous la forme

$$\varphi_1 = \text{const.} = c_1, \quad \varphi_2 = \text{const.} = c_2, \ldots, \quad \varphi_n = \text{const.} = c_n;$$

2°. Que, connaissant un système d'intégrales des équations (12), tel que le précédent, on peut former un nombre infini d'autres systèmes, de la forme

$$\pi_1(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \text{const.} = c^{(1)},$$

$$\pi_2(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \text{const.} = c^{(2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \text{const.} = c^{(n)}.$$

Il est clair que ce passage d'un système d'intégrales à un autre revient à remplacer les constantes arbitraires primitives par de nouvelles constantes, liées avec elles par des relations choisies arbitrairement,

$$\pi_1(c_1,\ldots,c_n) = c^{(1)},\ldots,\ \pi_n(c_1,\ldots,c_n) = c^{(n)}.$$

22. Parmi les différents systèmes d'intégrales des équations (12), celui qui, dans beaucoup de cas, mérite la préférence est le système dans lequel entrent, comme constantes arbitraires, des valeurs arbitraires $x_1^0,\ldots,x_n^0$ des fonctions $x_1,\ldots,x_n$, correspondantes à une valeur quelconque z^0 de la variable indépendante z. Il est facile de déduire ce système d'intégrales d'un autre système donné quelconque, par exemple, du système (16). En supposant que, pour $z=z^0$, on ait, pour valeurs correspondantes, $x_1=x_1^0,\ldots,x_n=x_n^0$, nous aurons, entre les anciennes constantes et les nouvelles, les relations

$$\varphi_1(z^0, x_1^0,\ldots,x_n^0) = c_1,\ldots,\ \varphi_n(z^0, x_1^0,\ldots,x_n^0) = c_n,$$

ou, en résolvant ces équations par rapport à $x_1^0,\ldots,x_n^0$,

$$x_1^0 = \psi_1(c_1,\ldots,c_n),\ldots,\ x_n^0 = \psi_n(c_1,\ldots,c_n).$$

Si l'on substitue ici les valeurs de $c_1,\ldots,c_n$, tirées des équations (16), nous aurons le système demandé d'intégrales, sous la forme

$$\varphi_1(z, x_1,\ldots,x_n) = \varphi_1(z^0, x_1^0,\ldots,x_n^0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n(z, x_1,\ldots,x_n) = \varphi_n(z^0, x_1^0,\ldots,x_n^0),$$

ou encore sous celle-ci

$$\psi_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = x_1^0, \ldots, \psi_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = x_n^0.$$

Chapitre III.

§. 10.

23. Nous allons maintenant considérer le problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre de la forme la plus générale, c'est-à-dire, sans restriction relative au nombre des variables indépendantes ou à la forme de l'équation.

En conservant les notations adoptées au §. 1, représentons encore le type général de ces équations sous la forme

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{1}$$

La détermination immédiate de l'intégrale générale de l'équation (1) constituerait un problème trop complexe; à cause de cela, on cherchera d'abord son intégrale complète, renfermant n constantes arbitraires, de laquelle, comme on l'a démontré plus haut (Chap. I, §§. 2.—6.), on déduira ensuite, par la variation des constantes arbitraires, les intégrales générales et l'intégrale singulière. Une autre manière de traiter le problème consiste, au lieu de déterminer immédiatement l'intégrale complète, représentée par une équation entre les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, la fonction z et n constantes arbitraires, à chercher d'abord les expressions des dérivées partielles $p_1, \ldots, p_n$ de la fonction z. En substituant ces expressions dans l'équation

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n, \tag{2}$$

qui donne la différentielle totale de la fonction z, et intégrant cette équation, on obtient l'intégrale complète cherchée. Si l'on met cette dernière sous la forme d'une équation résolue par rapport à une des constantes $a_1, \ldots, a_n$, on a

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_n; \tag{3}$$

d'où, en différentiant par rapport à chacune des variables indépendantes, on tire

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \ldots, p_n = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Par suite, $p_1, \ldots, p_n$ doivent être des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, z$, et renfermer dans leurs expressions $n-1$ constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

De plus, pour que l'équation (2) admette une intégrale, telle que (3), il est nécessaire que les fonctions $p_1, \ldots, p_n$ remplissent les conditions d'intégrabilité, lesquelles sont de la forme

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial z} p_k = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial p_k}{\partial z} p_i,$$

i et k représentant tour à tour toutes les combinaisons différentes des nombres 1, 2, ..., n, pris deux à deux. Par suite, ces conditions sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, et on les écrira toutes, sans omissions ni répétitions, en donnant à l'indice i les valeurs successives 1, 2, ..., $n-1$, et, pour chaque valeur de i, donnant à l'indice k successivement toutes les valeurs plus grandes que i, jusqu'à n inclusivement.

Introduisons, pour abréger, la notation suivante: u étant une fonction quelconque, qui renferme, outre les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, la fonction z de ces variables, nous représenterons la dérivée partielle de u par rapport à l'une des variables indépendantes x_i, par le symbole $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, au lieu d'écrire $\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z} p_i$. D'après cette convention, le type général des conditions d'intégrabilité prendra la forme

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right). \tag{4}$$

§. 11.

24. Pour déterminer les n fonctions $p_1, \ldots, p_n$, qui conduisent, par l'intégration de l'équation (2), à l'intégrale complète de (1), il faut en général trouver n équations entre ces fonctions, les variables $x_1, \ldots, x_n$, z et $n-1$ constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Nous avons déjà une de ces n équations, savoir, l'équation aux dérivées partielles donnée (1); il reste à déterminer les $n-1$

autres. En supposant ces dernières résolues par rapport aux constantes arbitraires, représentons le système considéré des n équations comme il suit,

$$(5) \qquad F = 0, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \ldots, \quad F_{n-1} = a_{n-1},$$

$F_1, \ldots, F_{n-1}$ désignant, comme le premier membre F de l'équation donnée (1), des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$, qui ne renferment pas de constantes arbitraires.

De cette manière, au lieu de déterminer n fonctions $p_1, \ldots, p_n$, renfermant, avec les $n+1$ variables, $n-1$ constantes arbitraires, le problème se ramène à la recherche de $n-1$ fonctions $F_1, \ldots, F_{n-1}$, de $2n+1$ variables chacune, mais ne renfermant pas de constantes arbitraires. Pour la détermination des fonctions $p_1, \ldots, p_n$, on donne les équations de condition (4). Voyons quelles conditions doivent remplir les fonctions $F_1, \ldots, F_{n-1}$, en supposant que les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$, tirées des équations (5), satisfassent aux conditions (4). Pour cela, prenons deux quelconques des équations (5), par exemple, les équations

$$F_i = a_i, \qquad F_k = a_k,$$

et différentions-les successivement par rapport à chacune des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$. On trouve, en différentiant par rapport à x_1,

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right) + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_1}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F_k}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F_k}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right) + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_1}\right) = 0;$$

en différentiant par rapport à x_2,

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right) + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial F_k}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial F_k}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right) + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2}\right) = 0;$$

et ainsi de suite; enfin, en différentiant par rapport à x_n,

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_n}\right) + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial F_k}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial F_k}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_n}\right) + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Eliminons, entre les deux premières équations précédentes, $\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right)$; entre les deux suivantes, $\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right)$;....; enfin, entre les deux dernières, $\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right)$. Nous obtiendrons ainsi les n équations

$$(6)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_1} - \frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right) + \left\{\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\frac{\partial F_k}{\partial p_1} - \frac{\partial F_i}{\partial p_1}\frac{\partial F_k}{\partial p_2}\right\}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right) \\ \qquad + \ldots + \left\{\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\frac{\partial F_k}{\partial p_1} - \frac{\partial F_i}{\partial p_1}\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\right\}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_1}\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_2} - \frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_2}\right) + \left\{\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\frac{\partial F_k}{\partial p_2} - \frac{\partial F_i}{\partial p_2}\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\right\}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right) \\ \qquad + \ldots + \left\{\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\frac{\partial F_k}{\partial p_2} - \frac{\partial F_i}{\partial p_2}\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\right\}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_n} - \frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right) + \left\{\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\frac{\partial F_k}{\partial p_n} - \frac{\partial F_i}{\partial p_n}\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\right\}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) \\ \qquad + \ldots + \left\{\frac{\partial F_i}{\partial p_{n-1}}\frac{\partial F_k}{\partial p_n} - \frac{\partial F_i}{\partial p_n}\frac{\partial F_k}{\partial p_{n-1}}\right\}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right) = 0. \end{cases}$$

25. Introduisons maintenant les conditions d'intégrabilité (4), et remarquons que, dans les équations (6), les coefficients des quantités $\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right)$ et $\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right)$, qui doivent être égales en vertu de ces conditions, sont eux-mêmes égaux en grandeur, mais de signe contraire. Si nous faisons la somme de toutes les équations (6), tous les termes, à l'exception des deux premiers de chaque équation, se détruiront deux à deux, et nous obtiendrons l'équation,

$$(7)\quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_1} - \frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_n} - \frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right) = 0,$$

qui devra être satisfaite par toutes les combinaisons deux à deux des fonctions qui forment les premiers membres des équations (5).

La loi de composition du premier membre de l'équation (7) au moyen des dérivées partielles des fonctions F_i et F_k est évidente; nous adopterons, pour le désigner, le signe conventionnel $[F_i, F_k]$. D'après cela, le type général des conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions F, F_1,...., F_{n-1}, sera

$$(8)\qquad [F_i, F_k] = 0,$$

i et k représentant toutes les combinaisons différentes des indices 0, 1, 2,...., $n-1$, pris deux à deux, avec la supposition de

$F_0 = F$. Par suite, les conditions (8) sont en même nombre que les conditions (4), savoir, au nombre de

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Remarquons de plus que, si dans l'équation (7) une des deux fonctions F_i, F_k est donnée, cette équation sera de forme linéaire par rapport aux dérivées partielles de l'autre fonction, qui est inconnue. Ainsi, par exemple, en faisant, dans l'équation (7), $F_k = F$, et écrivant, par suite, l'équation sous la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial F_i}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial F_i}{\partial x_n} \\ &+ \left\{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_2} + \ldots + p_n\frac{\partial F}{\partial p_n}\right\}\frac{\partial F_i}{\partial z} \\ &- \left\{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z}\right\}\frac{\partial F_i}{\partial p_1} - \left\{\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial F}{\partial z}\right\}\frac{\partial F_i}{\partial p_2} \\ &- \ldots - \left\{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial F}{\partial z}\right\}\frac{\partial F_i}{\partial p_n} = 0, \end{aligned}\right.$$

nous avons une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles de F_i, dont l'intégration (Chap. II, §§. 8 et 9) se ramène à l'intégration du système suivant d'équations simultanées aux différentielles ordinaires,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{\partial x_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{\partial x_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} \\ &= \frac{dz}{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_2} + \ldots + p_n\frac{\partial F}{\partial p_n}} \\ &= \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial F}{\partial z}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial F}{\partial z}}. \end{aligned}\right.$$

§. 12.

26. En considérant le nombre et la forme des équations (8), à l'intégration desquelles se ramène notre problème, il est aisé de remarquer que le cas de deux variables indépendantes se distingue des autres par sa plus grande simplicité. En effet, lorsque $n = 2$, alors, pour compléter l'équation donnée

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = 0,$$

il suffit de former une autre équation

$$F_1(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = a_1,$$

dont le premier membre F_1 vérifie la condition unique

$$[F, F_1] = 0.$$

Cette équation est, comme nous l'avons vu, une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction F_1, dont l'intégration se ramène à l'intégration du système (10) d'équations simultanées aux différentielles ordinaires, lequel prend, dans le cas actuel, la forme

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \frac{dz}{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

En outre, il est évident qu'il suffit de déterminer seulement une intégrale $F_1 = a_1$ de ce système, qui renferme au moins une des quantités p_1, p_2, et une constante arbitraire a_1. A l'aide de cette intégrale et de l'équation donnée, on déterminera les expressions de p_1 et de p_2. En substituant ces expressions dans l'équation

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = 0,$$

l'intégration de cette équation, multipliée, s'il est nécessaire, par un facteur d'intégrabilité, fera connaître l'intégrale complète cherchée.

27. Pour éclaircir cette méthode, appliquons-la à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 + 1\right] + (a - z)\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

ou

$$p_1(p_2^2 + 1) + (a - z)p_2 = 0.$$

Le système correspondant d'équations différentielles simultanées prend ici la forme

$$\frac{dx_1}{p_2^2 + 1} = \frac{dx_2}{2p_1p_2 + a - z} = \frac{dz}{3p_1p_2^2 + (a - z)p_2 + p_1} = \frac{dp_1}{p_1p_2} = \frac{dp_2}{p_2^2}.$$

L'équation formée en égalant le premier et le dernier de ces rapports donne, en l'intégrant,

$$a_1 + x_1 = p_2 - \frac{1}{p_2}.$$

On tire de là, au moyen de l'équation donnée,

$$p_1 = \frac{z-a}{\pm 2\sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2+1}},$$

$$p_2 = \frac{x_1+a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2+1}.$$

En substituant ces valeurs de p_1 et de p_2 dans l'équation

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = 0,$$

il vient

$$dz - \frac{z-a}{\pm\sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2+1}} dx - \left(\frac{x_1+a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2+1}\right) dx_2 = 0.$$

Cette équation, multipliée par

$$\pm\sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2+1} - \frac{x_1+a_1}{2}$$

se ramène à la forme

$$d\left\{(z-a)\left(\pm\sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2+1} - \frac{x_1+a_1}{2}\right) - x_2\right\} = 0.$$

Par suite, l'intégrale complète de l'équation donnée sera

$$(z-a)\left(\pm\sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2+1} - \frac{x_1+a_1}{2}\right) - x_2 = a_2,$$

ou

$$z-a = \left(\pm\sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2+1} + \frac{x_1+a_1}{2}\right)(x_2+a_2).$$

Si l'on prend, dans le système d'équations simultanées, l'équation formée en égalant les deux derniers rapports, l'intégration donne

$$p_1 = \alpha_1 p_2,$$

α_1 désignant une nouvelle constante arbitraire. Au moyen de cette équation et de l'équation donnée, on trouve

$$p_1 = \alpha_1 \sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1} - 1}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1} - 1};$$

par conséquent,

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = dz - (\alpha_1 dx_1 + dx_2)\sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1} - 1} = 0.$$

En divisant cette équation par $\sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1} - 1}$, et intégrant, on obtient l'intégrale complète de l'équation donnée, sous cette autre forme,

$$2\sqrt{\alpha_1}\sqrt{z-a-\alpha_1} - (\alpha_1 x_1 + x_2) = \alpha_2,$$

ou

$$z - a = \frac{(\alpha_1 x_1 + x_2 + \alpha_2)^2}{4\alpha_1} + \alpha_1,$$

α_2 étant une nouvelle constante arbitraire.

28. La méthode précédente pour l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes a été établie par Lagrange dès l'année 1772.

L'équation linéaire à l'intégration de laquelle il raméne le problème n'a pas la forme symétrique de l'équation $[F, F_1] = 0$; mais elle renferme moins de variables. Exposons en quelques mots le procédé de Lagrange.

Les dérivées partielles p_1, p_2 doivent être considérées comme des fonctions de x_1, x_2, z, dont il suffit de déterminer une seule, la valeur de l'autre se déduisant de l'équation donnée

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = 0.$$

Si l'on substitue, réciproquement, ces deux valeurs dans cette même équation, elle se changera en une identité: par conséquent, on pourra la différentier, non-seulement par rapport à x_1, mais encore par rapport à z, considéré aussi comme une variable indépendante. Nous aurons, de cette manière,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial z} = 0.$$

En y joignant la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p_1}{\partial z} p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial z} p_1,$$

et éliminant entre les trois équations précédentes les dérivées partielles de p_2, on obtient une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction p_1,

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \left(p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_2}\right)\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

dans les coefficients de laquelle p_2 doit être remplacé par sa valeur tirée de l'équation donnée $F=0$. Par cette équation, p_1 est déterminé en fonction de x_1, x_2, z; puis la valeur de la fonction p_2 se déduit de l'équation donnée. Les deux fonctions satisfont à la condition d'intégrabilité, que l'on a prise pour base de leur détermination. Donc, par la substitution de leurs valeurs, l'équation

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = 0$$

devient intégrable, et son intégration fait connaître la solution cherchée.

Remarquons que l'équation linéaire précédente conduit au système d'équations simultanées

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_2}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}},$$

qui est évidemment le même que celui de l'art. 26, à cela près que l'on y supprime le dernier rapport, et que l'on y remplace p_2 par sa valeur tirée de l'équation $F=0$. Les deux procédés sont donc au fond complétement identiques, et conduisent à une seule et même solution, si l'on se borne à déduire du système précédent d'équations simultanées une intégrale renfermant p_1 et une constante arbitraire. Mais Lagrange avait cru d'abord que, pour avoir l'expression de p_1, il fallait déterminer l'intégrale générale de l'équation linéaire, laquelle doit être de la forme

$$\varphi_3 = \pi(\varphi_1, \varphi_2),$$

en désignant les intégrales du système correspondant d'équations simultanées, résolues par rapport aux constantes arbitraires, par

$$\varphi_1(x_1, x_2, z, p_1) = \text{const.} = \alpha,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, z, p_1) = \text{const.} = \beta,$$

$$\varphi_3(x_1, x_2, z, p_1) = \text{const.} = \gamma,$$

et représentant par la caractéristique π une fonction arbitraire.

Si l'on suppose que de l'équation qui représente l'intégrale générale on puisse tirer la valeur de p_1 sans donner une forme particulière à la fonction π, nous aurons aussi cette fonction dans l'expression de p_2. Cependant il est évident que, entre une relation primitive qui lierait x_1, x_2, z, et qui serait de la forme

$$f[x_1, x_2, z, \pi(\varphi_1, \varphi_2)] = 0$$

(f étant une fonction donnée, et π une fonction arbitraire), et les deux équations obtenues par la différentiation de la précédente par rapport à x_1 et à x_2, il n'est pas possible d'éliminer les trois fonctions π, $\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_1}$, $\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_2}$.

Dans le Calcul des Fonctions (p. 390), Lagrange propose un moyen pour concilier cette contradiction. Mais il faut remarquer qu'elle ne se rencontre pas dutout, si, conformément à la remarque très-juste de Charpit*), au lieu de l'intégrale générale de l'équation linéaire, on prend une intégrale particulière renfermant la variable p_1. Ce dernier procédé, au lieu de conduire à l'intégrale générale, conduit à l'intégrale complète de l'équation donnée $F = 0$, et a de plus l'avantage de ne pas exiger l'intégration complète du système d'équations simultanées. Lagrange, en terminant son exposition, l'établit aussi par cette méthode, sans citer d'ailleurs le nom de Charpit, à qui elle appartient.

§. 13.

29. Si le nombre des variables indépendantes, dans l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, est plus grand que 2, alors le problème de l'intégration présente un caractère plus compliqué. En effet, déjà dans le cas de trois variables indépendantes, il faut (§§. 10 et 11), étant donnée la fonction F des variables x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, qui forme le premier membre de

*) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences par Charpit, le 30 juin 1784.

l'équation proposée $F=0$, déterminer deux fonctions F_1, F_2 de ces mêmes variables, satisfaisant aux conditions

$$[F, F_1] = 0, \qquad \begin{cases} [F, F_2] = 0, \\ [F_1, F_2] = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction F_1 peut être déterminée, de même que dans le cas précédent de deux variables indépendantes, comme intégrale particulière d'une équation linéaire du premier ordre; mais, pour déterminer la fonction F_2, il faut trouver une intégrale particulière, satisfaisant à la fois aux deux autres équations simultanées linéaires aux dérivées partielles.

Si le nombre des variables indépendantes est n, alors, étant donnée la fonction F des variables $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$, qui forme le premier membre de l'équation proposée $F=0$, il faut déterminer $n-1$ fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ des mêmes variables, qui satisfassent aux conditions

$$[F, F_1]=0, \quad \begin{cases} [F, F_2]=0, \\ [F_1, F_2]=0, \end{cases} \quad \begin{cases} [F, F_3]=0, \\ [F_1, F_3]=0, \\ [F_2, F_3]=0, \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} [F, F_{n-1}] = 0, \\ [F_1, F_{n-1}] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ [F_{n-2}, F_{n-1}] = 0. \end{cases}$$

La fonction F_1 se détermine comme une intégrale particulière de la première des équations précédentes; la fonction F_2 comme une intégrale particulière satisfaisant simultanément à la 2e et à la 3e équation, etc.; et enfin F_{n-1} doit être une intégrale particulière satisfaisant simultanément aux $n-1$ dernières équations.

C'est de cette manière qu'a été présenté le problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre dans le Mémoire de Jacobi intitulé: Nova methodus, etc. (Journal de Crelle-Borchardt, t. LX). Quoique ce nouveau procédé de solution soit, par l'époque de sa découverte, postérieur aux autres, cependant il forme par sa nature la continuation directe des premiers pas faits par Lagrange et Charpit dans la théorie du problème qui nous occupe. C'est pour cela que j'exposerai ce procédé avant de parler d'une autre méthode de solution, proposée par Pfaff, et perfectionnée par Jacobi lui-même et par Cauchy.

§. 14.

30. Jacobi commence par transformer l'équation donnée

$$(a) \qquad F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

en une autre, également aux dérivées partielles du premier ordre, mais dans laquelle la fonction inconnue n'entre pas elle-même explicitement, et où le nombre des variables indépendantes est plus grand d'une unité.

Mais dans cette transformation s'est glissée une inadvertance, signalée par Bertrand, et qui consiste en ce que Jacobi lie la nouvelle fonction inconnue à l'ancienne par une relation de forme particulière, d'où il résulte que le passage de l'intégrale de l'équation transformée à celle de l'équation proposée conduit dans la plupart des cas à des impossibilités.

En effet, Jacobi, en introduisant une nouvelle variable indépendante t, et désignant la nouvelle fonction inconnue par γ, pose

$$\gamma = zt.$$

On tire de là, en différentiant par rapport à chacune des variables indépendantes,

$$z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{1}{t}\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{1}{t}\frac{\partial \gamma}{\partial x_n}.$$

En substituant dans l'équation proposée les valeurs précédentes de la fonction z et de ses dérivées partielles, on la transforme dans la suivante,

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{1}{t}\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{t}\frac{\partial \gamma}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Dans cette équation les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n, t$ sont en nombre plus grand d'une unité que dans la proposée, et la fonction inconnue γ y entre seulement par ses dérivées partielles du premier ordre.

Mais, pour que de l'intégrale de l'équation ainsi transformée on puisse tirer l'intégrale de l'équation donnée, il faut, en vertu de la dépendance que l'on a supposée entre ces intégrales, que, dans la première, la variable indépendante t n'entre qu'en facteur commun, ce qui évidemment ne peut avoir lieu que dans des cas particuliers. Par conséquent, la transformation précédente n'atteint pas, la pluspart du temps, le but proposé. Il vaut mieux, d'après cela, ne pas choisir d'avance arbitrairement la forme de la relation qui doit exister entre les deux intégrales, mais employer pour la transformation le même procédé général qui nous a servi dans l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles.

31. Si l'on représente, en effet, l'intégrale de l'équation donnée sous la forme

$$\gamma(x_1, \ldots, x_n, z) = 0,$$

et qu'on la différentie par rapport à chacune des variables indépendantes, on trouve, par chacune des valeurs $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} p_i = 0, \quad \text{d'où} \quad p_i = -\frac{\dfrac{\partial \gamma}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}}.$$

En portant ces valeurs de p_i dans l'équation donnée, elle prend la forme

$$b) \qquad F\left(x_1, \ldots, x_n, z, -\frac{\dfrac{\partial \gamma}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\dfrac{\partial \gamma}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}}\right) = 0.$$

Dans cette dernière équation, on devra considérer $x_1, \ldots, x_n, z$ comme variables indépendantes. La méthode de Jacobi, ainsi que nous le verrons plus loin, fournit l'intégrale complète γ de l'équation précédente sous la forme d'une fonction explicite,

$$(c) \qquad \gamma = f(x_1, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_n) + a_{n+1},$$

$a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ désignant des constantes arbitraires. Par conséquent, en retranchant du second membre de l'égalité (c) la constante arbitraire a_{n+1}, qui y entre par simple addition, et égalant ce second membre à zéro, nous obtiendrons l'intégrale de l'équation donnée, sous la forme d'une fonction implicite z, déterminée par l'équation

$$(d) \qquad \gamma - a_{n+1} = 0, \quad \text{ou} \quad f(x_1, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

En effet, puisque l'équation (c) représente l'intégrale de l'équation (b), en substituant dans celle-ci la fonction f au lieu de γ, on aura l'identité

$$(f) \qquad F\left(x_1, \ldots, x_n, z, -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\right) = 0,$$

qui a lieu pour des valeurs quelconques de $x_1, \ldots, x_n, z$. Supposons maintenant la dernière de ces variables déterminée en

fonction de toutes les autres au moyen de l'équation (*d*); elle sera alors l'intégrale de l'équation (*a*); car de l'équation (*d*) on tire

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

et, en substituant ces valeurs des dérivées partielles de z dans l'équation (*a*), on retombe sur l'identite (*f*), qui a lieu pour une valeur quelconque de z, et par suite aussi pour celle qui est tirée de l'équation (*d*).

Il est ainsi démontré que l'intégration d'une équation dans laquelle la fonction inconnue entre non-seulement par ses dérivées partielles du premier ordre, mais encore explicitement par elle-même, peut toujours se ramener à l'intégration d'une autre équation, dans laquelle le nombre des variables indépendantes est plus grand d'une unité, et où la fonction inconnue n'entre que par ses dérivées partielles du premier ordre.

§. 15.

32. Si, dans l'équation proposée, la fonction inconnue n'entre que par ses dérivées partielles du premier ordre, alors son type général pourra être représenté sous la forme

$$H\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = a,$$

ou

$$H(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a,$$

en faisant généralement

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

Ici H désigne une fonction donnée, a une constante déterminée, qui peut être aussi égale à zéro.

Le problème de l'intégration complète de l'équation précédente peut être reduit à la détermination de $n-1$ équations,

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \ldots, \quad H_{n-1} = a_{n-1},$$

dans lesquelles $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ désignent des constantes arbitraires, et $H_1, \ldots, H_{n-1}$, de même que H, des fonctions des varia-

bles $x_1, \ldots, x_n$ et des dérivées partielles $p_1, \ldots, p_n$, indépendantes entre elles par rapport à ces dérivées*), et ne contenant pas les constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Si les fonctions $H_1, \ldots, H_{n-1}$ sont déterminées de telle manière que les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tirées des équations

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \ldots, H_{n-1} = a_{n-1}, \tag{1}$$

transforment le second membre de l'équation

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n \tag{2}$$

en une différentielle exacte, alors l'intégrale complète cherchée s'obtiendra par l'intégration de cette dernière équation, et sera de la forme

$$z = f(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_n.$$

Par hypothèse, les fonctions $H, H_1, \ldots, H_{n-1}$ ne contiennent pas z; par suite, les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$, tirées des équations (1), seront exprimées au moyen des seules variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, et les conditions d'intégrabilité du second membre de l'équation (2) seront, dans le cas actuel, de la forme

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}. \tag{3}$$

En supposant que les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$, tirées des équations (1), satisfassent aux conditions (3), on pourra trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire dans ce cas les fonctions $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$, exactement de la même manière que nous avons trouvé, au §. 11, les conditions analogues pour les fonctions $F_1, \ldots, F_{n-1}$. D'après cela, pour éviter les répétitions, nous nous bornerons à dire que les résultats du §. 12. s'appliqueront au cas actuel, si nous y remplaçons $F, F_1, \ldots, F_{n-1}$ respectivement par $H, H_1, \ldots, H_{n-1}$, en effaçant les parenthèses qui entourent les dérivées partielles, et qui sont maintenant inutiles, puisque les fonctions considérées ne contiennent plus z.

---

*) C'est-à-dire qu'entre les fonctions $H, H_1, \ldots, H_{n-1}$ il ne doit exister aucune relation nécessaire de la forme

$$\Phi(H, H_1, \ldots, H_n, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

dans laquelle les variables $p_1, \ldots, p_n$ n'entrent pas explicitement. En vertu du théorème du §. 3, cette condition est remplie, lorsque le déterminant fonctionnel de $H, H_1, \ldots, H_{n-1}$, considérées comme fonctions de $p_1, \ldots, p_n$, n'est pas identiquement nul.

33. Il s'ensuit de ce qui précède qu'entre les fonctions H, $H_1, \ldots, H_{n-1}$, prises deux à deux, on doit avoir des relations de la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial H_i}{\partial x_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_1} - \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial x_1} + \frac{\partial H_i}{\partial x_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial x_2} \\ &\qquad + \ldots + \frac{\partial H_i}{\partial x_n}\frac{\partial H_k}{\partial p_n} - \frac{\partial H_i}{\partial p_n}\frac{\partial H_k}{\partial x_n} = 0, \end{aligned}\right.$$

que nous représenterons sous la forme abrégée

$$(5)\qquad (H_i,\ H_k) = 0.$$

En faisant successivement, dans l'équation (5),

$$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-2$$

(H_0 étant considéré comme $= H$), et, pour chaque valeur de i, donnant successivement à l'indice k toutes les valeurs $> i$, jusqu'à $n-1$ inclusivement, nous aurons toutes les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions qui découlent de la formule (5), et que l'on peut disposer dans l'ordre suivant:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} (H, H_1)=0;\ \left\{\begin{array}{l}(H,\ H_2)=0,\\ (H_1,\ H_2)=0;\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}(H,\ H_3)=0, \ldots,\\ (H_1,\ H_3)=0, \ldots,\\ (H_2,\ H_3)=0; \ldots,\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}(H,\ H_{n-1})=0,\\ (H_1,\ H_{n-1})=0,\\ (H_2,\ H_{n-1})=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ (H_{n-2},\ H_{n-1})=0.\end{array}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots, \end{array}\right.$$

Si l'on considère ces conditions comme des équations différentielles servant à la détermination des fonctions cherchées, on pourra trouver H_1 par l'intégration de la première équation; en substituant la valeur de H_1 dans les équations de la seconde ligne de chaque groupe, on devra déterminer la fonction H_2 comme une intégrale satisfaisant simultanément aux deux équations du second groupe; en substituant la valeur de H_2 dans les équations de la troisième ligne de chaque groupe, on devra déterminer la fonction H_3 comme une intégrale satisfaisant simultanément aux trois équations du troisième groupe; et ainsi de suite.

34. Mais, pour réaliser ce plan de solution, il faut trouver une méthode d'intégration simultanée pour les deux équations du 2e groupe, pour les trois équations du 3e groupe, ..., et enfin pour les $n-1$ équations du $(n-1)^{\text{ième}}$ groupe.

Outre cela, toutes les équations (6) sont de forme identique, et contiennent chacune $2n$ variables indépendantes; mais il est clair que l'on peut se servir de l'équation donnée $H=a$ et des équations que l'on détermine successivement, $H_1=a_1$, $H_2=a_2$,..., pour diminuer au fur et à mesure le nombre primitif $2n$ des variables indépendantes, en passant d'une groupe d'équations simultanées au suivant.

Enfin, remarquons aussi que nous avons démontré que, si les valeurs de $p_1,\ldots, p_n$, tirées des équations (1), vérifient les conditions (3), alors les fonctions H_1, $H_2,\ldots, H_{n-1}$ satisfont aux équations (6). Mais, pour avoir le droit de prendre celles-ci comme moyen de détermination des fonctions $H_1,\ldots, H_{n-1}$, il faut s'assurer encore que la conclusion réciproque a lieu; c'est-à dire qu'il faut démontrer que, si les fonctions indépendantes entre elles (dans le même sens qui a été expliqué plus haut) H, $H_1,\ldots, H_{n-1}$ vérifient les conditions (6), alors, en les égalant à des constantes arbitraires, on obtient des équations d'où l'on peut tirer des valeurs de $p_1,\ldots, p_n$ satisfaisant aux conditions (3).

L'étude plus approfondie des propriétés des expressions (H_i, H_k), exposée dans les deux paragraphes suivants, donne les moyens d'atteindre le but indiqué ci-dessus, et permet en outre de déduire encore d'autres conclusions utiles par leurs applications à l'intégration des équations simultanées soit aux différentielles ordinaires, soit aux dérivées partielles du premier ordre.

Chapitre IV.

§. 16.

35. Soient φ et ψ deux fonctions quelconques des variables $x_1,\ldots, x_n, p_1,\ldots, p_n$. Prenons les dérivées partielles de ces deux fonctions, d'abord par rapport aux variables $x_1,\ldots, x_n$, puis par rapport aux variables $p_1,\ldots, p_n$, et écrivons les premières au-dessus des secondes dans l'ordre suivant,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi}{\partial x_1}; \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial\psi}{\partial x_n};$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}, \frac{\partial\psi}{\partial p_1}; \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}, \frac{\partial\psi}{\partial p_2}; \ldots; \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}, \frac{\partial\psi}{\partial p_n}.$$

Divisons ces deux lignes de termes en groupes composés le premier des deux premiers termes de chaque ligne, le second des deux suivants, et ainsi de suite; multiplions en croix les termes de chaque groupe, en prenant avec le signe + les termes qui forment une des diagonales, et avec le signe — les termes qui forment l'autre diagonale. Nous obtiendrons de cette manière une suite de déterminants du second degré, dont la somme forme l'expression

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}, & \frac{\partial\psi}{\partial p_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}, & \frac{\partial\psi}{\partial p_2} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}, & \frac{\partial\psi}{\partial p_n} \end{vmatrix},$$

que nous conviendrons de désigner par la notation

$$(\varphi, \psi).$$

On a ainsi, d'après cette définition,

$$(1) \quad (\varphi, \psi) = \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}, & \frac{\partial\psi}{\partial p_i} \end{vmatrix} = \Sigma_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right),$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs de i depuis 1 jusqu'à n.

Lorsqu'on examine les changements de forme de l'expression (φ, ψ) pour différentes hypothèses faites sur les valeurs de φ et de ψ, on obtient d'abord les formules évidentes

$$(2) \quad (\varphi, \varphi) = 0, \quad (\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi), \quad (-\varphi, \psi) = -(\varphi, \psi),$$

$$(3) \quad \begin{cases} (x_i, \psi) = \frac{\partial\psi}{\partial p_i}, \quad (p_i, \psi) = -\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \quad (a = \text{const.}, \psi) = 0, \\ (x_i, p_i) = -(p_i, x_i) = 1, \\ (x_i, x_k) = (p_i, p_k) = (x_i, p_k) = 0. \end{cases}$$

36. Relativement au mode de dépendance qui existe entre les fonctions φ, ψ et les variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, nous ne ferons aucune espèce de restriction; nous supposerons d'après cela que ces variables entrent dans les fonctions considérées tant explicitement qu'implicitement.

Soit, par exemple,

$$\varphi = F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_r),$$

$$\psi = f(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, b_1, \ldots, b_s),$$

$a_1, \ldots, a_r$ et $b_1, \ldots, b_s$ désignant des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$. On a, par définition,

$$[F, f] = \Sigma_i \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right), & \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\ \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right), & \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial a_r}{\partial x_i}, & \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_s}\frac{\partial b_s}{\partial x_i} \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial a_r}{\partial p_i}, & \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial p_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_s}\frac{\partial b_s}{\partial p_i} \end{vmatrix}.$$

En appliquant successivement les formules évidentes

$$(4) \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} A + a, & A' \\ B + b, & B' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A, & A' \\ B, & B' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & A' \\ b, & B' \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} mA, & nA' \\ mB, & nB' \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} A, & A' \\ B, & B' \end{vmatrix}, \end{cases}$$

on tire de là

$$\begin{aligned} [F, f] &= (F, f) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial b_1}(F, b_1) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_s}(F, b_s) + \frac{\partial F}{\partial a_1}(a_1, f) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_r}(a_r, f) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_1, b_1) + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_1, b_2) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial b_s}(a_1, b_s) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_2, b_1) + \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_2, b_2) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial f}{\partial b_s}(a_2, b_s) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &+ \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_r, b_1) + \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_r, b_2) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_r}\frac{\partial f}{\partial b_s}(a_r, b_s), \end{aligned}$$

ou

$$(5) \quad \begin{cases} [F, f] = (F, f) + \Sigma_k \frac{\partial f}{\partial b_k}(F, b_k) + \Sigma_i \frac{\partial F}{\partial a_i}(a_i, f) \\ \qquad + \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial a_i}\frac{\partial f}{\partial b_k}(a_i, b_k). \end{cases}$$

Il est clair qu'ici les expressions $[F, f]$ et (F, f) n'ont pas

la même signification: la première suppose la variation complète des fonctions F et f, lorsqu'on fait varier les quantités $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$ en tant qu'elles entrent soit explicitement, soit implicitement; la seconde suppose seulement une variation partielle, lorsqu'on ne fait varier $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$ qu'en tant qu'elles entrent explicitement.

Il est aisé de remarquer l'analogie qui existe en général entre l'opération exprimée par le symbole $[F, f]$ et la différentiation des fonctions composées. On peut obtenir, en effet, tous les termes du second membre de (5), en ayant égard tour à tour à la variation de chacun des éléments des fonctions F et f, considéré comme variant seul.

37. Si l'on suppose

$$s = r, \quad \text{et} \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \ldots, \quad a_r = b_r,$$

la formule (5) devient

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} [F, f] = (F, f) &+ \Sigma_i \left\{ (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} \right\} \\ &+ \Sigma_{i,k} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial a_k} - \frac{\partial F}{\partial a_k} \frac{\partial f}{\partial a_i} \right\} (a_i, a_k). \end{aligned} \right.$$

Dans la dernière sommation du second membre, on fera successivement $i = 1, 2, \ldots, r-1$, et, pour chaque valeur de i, on prendra pour k toutes les valeurs plus grandes que i, jusqu'à r inclusivement.

Si les fonctions F et f ne contiennent pas explicitement les variables $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$, la formule (6) prendra la forme

$$(7) \qquad [F, f] = \Sigma_{i,k} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial a_k} - \frac{\partial F}{\partial a_k} \frac{\partial f}{\partial a_i} \right\} (a_i, a_k).$$

Si la fonction F contient les variables $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$ seulement sous forme explicite, et que la fonction f ne contienne ces variables que dans les fonctions $a_1, \ldots, a_r$, on a alors, par la formule (6),

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} [F, f] &= \Sigma_i (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} \\ &= (F, a_1) \frac{\partial f}{\partial a_1} + (F, a_2) \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots + (F, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_r}. \end{aligned} \right.$$

38. Les expressions des dérivées partielles de (φ, ψ) s'obtiennent très-simplement. En désignant par u une quelconque des variables $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$, on a

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial u}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial u}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix} + \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial p_i \partial u} \end{vmatrix},$$

ou

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial u}\right). \tag{9}$$

Quoique, dans la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, nous n'ayons pas occasion de rencontrer les dérivées d'ordres supérieurs de (φ, ψ), remarquons cependant, en passant, la forme très-simple de leur expression, semblable à celle que Leibniz a donnée pour la valeur de

$$\frac{d^n . \varphi(x) \psi(x)}{dx^n}.$$

La formule (9) donne, en effet,

$$\frac{\partial^2(\varphi, \psi)}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \psi\right) + 2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + \left(\varphi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\right).$$

On conclut de là, par la méthode ordinaire de démonstration des propositions trouvées par analogie, que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n(\varphi, \psi)}{\partial u^n} = &\left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial u^n}, \psi\right) + n\left(\frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial u^{n-1}}, \frac{\partial \psi}{\partial u}\right) \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\partial^{n-2} \varphi}{\partial u^{n-2}}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\right) \\ &+ \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial u^{n-2}}\right) \\ &+ n\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial^{n-1} \psi}{\partial u^{n-1}}\right) + \left(\varphi, \frac{\partial^n \psi}{\partial u^n}\right). \end{aligned}$$

§. 17.

Les formules générales du paragraphe précédent s'appliquent d'une manière très-simple à la démonstration de tous les théo-

rèmes sur lesquels est fondée la nouvelle méthode pour l'intégration des équations aux dérivées partielles de Jacobi.

Théorème I.

39. Soient A, B, C trois fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$; désignons, pour abréger, leurs dérivées partielles par les lettres correspondantes affectées des variables comme indices inférieurs, de sorte qu'on ait

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = A_{x_i}, \quad \frac{\partial B}{\partial x_i} = B_{x_i}, \quad \frac{\partial C}{\partial x_i} = C_{x_i},$$

$$\frac{\partial A}{\partial p_i} = A_{p_i}, \quad \frac{\partial B}{\partial p_i} = B_{p_i}, \quad \frac{\partial C}{\partial p_i} = C_{p_i}.$$

En faisant, dans la formule (8),

$$F = A,$$

$$f = (B, C) = B_{x_1} C_{p_1} - B_{p_1} C_{x_1} + \ldots + B_{x_n} C_{p_n} - B_{p_n} C_{x_n},$$

il vient

$$\begin{aligned}[A, (B, C)] = {} & (A, B_{x_1}) C_{p_1} - (A, B_{p_1}) C_{x_1} \\ & + \ldots + (A, B_{x_n}) C_{p_n} - (A, B_{p_n}) C_{p_n} \\ & + (A, C_{p_1}) B_{x_1} - (A, C_{x_1}) B_{p_1} \\ & + \ldots + (A, C_{p_n}) B_{x_n} - (A, C_{x_n}) B_{p_n},\end{aligned}$$

ou

$$(a) \quad [A, (B, C)] = \Sigma_i \begin{vmatrix} (A, B_{x_i}), & C_{x_i} \\ (A, B_{p_i}), & C_{p_i} \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (A, C_{x_i}), & B_{x_i} \\ (A, C_{p_i}), & B_{p_i} \end{vmatrix}.$$

En permutant circulairement les lettres A, B, C, on trouve

$$(b) \quad [B, (C, A)] = \Sigma_i \begin{vmatrix} (B, C_{x_i}), & A_{x_i} \\ (B, C_{p_i}), & A_{p_i} \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (B, A_{x_i}), & C_{x_i} \\ (B, A_{p_i}), & C_{p_i} \end{vmatrix}.$$

On pourrait obtenir de la même manière l'expression de $[C, (A, B)]$; mais il vaut mieux employer pour cela un autre moyen. En vertu des formules (1), (9) et (4), on trouve

$$(c)\quad [C,\,(A,\,B)] = \Sigma_i \begin{vmatrix} \dfrac{\partial C}{\partial x_i}, & \dfrac{\partial (A,\,B)}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial C}{\partial p_i}, & \dfrac{\partial (A,\,B)}{\partial p_i} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_i \begin{vmatrix} C_{x_i},\,(A_{x_i},\,B) \\ C_{p_i},\,(A_{p_i},\,B) \end{vmatrix} + \Sigma^i \begin{vmatrix} C_{x_i},\,(A,\,B_{x_i}) \\ C_{p_i},\,(A,\,B_{p_i}) \end{vmatrix}.$$

En ajoutant les égalités (a), (b), (c), on remarque immédiatement que dans la somme totale des seconds membres, il se produit des réductions. En effet, la première somme du second membre de (a) détruit la seconde somme du second membre de (c), et la seconde somme du second membre de (b) la première somme du second membre de (c). On a, d'après cela,

$$(a')\qquad [A,\,(B,\,C)] + [B,\,(C,\,A)] + [C,\,(A,\,B)]$$

$$= \Sigma_i \begin{vmatrix} (B,\,C_{x_i}),\,A_{x_i} \\ (B,\,C_{p_i}),\,A_{p_i} \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (A,\,C_{x_i}),\,B_{x_i} \\ (A,\,C_{p_i}),\,B_{p_i} \end{vmatrix}.$$

On en tire, en permutant circulairement les lettres,

$$(b')\qquad [B,\,(C,\,A)] + [C,\,(A,\,B)] + [A,\,(B,\,C)]$$

$$= \Sigma_i \begin{vmatrix} (C,\,A_{x_i}),\,B_{x_i} \\ (C,\,A_{p_i}),\,B_{p_i} \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (B,\,A_{x_i}),\,C_{x_i} \\ (B,\,A_{p_i}),\,C_{p_i} \end{vmatrix},$$

$$(c')\qquad [C,\,(A,\,B)] + [A,\,(B,\,C)] + [B,\,(C,\,A)]$$

$$= \Sigma_i \begin{vmatrix} (A,\,B_{x_i}),\,C_{x_i} \\ (A,\,B_{p_i}),\,C_{p_i} \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (C,\,B_{x_i}),\,A_{x_i} \\ (C,\,B_{p_i}),\,A_{p_i} \end{vmatrix}.$$

Ajoutons les égalités (a'), (b'), (c'), en remarquant que leurs premiers membres sont identiques; que dans les seconds membres, en vertu de la première formule (4), les sommes se réduisent deux à deux à une, et qu'en vertu des formules (9) et (1),

La 1re somme de (a') + la 2e de (c') donnent l'expression de $-[A,\,(B,\,C)]$;

La 1re somme de (b') + la 2e de (a') donnent $-[B,\,(C,\,A)]$;

La 1re somme de (c') + la 2e de (b') donnent $-[C,\,(A,\,B)]$.

Il vient alors

$$3\{[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)]\}$$
$$= -\{[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)]\},$$

et par suite

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0.$$

Nous voyons par là que le théorème exprimé par l'identité précédente, et qui forme le principe fondamental de la nouvelle méthode de Jacobi, se tire immédiatement et très-simplement des propriétés élémentaires de l'expression (φ, ψ).

Passons à la démonstration d'autres théorèmes.

Théorème II.

40. Soient n équations

$$(h) \qquad H = a, \quad H_1 = a_1, \ldots, \quad H_{n-1} = a_{n-1},$$

$a, a_1, \ldots, a_{n-1}$ désignant des constantes arbitraires, et $H, H_1, \ldots, H_{n-1}$ des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, vérifiant identiquement les conditions

$$(H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs des indices i et k, prises dans la série $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Nous allons démontrer qu'en tirant du système des équations précédentes les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$, ces valeurs satisfont identiquement aux conditions

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i},$$

pour toutes les valeurs des indices i et k, prises dans la série $1, 2, \ldots, n$.

Supposons qu'au moyen des équations (h) on ait obtenu les valeurs

$$p_i = F(x_1, \ldots, x_n, a, a_1, \ldots, a_{n-1}),$$
$$p_k = f(x_1, \ldots, x_n, a, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

Si l'on considère $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$ comme des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ déterminées par les équations (h), on trouve, d'après la formule (6),

$$[F, f] = (F, f) + \Sigma_i \left\{ (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} \right\}$$
$$+ \Sigma_{i,k} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial a_k} - \frac{\partial F}{\partial a_k} \frac{\partial f}{\partial a_i} \right\} (a_i, a_k).$$

Mais, en substituant les valeurs $a = H, \ldots, a_{n-1} = H_{n-1}$, la fonction F se change en p_i, la fonction f en p_k, et le premier membre de l'égalité précédente prend la forme $[p_i, p_k]$; par suite, il est identiquement égal à zéro. Le premier terme du second membre est aussi nul, puisque l'expression (F, f) est formée en considérant $a, \ldots, a_{n-1}$ comme des constantes, et que les fonctions F et f ne contiennent pas explicitement les variables $p_1, \ldots, p_n$. Le troisième terme du second membre est nul, par suite des conditions

$$(a_i, a_k) = (H_i, H_k) = 0.$$

Donc le second terme du second membre doit être aussi nul, c'est-à-dire qu'on aura identiqement

$$\Sigma_i \left\{ (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} \right\} = 0.$$

Le premier membre de cette inégalité peut se mettre sous une forme plus simple, en substituant les valeurs de (F, a_i) et de (f, a_i). En effet, on a

$$(F, a) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial a}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial a}{\partial p_k} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial a}{\partial p_n},$$

. . . . . .

$$(F, a_{n-1}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_k} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_n}.$$

Ajoutant ces égalités, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\partial f}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}$, il vient

$$\Sigma_i (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_1} \right)$$
. . . . . .
$$+ \frac{\partial F}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_k} \right)$$
. . . . . .
$$+ \frac{\partial F}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_n} \right).$$

Mais si, dans l'équation

$$p_k = f(x_1, \ldots, x_n, a, \ldots, a_{n-1}),$$

nous avons égard aux égalités

$$a = H, \quad a_1 = H_1, \ldots, \quad a_{n-1} = H_{n-1},$$

cette équation devient alors identique. En la différentiant par rapport à l'une quelconque p des quantités $p_1, \ldots, p_n$, on trouve

$$\frac{\partial p_k}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}\frac{\partial a_{n-1}}{\partial p},$$

et il est clair, d'après cela, que le second membre se réduira à l'unité si $p = p_k$, tandis que dans tous les autres cas il se réduira à zéro. Par conséquent

$$\Sigma_i(F, a_i)\frac{\partial f}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial x_k}.$$

On démontrera de même que

$$\Sigma_i(f, a_i)\frac{\partial F}{\partial a_i} = \frac{\partial f}{\partial a_i}.$$

On a donc l'identité

$$\Sigma_i\left\{(F, a_i)\frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i)\frac{\partial F}{\partial a_i}\right\} = \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

En vertu de ce qui a été établi (§§. 11 et 15) et du théorème précédent, on doit considérer les équations

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0 \quad \text{et} \quad (H_i, H_k) = 0$$

comme des conséquences réciproques les unes des autres, et l'on peut prendre les secondes aussi bien que les premières pour conditions d'intégrabilité de l'expression différentielle

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n.$$

Jacobi donne encore deux autres formules pour les conditions d'intégrabilité, que nous allons établir par le même moyen que la précédente.

Théorème III.

41. En conservant les hypothèses du Théorème précédent,

imaginons que, à l'aide des systèmes d'équations (h), chacune des n premières quantités de la série

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

soit exprimée en fonction de toutes les variables qui la suivent dans cette série, et du nombre nécessaire de constantes prises dans la suite $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$; et supposons qu'on ait ainsi trouvé

$$p_i - F(p_{i+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, a, a_1, \ldots, a_{i-1}) = 0,$$

$$p_k - f(p_{k+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, a, a_1, \ldots, a_{k-1}) = 0,$$

$$\text{pour } i < k.$$

Nous allons démontrer que les premiers membres de ces équations satisfont identiquement à la condition

$$(p_i - F, p_k - f) = 0,$$

pour toutes les valeurs de i et de k comprises dans la suite des nombres $1, 2, \ldots, n$.

En considérant $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$ comme des fonctions des variables, déterminées par les équations (h), nous aurons, en vertu de la formule (5),

$$[F, f] = (F, f) + \sum_{m=0}^{m=k-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} - \sum_{m=0}^{m=i-1} (f, a_m) \frac{\partial F}{\partial a_m}$$

$$+ \sum_{m=0}^{m=i-1} \sum_{l=0}^{l=k-1} \frac{\partial F}{\partial a_m} \frac{\partial f}{\partial a_l} (a_m, a_l).$$

En substituant les valeurs $a = H, a_1 = H_1, \ldots$, la fonction F se changera en p_i, la fonction f en p_k, et le premier membre de la dernière égalité prendra la forme $[p_i, p_k]$; il sera, par conséquent, identiquement nul. Le dernier terme du second membre est nul, en vertu de la condition

$$(a_m, a_l) = (H_m, H_l) = 0.$$

On a, par suite, identiquement

$$0 = (F, f) + \sum_{m=0}^{m=k-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} - \sum_{m=0}^{m=i-1} (f, a_m) \frac{\partial F}{\partial a_m}.$$

Les deux sommes du second membre de cette égalité peuvent se ramener à une forme plus simple. Pour cela, prenons les égalités

$$(F,\ a) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial a}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial a}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial a}{\partial x_1} - \ldots - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial a}{\partial x_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(F,\ a_{k-1}) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_1} - \ldots - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n};$$

multiplions les respectivement par $\frac{\partial f}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}$, et ajoutons-les, ce qui donne

$$\sum_{m=0}^{m=k-1} (F,\ a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n}\right)$$

$$- \frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_{i+1}} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_{i+1}}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{\partial F}{\partial p_n}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n}\right).$$

Mais si l'on fait $a = H$, $a_1 = H_1, \ldots$, l'équation $f = p_k$ se changera en identité, et en la différentiant, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_{k-1}} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_{k-1}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_k} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_{k+1}} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_{k+1}} = -\frac{\partial f}{\partial p_{k+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p_n}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n}=-\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_{i+1}}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_{i+1}}=-\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n}=-\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

D'après cela, on peut donner à l'égalité précédente la forme

$$\sum_{m=0}^{m=i-1}(F, a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m}=\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{k+1}}-\ldots.-\frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial p_n}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}+\ldots.+\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

En changeant F en f, k en i, et vice versa, il vient

$$\sum_{m=0}^{m=k-1}(f, a_m)\frac{\partial F}{\partial a_m}=\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}-\ldots.-\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}$$
$$+\frac{\partial f}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}+\ldots.+\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

On tire de là, par soustraction,

$$\sum_{m=0}^{m=k-1}(F, a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m}-\sum_{m=0}^{m=i-1}(f, a_m)\frac{\partial F}{\partial a_m}=\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_i}-2(F, f).$$

On aura donc identiquement

$$(F, f)+\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_i}-2(F, f)=0$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_i}-(F, f)=-\left[(F, f)-\frac{\partial F}{\partial x_k}+\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]=0,$$

c'est-à-dire

$$(F-p_i,\ f-p_k)=0.$$

Nous démontrerons absolument de la même manière cet autre théorème, également nécessaire pour ce qui doit suivre:

Théorème IV.

42. En conservant les conditions des deux théorèmes précédents, supposons que, parmi les équations (*k*), on prenne m équations quelconques, par exemple les m premières,

$$H = a,\ H_1 = a_1, \ldots,\ H_{m-1} = a_{m-1},$$

(en supposant naturellement $m < n$). Au moyen de ces équations, nous pourrons exprimer m quelconques des quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction des $n-m$ autres, des variables $x_1, \ldots, x_n$ et des constantes $a, a_1, \ldots, a_{m-1}$. Concevons qu'on ait déterminé de cette manière $p_1, p_2, \ldots, p_m$, et soient i et k deux nombres quelconques, non plus grands que m. Supposons que l'on ait

$$p_i - \varphi(x_1, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n, a, a_1, \ldots, a_{m-1}) = 0,$$

$$p_k - \psi(x_1, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n, a, a_1, \ldots, a_{m-1}) = 0.$$

Nous allons démontrer que les premiers membres de ces équations satisfont à la condition

$$(p_i - \varphi,\ p_k - \psi) = 0.$$

En effet, en faisant

$$a = H,\ a_1 = H_1, \ldots,\ a_{m-1} = H_{m-1},$$

on a, par la formule (6),

$$[\varphi, \psi] = (\varphi, \psi) + \sum_{r=0}^{r=m-1} \left\{ (\varphi, a_r) \frac{\partial \psi}{\partial a_r} - (\psi, a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} \right\} + \Sigma_{r,s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_r} \frac{\partial \psi}{\partial a_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_s} \frac{\partial \psi}{\partial a_r} \right) (a_r, a_s).$$

Mais, par la substitution des valeurs de $a, \ldots, a_{m-1}$, le premier membre et le dernier terme du second membre de cette égalité se réduisent à zéro; donc

$$(\alpha) \qquad (\varphi, \psi) + \sum_{r=0}^{r=m-1} \left\{ (\varphi, a_r) \frac{\partial \psi}{\partial a_r} - (\psi, a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} \right\} = 0.$$

On a, de plus,

$$(\varphi, a) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial a}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial a}{\partial p_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial a}{\partial x_{m+1}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+2}} \frac{\partial a}{\partial x_{m+2}} - \ldots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial a}{\partial x_n},$$

. . . . . .

$$(\varphi, a_{m-1}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_{m+1}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+2}} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_{m+2}} - \ldots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_n}.$$

En ajoutant ces égalités, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\partial\psi}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial a_{m-1}}$, et mettant en facteurs communs, dans le second membre, les dérivées partielles de φ, on verra, absolument comme dans la démonstration du théorème précédent, que les multiplicateurs de $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}$ sont nuls, à l'exception du multiplicateur de $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$, qui est égal à l'unité. Les multiplicateurs de

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial p_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}$$

deviennent respectivement

$$-\frac{\partial\psi}{\partial p_{m+1}}, \ldots, -\frac{\partial\psi}{\partial p_n}, \quad -\frac{\partial\psi}{\partial x_{m+1}}, \ldots, -\frac{\partial\psi}{\partial x_n},$$

ce qui donne

$$\sum_{r=0}^{r=m-1}(\varphi, a_r)\frac{\partial\psi}{\partial a_r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial\psi}{\partial p_{m+1}} - \ldots - \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial\psi}{\partial p_n} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial\psi}{\partial x_{m+1}} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{\partial\psi}{\partial x_n}.$$

En changeant φ en ψ, k en i, et vice versa, il vient

$$\sum_{r=0}^{r=m-1}(\psi, a_r)\frac{\partial\varphi}{\partial a_r} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m+1}} - \ldots - \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial p_n} + \frac{\partial\psi}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{m+1}} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}.$$

Si l'on retranche ces égalités l'une de l'autre, on trouve

$$\sum_{r=0}^{r=m-1}\left\{(\varphi, a_r)\frac{\partial\psi}{\partial a_r} - (\psi, a_r)\frac{\partial\varphi}{\partial a_r}\right\} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i} - 2(\varphi, \psi).$$

En substituant le second membre de cette égalité au premier dans l'équation (α), nous aurons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i} - (\varphi, \psi) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(p_i - \varphi, p_k - \psi) = 0.$$

Chapitre V.

§. 18.

43. Les propositions démontrées dans les deux paragraphes précédents peuvent être considérées comme des lemmes auxiliaires. Ces lemmes étant établis, nous pourrons maintenant exposer, sans faire de digressions, la méthode de Jacobi pour l'intégration du système des équations (6) du §. 15, à la résolution duquel nous avons ramené notre problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Nous exposerons d'abord cette méthode, en nous servant seulement des théorèmes I et II du §. 17; puis nous ferons voir comment, à l'aide des théorèmes III et IV, on peut simplifier et compléter la théorie de ce problème.

44. En vertu de l'équation donnée aux dérivées partielles du premier ordre

$$H(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a,$$

il faut d'abord déterminer une équation de forme analogue

$$H_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_1,$$

dans laquelle a_1 désigne une constante arbitraire, et H_1 une fonction inconnue. Cette fonction doit être déterminée de manière à satisfaire à l'équation linéaire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (H_1, H) = \frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial x_1} + \ldots\ldots \\ + \frac{\partial H_1}{\partial x_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial H_1}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \right.$$

D'après cela, en prenant le système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires

$$(\alpha) \quad \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{-dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}},$$

et déterminant une de leurs intégrales

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{const.},$$

nous pourrons poser $H_1 = f_1$; et, en désignant par a_1 la constante arbitraire, nous aurons

$$H = a, \quad H_1 = f_1 = a_1.$$

45. On devra ensuite déterminer l'équation

$$H_2(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_2,$$

dans laquelle a_2 représente une constante arbitraire, et H_2 une fonction inconnue, qu'il faudra choisir de manière à satisfaire aux deux équations linéaires

$$(2) \qquad (H_2, H) = 0, \quad (H_2, f_1) = 0,$$

dont l'une est identique avec l'équation (1), et l'autre se déduit de (1) par le changement de H en f_1.

En s'appuyant sur le Théorème I (§. 17), Jacobi a démontré que, si l'on connaît l'intégrale de l'une des équations (2), on peut trouver la solution commune de ces deux équations, par l'intégration d'une équation linéaire auxiliaire où le nombre des variables est moindre que $2n$.

On commencera donc par déterminer une intégrale de l'une des équations (2). Si l'on prend une intégrale de la première, cette intégrale devra être différente des deux intégrales déjà connues $H = a$ et $f_1 = a_1$. Supposons que cette troisième intégrale soit

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{const.}$$

Par des substitutions successives dans le premier membre de la seconde des équations (2), on obtient les fonctions

$$(\beta) \qquad \begin{cases} (\varphi, f_1) = \varphi_1, \quad (\varphi_1, f_1) = \varphi_2, \quad (\varphi_2, f_1) = \varphi_3, \ldots \\ \qquad \ldots, \quad (\varphi_{i-1}, f_1) = \varphi_i, \ldots \end{cases}$$

Cette suite peut, en général, se prolonger indéfiniment; mais si le résultat d'une de ces substitutions, φ_i par exemple, est égal à une constante, la suite s'arrêtera à ce terme.

Nous allons démontrer que les fonctions φ_1, φ_2, φ_3, .. satisfont toutes à la première des équations (2). Pour cela, prenons l'identité donnée par le Théorème I,

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0,$$

et posons $A = H$, $B = f_1$. Alors cette identité prendra la forme

$$[H, (f_1, C)] + [f_1, (C, H)] = 0.$$

En faisant maintenant tour à tour

$$C = \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots,$$

on trouve successivement les identités

$$[H, (f_1, \varphi)] = (H, \varphi_1) = 0,$$
$$[H, (f_1, \varphi_1)] = (H, \varphi_2) = 0,$$
$$[H, (f_1, \varphi_2)] = (H, \varphi_3) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui démontrent le théorème.

46. De là résulte, comme conséquence évidente, une conclusion très-importante, relative aux intégrales du système des équations (α), et qui est connue sous le nom de **théorème de Poisson.**

Si l'on pose, en effet,

$$\varphi_1 = \text{const.}, \quad \varphi_2 = \text{const.}, \quad \varphi_3 = \text{const.}, \ldots,$$

on obtiendra des intégrales des équations (α) (§. 9). Par suite, connaissant deux intégrales de ces équations,

$$f_1 = \text{const.}, \quad \varphi = \text{const.},$$

distinctes de $H = \text{const.}$, nous en obtiendrons une troisième en posant

$$(f_1, \varphi) = \text{const},$$

puis une quatrième en posant

$$[f_1, (f_1, \varphi)] = \text{const.},$$

et ainsi de suite.

Pour ne pas nous écarter de notre objet principal, nous nous bornerons ici à ces remarques, nous réservant de revenir plus tard sur le théorème de Poisson.

47. Comme les équations (α) n'ont que $2n - 1$ intégrales distinctes, il s'ensuit de là qu'en prolongeant indéfiniment la suite (β), on ne pourra obtenir toujours des fonctions distinctes, et qu'on devra nécessairement finir par rencontrer une fonction qui soit elle-même une fonction des intégrales déjà trouvées. Soit φ_i la première fonction qui soit dans ce cas, i devant être $< 2n$. Posons

$$\varphi_i = F(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}).$$

Il serait inutile de prolonger la suite (β) au delà de la fonction φ_i, puisque de cette manière on n'obtiendrait pas de nouvelles intégrales. En effet, par la formule (8) du §. 16 (art. 37), on a

$$\varphi_{i+1} = [F, f_1]$$

$$= (H, f_1)\frac{\partial F}{\partial H} + (f_1, f_1)\frac{\partial F}{\partial f_1} + (\varphi, f_1)\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \ldots$$

$$+ (\varphi_{i-1}, f_1)\frac{\partial F}{\partial \varphi_{i-1}}$$

$$= 0 + 0 + \varphi_1\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \ldots + F(H, f_1, \varphi, .., \varphi_{i-1})\frac{\partial F}{\partial \varphi_{i-1}},$$

d'où il résulte évidemment que φ_{i+1} s'exprime au moyen des seules variables $H, f_1, \varphi, \ldots, \varphi_{i-1}$.

48. Proposons-nous maintenant de trouver, s'il est possible, une fonction des intégrales déjà obtenues $H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$ telle que, substituée à la place de H_2, elle satisfasse aux équations (2). En désignant par f_2 la fonction cherchée, et posant

$$H_2 = f_2(H, f_1, \varphi, \varphi_1 \ldots, \varphi_{i-1}),$$

on trouve que, en vertu de la formule (8) du §. 16. (art. 37), les premiers membres des équations (2) prennent la forme

$$(f_2, H) = (H, H)\frac{\partial f_2}{\partial H} + (f_1, H)\frac{\partial f_2}{\partial f_1} + (\varphi, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}$$

$$+ (\varphi_1, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \ldots + (\varphi_{i-1}, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}},$$

$$(f_2, f_1) = (H, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial H} + (f_1, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial f_1} + (\varphi, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}$$

$$+ (\varphi_1, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \ldots + (\varphi_{i-1}, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}},$$

et, comme on a identiquement

$$(H, H) = 0, \quad (f_1, H) = 0, \quad (\varphi, H) = 0,$$

$$(\varphi_1, H) = 0, \ldots, \quad (\varphi_{i-1}, H) = 0,$$

$$(H, f_1) = 0, \quad (f_1, f_1) = 0, \quad (\varphi, f_1) = \varphi_1,$$

$$(\varphi_1, f_1) = \varphi_2, \ldots, \quad (\varphi_{i-1}, f_1) = \varphi_i,$$

l'équation $(H_2, H) = 0$ sera satisfaite pour $H_2 = f_2$, quelle que soit la fonction f_2, comme on pouvait d'ailleurs le prévoir.

L'équation $(H_2, f_1)=0$ se transforme, par ces substitutions, en cette autre équation linéaire

$$(\gamma)\quad \left\{ \varphi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \ldots + \varphi_{i-1} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-2}} + F(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}} = 0, \right.$$

renfermant seulement les nouvelles variables $H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$, et d'où les anciennes variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ sont éliminées.

Dans l'équation (γ), H et f_1 pourront être considérées comme des constantes, puisque cette équation ne contient pas les dérivées partielles prises par rapport à ces variables. On peut donc, dans la fonction F, remplacer H et f_1 respectivement par a et a_1.

Il nous suffira de déterminer une intégrale particulière de l'équation (γ), ou une des intégrales du système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires

$$\frac{d\varphi}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \ldots = \frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}} = \frac{d\varphi_{i-1}}{F(a, a_1, \varphi, \ldots, \varphi_{i-1})},$$

que l'on peut remplacer par une seule équation aux différentielles ordinaires d'ordre $i-1$. Si l'on introduit une nouvelle variable auxiliaire τ, en égalant à $d\tau$ la valeur commune des rapports précédents, ce système pourra être remplacé par une équation différentielle ordinaire d'ordre i, mais d'une forme comparativement plus simple.

En effet, si l'on pose

$$d\tau = \frac{d\varphi}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_3} = \ldots = \frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}} = \frac{d\varphi_{i-1}}{F},$$

il vient

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varphi_1, \quad \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \varphi_2, \quad \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \frac{d^3\varphi}{d\tau^3} = \varphi_3,$$

$$\ldots, \quad \frac{d\varphi_{i-2}}{d\tau} = \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}},$$

$$\frac{d\varphi_{i-1}}{d\tau} = \frac{d^i\varphi}{d\tau^i} = F(a, a_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}),$$

d'où, en substituant, dans la dernière équation, à $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$ leurs valeurs tirées des précédentes, on tire l'équation aux différentielles ordinaires, d'ordre i, que nous avons annoncée plus haut,

$$\frac{d^i\varphi}{d\tau^i} = F\left(a,\ a_1,\ \varphi,\ \frac{d\varphi}{d\tau},\ldots,\ \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}\right).$$

Supposons qu'une des intégrales premières de cette dernière équation soit

$$\Phi\left(\varphi, \frac{d\varphi}{d\tau},\ldots,\ \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}\right) = \text{const.}$$

Si l'on y substitue pour $\frac{d\varphi}{d\tau},\ldots,\ \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}$ leurs valeurs, il vient

$$\Phi(\varphi,\ \varphi_1,\ldots,\ \varphi_{i-1}) = \text{const.},$$

et l'on pourra poser $f_2 = \Phi$. En désignant maintenant par a_2 la constante arbitraire, on aura déjà les trois équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$H = a,\quad H_1 = f_1 = a_1,\quad H_2 = f_2 = a_2,$$

satisfaisant aux conditions voulues.

* 49. **Remarque I.** Si dans la série des fonctions $\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_i$, la dernière φ_i est $= 0$, il est évident que l'avant dernière φ_{i-1} sera l'intégrale cherchée, commune aux équations (2).

Si φ_i est égale à une constante K, alors la solution se simplifie, puisqu'on a, dans ce cas,

$$\frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}} = \frac{d\varphi_{i-1}}{K},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$2K\varphi_{i-2} - \varphi_{i-1}{}^2 = \text{const.},$$

et par suite

$$f_2 = 2K\varphi_{i-2} - \varphi_{i-1}{}^2 = a_2.$$

Mais dans ce cas il faut que i soit plus grand que 1; car autrement la méthode précédente pour déterminer f_2 ne serait plus applicable. Supposons, en effet, $\varphi_1 = K$, K étant une constante donnée ou une fonction de φ; alors l'équation (γ) prend la forme

$$K\,\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0,$$

ce qui montre qu'aucune fonction de la seule quantité φ ne peut être une intégrale commune des deux équations simultanées (2).

En pareil cas, il faut commencer par déterminer une intégrale de la seconde des équations (2),

$$(H_2, f_1) = 0;$$

ou bien déterminer une intégrale

$$\theta(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{const.}$$

de la première équation (2), différente des intégrales $H = a$, $f_1 = a_1$ et $\varphi =$ const.; ou encore suivre la méthode que nous exposerons plus bas.

Si l'intégrale $\theta =$ const. se trouvait dans le même cas que l'intégrale $\varphi =$ const., c'est-à-dire, si l'on avait les deux identités

$$(\varphi, f_1) = K, \quad (\theta, f_1) = L,$$

K et L étant des constantes, ou des fonctions quelconques de φ et de θ respectivement, alors la valeur de H_2 s'obtiendrait très-simplement. Si l'on pose, en effet,

$$H_2 = f_2(\varphi, \theta),$$

on trouve que les premiers membres des équations (2) prennent la forme

$$[f_2, H] = (\varphi, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (\theta, H)\frac{\partial f_2}{\partial \theta},$$

$$[f_2, f_1] = (\varphi, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (\theta, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \theta};$$

mais, comme on a les identités

$$(\varphi, H) = 0, \quad (\theta, H) = 0, \quad (\varphi, f_1) = K, \quad (\theta, f_1) = L,$$

la première des équations (2) est alors satisfaite par une forme quelconque de la fonction f_2, et la seconde de ces équations prend la forme

$$K\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + L\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0,$$

d'où l'on tire

$$f_2 = \pi\left(\int \frac{d\varphi}{K} - \int \frac{d\theta}{L}\right),$$

π désignant une fonction arbitraire.

50. Au moyen des trois équations connues

$$H = a, \quad H_1 = f_1 = a_1, \quad H_2 = f_2 = a_2,$$

on en déterminera une quatrième $H_3 = a_3$, a_3 désignant une constante arbitraire, et la fonction H_3 devant être calculée de manière à satisfaire aux trois équations linéaires simultanées

$$(3) \qquad (H_3, H) = 0, \quad (H_3, f_1) = 0, \quad (H_3, f_2) = 0.$$

Cherchons, d'après la méthode que nous venons d'exposer, une intégrale commune à deux de ces équations, aux deux premières, par exemple. Il suffira pour cela de déterminer une autre intégrale première de l'équation $\frac{d^i\varphi}{d\tau^i} = F$, différente de $\Phi = \text{const.}$ Représentons cette intégrale par

$$H_3 = \psi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n);$$

il s'agit d'en déduire une intégrale commune du système des trois équations (3).

Pour cela, par des substitutions successives dans le premier membre de l'équation $(H_3, f_2) = 0$, formons les expressions

$$(\psi, f_2) = \psi_1, \ (\psi_1, f_2) = \psi_2, \ (\psi_2, f_2) = \psi_3, \ldots, \ (\psi_{k-1}, f_2) = \psi_k, \ldots,$$

Dans la suite des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_k, \ldots$, on devra finir par en rencontrer une qui s'exprime au moyen des précédentes. Soit

$$\psi_k = \mathrm{f}(\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k-1})$$

la première des fonctions qui soit dans ce cas.

On verra, absolument comme on l'a fait plus haut, que ψ_1, $\psi_2, \ldots$ sont des intégrales des deux premières équations (3). Car si, dans l'identité

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0,$$

on prend d'abord $A = H$, $B = f_2$, puis $A = f_1$, $B = f_2$, on aura les deux autres identités

$$[H, (f_2, C)] + [f_2, (C, H)] = 0,$$

$$[f_1, (f_2, C)] + [f_2, (C, f_1)] = 0.$$

En y faisant successivement

$$C = \psi, \ \psi_1, \ \psi_2, \ldots, \ \psi_{k-1},$$

on obtient les deux suites d'identités

$$[H, (f_2, \psi)] = (\psi_1, H) \pm 0, \quad [H, (f_2, \psi_1)] = (\psi_2, H) = 0, \ldots,$$

$$[f_1, (f_2, \psi)] = (\psi_1, f_1) = 0, \quad [f_1, (f_2, \psi_1)] = (\psi_2, f_1) = 0, \ldots,$$

qui démontrent le théorème.

Il faut ensuite chercher une fonction f_3 des variables H, f_1, f_2, ψ, $\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}$, qui, mise à la place de H_3, satisfasse à toutes les trois équations (3).

Or on vérifie aisément, comme au n° 48, que les deux premières de ces équations sont satisfaites, quelle que soit la forme de la fonction f_3. Quant à la troisième équation (3), en y faisant $H_3 = f_3$, elle se change dans l'équation linéaire suivante,

$$\psi_1 \frac{\partial f_3}{\partial \psi} + \psi_2 \frac{\partial f_3}{\partial \psi_1} + \ldots + \mathrm{f}(\psi, \psi, \ldots, \psi_{k-1}) \frac{\partial f_3}{\partial \psi_{k-1}} = 0,$$

qui ne renferme que les variables ψ, $\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}$. Si la fonction f renfermait les variables H, f_1, f_2, on pourrait les remplacer respectivement par les constantes a, a_1, a_2, puisque l'équation ne contient pas de dérivées partielles prises par rapport à H, f_1 ou f_2.

Ainsi la fonction f_3 doit être déterminée comme une intégrale particulière de l'équation linéaire précédente, ou comme une des intégrales du système d'équations simultanées

$$d\sigma = \frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = \ldots = \frac{d\psi_{k-1}}{\mathrm{f}},$$

σ désignant une variable auxiliaire: ce qui conduit finalement à la recherche d'une des intégrales premières de l'équation d'ordre k, à deux variables,

$$\frac{d^k\psi}{d\sigma^k} = \mathrm{f}\left(\psi, \frac{d\psi}{d\sigma}, \ldots, \frac{d^{k-1}\psi}{d\sigma^{k-1}}\right).$$

Si cette intégrale est

$$\Psi\left(\psi, \frac{d\psi}{d\sigma}, \ldots, \frac{d^{k-1}\psi}{d\sigma^{k-1}}\right) = \text{const.},$$

en y substituant les valeurs $\frac{d\psi}{d\sigma} = \psi_1, \ldots, \frac{d^{k-1}\psi}{d\sigma^{k-1}} = \psi_{k-1}$, nous pourrons poser

$$f_3 = \Psi(\psi, \psi_1, \ldots, \psi_{k-1}) = \text{const.} = a_3.$$

Ainsi, nous connaissons déjà quatre équations

$$H=a,\quad H_1=f_1=a_1,\quad H_2=f_2=a_2,\quad H_3=f_3=a_3,$$

satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3).

51. **Remarque** 2. Il faut observer ici que, si le résultat de la première substitution (ψ, f_1) ou ψ_1 est une fonction de ψ ou une constante quelconque différente de zéro, la méthode précédente pour la détermination de f_3 se trouvera en défaut, comme dans le cas dont il a été question dans la Remarque 1 (n° 49), relativement à la détermination de la fonction f_2.

52. Nous avons maintenant suffisamment expliqué la marche à suivre pour déterminer successivement, au moyen de la fonction donnée H, les fonctions $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$, satisfaisant aux conditions $(H_i, H_k)=0$. Ces fonctions étant obtenues, il ne reste plus qu'à tirer algébriquement des équations

$$H=a,\quad H_1=a_1,\ldots,\quad H_{n-1}=a_{n-1}$$

les valeurs de $p_1,\ldots, p_n$. En substituant ces valeurs dans l'équation différentielle

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n,$$

on pourra toujours intégrer cette équation, puisque les fonctions $p_1,\ldots, p_n$ doivent remplir, en vertu du Théorème II, les conditions d'intégrabilité, et l'on obtiendra l'intégrale complète du problème sous la forme

$$z=f(x_1,\ldots, x_n, a, a_1,\ldots, a_{n-1})+a_n.$$

53. Voulant présenter l'essence de la méthode de Jacobi sous la forme la plus simple, nous l'avons développée en prenant pour base les Théorèmes I et II. Mais, dans ce mode d'exposition, nous avons rencontré des cas où la méthode est en défaut, et que nous avons signalés dans les Remarques 1 et 2. En outre, les équations dont l'intégration fait connaître les fonctions cherchées ne sont pas encore ramenées à leur forme la plus simple, par l'élimination des variables superflues. Nous montrerons, dans la suite, qu'en faisant usage des Théorèmes III et IV, nous ne rencontrerons plus de cas où la méthode soit en défaut, et que les équations à intégrer pourront être ramenées à ne plus contenir que le nombre minimum de variables. Mais auparavant nous pensons qu'il ne sera pas inutile d'appliquer la méthode de Jacobi, sous la forme que nous venons d'exposer, à quelques exemples d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, de forme facilement intégrable.

§. 19.

54. On voit par ce qui précède que l'essence et la principale difficulté du problème de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$H(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$

consistent dans la détermination de $n-1$ intégrales particulières distinctes,

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \ldots, \quad H_{n-1} = a_{n-1},$$

de l'équation linéaire $(H, \psi) = 0$, lesquelles, prises deux à deux, doivent, en outre, satisfaire à la condition

$$(H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs de i et de k prises dans la suite des nombres $0, 1, \ldots, n-1$.

En conséquence, les formes plus ou moins faciles à intégrer de l'équation $H = a$ sont celles d'où l'on peut tirer immédiatement, c'est-à-dire sans aucune intégration, la totalité ou seulement une partie du système des équations $H_1 = a_1, \ldots, H_{n-1} = a_{n-1}$, qui satisfont à la proposée.

D'après les considérations générales que nous avons présentées plus haut, il est aisé de voir que, sous le rapport de la facilité de l'intégration, l'avantage appartient, dans le cas des équations aux dérivées partielles du premier ordre comme dans celui des équations différentielles ordinaires, aux formes dans lesquelles les variables peuvent être *séparées*. Mais il est clair que, pour les équations aux dérivées partielles, l'expression „séparation des variables" doit avoir une signification autre et plus générale que pour les équations à une seule variable indépendante.

55. Supposons que l'équation aux dérivées partielles du premier ordre proposée soit de la forme

$$H(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) = a,$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ désignant des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, qui satisfont à la condition

$$(\alpha) \qquad (\varphi_r, \varphi_s) = 0,$$

pour toutes les valeurs de r, s prises dans la suite des nombres $1, 2, \ldots, m$.

Examinons à quelles conditions, outre celle-là, doivent satisfaire les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, pour que, dans l'intégration de l'équation donnée, on puisse les considérer comme des constantes. Pour cela, concevons que, en appliquant la méthode de Jacobi, nous ayons trouvé une partie du système des équations qui satisfont à la proposée,

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \ldots, \quad H_l = a_l, \quad (l < n)$$

les fonctions $H_1, \ldots, H_l$ ne renfermant pas les constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_l$, mais pouvant contenir $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$; et que, en considérant ces dernières quantités comme des constantes, les fonctions $H_1, \ldots, H_l$ soient supposées satisfaire à la condition

$$(H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs de i et de k, prises dans la suite $0, 1, 2, \ldots, l$.

En considérant maintenant de nouveau $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ comme des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, on trouve que le premier membre de l'équation qui exprime la condition précédente prend, en vertu de la formule (5) du §. 16. (Chap. IV, art. 36), la forme

$$[H_i, H_k] = (H_i, H_k) + \sum_{r=1}^{r=m} \left\{ (H_i, \varphi_r) \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_r} - (H_k, \varphi_r) \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_r} \right\} + \sum_{r,s} \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_r} \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_s} - \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_s} \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_r} \right\} (\varphi_r, \varphi_s).$$

Le premier et le troisième terme du second membre de cette égalité sont nuls, en vertu des conditions précédentes. Pour que le second terme se réduise aussi à zéro, il est évident que les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ doivent encore satisfaire à la condition

$$(\beta) \qquad (H_i, \varphi_r) = 0$$

pour toutes les valeurs des indices

$$i = 0, 1, 2, \ldots, l, \quad r = 1; 2, \ldots, m.$$

56. Remarquons maintenant que, si dans l'équation donnée on reconnaît la présence de fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, remplissant les conditions (α) et celles des conditions (β) qui correspondent à l'indice $i = 0$, c'est-à-dire les conditions

$$(H, \varphi_1) = 0, \quad (H, \varphi_2) = 0, \ldots, \quad (H, \varphi_m) = 0,$$

alors, pour satisfaire au reste des conditions (β) il suffira de prendre

$$H_1 = \psi_1(\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_m) = a_1, .., \quad H_l = \psi_l(\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_m) = a_l,$$

$\psi_1, \ldots, \psi_l$ désignant des fonctions assujetties à cette seule condition, que du système des équations précédentes on ne puisse tirer aucune relation entre les seules quantités $H_1, .., H_l$, ou, ce qui est la même chose, entre $a_1, .., a_l$. Mais il est évident que cela sera toujours possible, si $l < m$. Par conséquent, le nombre des équations satisfaisant à l'équation donnée, qui peuvent être déterminées de cette manière doit être égal ou inférieur à m.

Si m n'est pas plus grand que $n-1$, et que toutes les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ contiennent réellement les variables $p_1, \ldots, p_n$, et avec cela soient distinctes et indépendantes par rapport à ces variables, alors, il est beaucoup plus simple de poser

$$H_1 = \varphi_1 = a_1, \ldots, \quad H_m = \varphi_m = a_m.$$

57. Quant au moyen de découvrir, pour une équation donnée, l'existence de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessus, on ne peut donner pour cela de règle générale. Toutefois il y a un cas où l'existence de ces fonctions devient évidente, et où par conséquent la méthode précédente peut s'appliquer sans difficulté.

Supposons l'équation donnée mise sous la forme

$$H(x_1, \ldots, x_{i-1}, p_1, \ldots, p_{i-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0,$$

la fonction H ne contenant explicitement que les variables x_1, $p_1, .., x_{i-1}, p_{i-1}$; la fonction φ_1 ne contenant que les variables $x_i, p_i, .., x_{i+k-1}, p_{i+k-1}; \ldots$; la fonction φ_m ne contenant que les variables $x_{i+k+\ldots+l}, p_{i+k+\ldots+l}, .., x_n, p_n$. On peut dire alors que dans cette équation les variables sont **séparées**. Dans ce cas, il est évident que les conditions

$$(H, \varphi_r) = 0, \quad (\varphi_r, \varphi_s) = 0$$

sont satisfaites pour toutes les valeurs 1, 2, ..., m des indices r et s. D'après cela, en vertu des conclusions précédentes, au lieu de l'équation donnée, on peut intégrer séparément chacune des équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$H(x_1, .., x_{i-1}, p_1, .., p_{i-1}, a_1, .., a_m) = a,$$

$$\varphi_1 = a_1, .., \quad \varphi_m = a_m,$$

$a_1, .., a_m$ désignant des constantes arbitraires. Si les intégrales complètes de ces équations sont respectivement

$$z_0 + \alpha_0,\ z_1 + \alpha_1, \ldots,\ z_m + \alpha_m,$$

l'intégrale complète de l'équation donnée sera égale à leur somme

$$z_0 + z_1 + \ldots + z_m + \alpha = z + \alpha,$$

α étant la somme des constantes arbitraires α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, introduites par simple addition. En effet, il est facile de s'assurer que cette intégrale satisfait à l'équation proposée, et qu'elle renferme n constantes arbitraires.

58. Remarquons que, si une des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ne renferme qu'une couple de variables correspondantes, telles que x_i et p_i, en égalant alors cette fonction à une constante arbitraire a_i, et tirant de cette équation la valeur de p_i en x_i et a_i, on en déduira l'intégrale z_i au moyen d'une quadrature.

Si une des variables, x_k par exemple, n'entre pas explicitement dans l'équation donnée, on a alors l'équation $p_k = a_k$, à laquelle correspond l'intégrale

$$z_k = a_k x_k.$$

D'après cela, les intégrales complètes des équations

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = f\left(\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}\right),$$

et

$$\varphi_n\left(x_n \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = F\left\{\varphi_1\left(x_1, \frac{\partial z}{\partial x_1}\right), \varphi_2\left(x_2, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right), \ldots, \varphi_{n-1}\left(x_{n-1}, \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}\right)\right\}$$

peuvent s'obtenir sans particulariser la forme des fonctions f et F, et il est évident qu'elles sont respectivement

$$z + \alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + f(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot x_n,$$

et

$$z + \beta = \int \psi_1(a_1, x_1)\, dx_1 + \int \psi_2(a_2, x_2)\, dx_2 + \ldots$$
$$+ \int \psi_{n-1}(a_{n-1}, x_{n-1})\, dx_{n-1} + \int \psi_n [F(a_1, \ldots, a_{n-1}), x_n]\, dx_n,$$

$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ étant les valeurs respectives de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tirées des équations

$$\varphi_1 = a_1,\ \varphi_2 = a_2, \ldots,\ \varphi_n = F(a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

59. Soit l'équation

$$z = F\left(\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right).$$

Si l'on représente son intégrale par l'équation

$$v(x_1, \ldots, x_n, z) = 0,$$

on en tirera

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{p_1}{p_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{p_n}{p_{n+1}},$$

en posant

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = p_{n+1}.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation donnée prend la forme

$$z = F\left(-\frac{p_1}{p_{n+1}}, -\frac{p_2}{p_{n+1}}, \ldots, -\frac{p_n}{p_{n+1}}\right),$$

dans laquelle les variables sont maintenant séparées. Par conséquent, l'intégrale de l'équation transformée sera donnée par la somme des intégrales des équations aux différentielles ordinaires

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_2, \ldots, \quad p_n = a_n, \quad z = F\left(-\frac{a_1}{p_{n+1}}, \ldots, -\frac{a_n}{p_{n+1}}\right).$$

La dernière équation, en particulier, s'intègre simplement, lorsque la fonction F est homogène du degré μ par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$; elle prend alors la forme

$$z = \frac{(-1)^\mu}{p_{n+1}^{\mu}} F(a_1, \ldots, a_n),$$

d'où

$$p_{n+1} = -[F(a_1, \ldots, a_n)]^{\frac{1}{\mu}} \cdot z^{-\frac{1}{\mu}}.$$

Par suite, l'intégrale complète de l'équation transformée devient

$$v + \alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n - \frac{\mu}{\mu - 1}[F(a_1, \ldots, a_n)]^{\frac{1}{\mu}} \cdot z^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

En égalant le second membre à zéro, on en tire, pour la valeur de z qui satisfait à l'équation proposée,

$$z = \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} \cdot \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{[F(a_1, a_2, \ldots, a_n)]^{\frac{1}{\mu-1}}}.$$

60. Considérons un cas plus général. Soit l'équation

$$z = F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right),$$

F désignant une fonction homogène du degré μ par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$. A l'aide de la transformation précédente, et en conservant les mêmes notations, l'équation donnée prend la forme

$$z p_{n+1}{}^{\mu} = (-1)^{\mu} F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n).$$

Le problème se ramène donc à l'intégration des deux équations

$$z p_{n+1}{}^{\mu} = (-1)^{\mu} A, \qquad F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = A.$$

L'intégrale de la première de ces deux équations est

$$v' + \alpha' = -\frac{\mu}{\mu - 1} A^{\frac{1}{\mu}} z^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Désignons l'intégrale de la seconde par

$$v'' + \alpha'' = F(x_1, \ldots, x_n, A, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

L'intégrale de l'équation transformée sera, d'après cela,

$$v + \alpha = F(x_1, \ldots, x_n, A, a_1, \ldots a_{n-1}) - \frac{\mu}{\mu - 1} A^{\frac{1}{\mu}} z^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

d'où l'on tire enfin l'intégrale de l'équation proposée,

$$z = \frac{\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{A^{\frac{1}{\mu-1}}} \cdot [F(x_1, \ldots, x_n, A, a_1, \ldots, a_{n-1})]^{\frac{\mu}{\mu-1}}.$$

Comme exemple de ce cas, prenons l'équation

$$z = \frac{1}{x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) + x_2{}^2 x_3 \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2,$$

qui, après la transformation, prend la forme

$$z p_4{}^2 = \frac{p_1{}^2}{x_1} + x_2 p_2 \left(\frac{p_1}{x_1} + p_3\right) + x_2{}^2 x_3 p_2{}^2.$$

Ici nous remarquons d'abord que les couples de variables correspondantes z et p_4, x_2 et p_2 sont séparées; le problème se ramène donc à l'intégration des équations

$$z p_4{}^2 = a, \quad x_2 p_2 = b, \quad \frac{p_1{}^2}{x_1} + \frac{b}{x_1} p_1 + b p_3 + b^2 x_3 = a.$$

Or il est évident que, dans la dernière équation, les variables x_1 et p_1, x_3 et p_3 sont également séparées. Nous avons donc à intégrer les quatre équations différentielles ordinaires

$$zp_4^2 = a, \quad x_2p_2 = b, \quad \frac{p_1^2}{x_1} + \frac{b}{x_1}p = c, \quad bp_3 + b^2x_3 = a - c,$$

dont les intégrales sont respectivement

$$\begin{aligned} v' + \alpha' &= \pm 2a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}, \\ v'' + \alpha'' &= b\log x_2, \\ v''' + \alpha''' &= -\frac{bx_1}{2} \pm \frac{2}{3c}\left(\frac{b^2}{4} + cx_1\right)^{\frac{3}{2}}, \\ v'''' + \alpha'''' &= \frac{(a-c)x_3}{b} - \frac{bx_3^2}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'intégrale complète de l'équation transformée sera

$$\begin{aligned} v + \alpha = &-\frac{bx_1}{2} \pm \frac{2}{3c}\left(\frac{b^2}{4} + cx_1\right)^{\frac{3}{2}} + b\log x_2 + \frac{(a-c)x_3}{b} \\ &- \frac{bx_3^2}{2} \pm 2a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Enfin, en égalant à zéro le second membre de cette équation, nous aurons l'intégrale complète de l'équation proposée.

61. Dans les exemples précédents, la solution complète s'obtenait au moyen de la seule séparation des variables. Maintenant il ne sera pas inutile de traiter un cas dans lequel l'application de ce procédé, quoique simplifiant le problème et donnant une partie de sa solution, ne dispense pas toutefois, si l'on veut obtenir l'intégrale complète, de recourir nécessairement à la méthode de Jacobi.

Soit donnée l'équation

$$\begin{aligned} H = &\left(x_2\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} - \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_4}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} - \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_5} + x_4\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_5} + x_6\right)\frac{\partial z}{\partial x_3}\frac{\partial z}{\partial x_6} = a. \end{aligned}$$

Cette équation renferme six variables indépendantes $x_1, \ldots, x_6$, et ne contient pas la fonction inconnue z elle-même, mais seulement ses dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_6}$. En désignant celles-ci respectivement par $p_1, \ldots, p_6$, et n'introduisant pas d'autre changement dans la forme de l'équation proposée, cette équation deviendra

$$(x_2p_1+x_1p_2)x_3+p_3(p_1-p_2)[p_4^2+(p_5+x_4)(p_5+x_6)p_6]=a.$$

Maintenant il est évident que les variables x_1, p_1, x_2, p_2, x_3, p_3, d'une part, et d'autre part x_4, p_4, x_5, p_5, x_6, p_6 sont séparées. En égalant à une constante arbitraire α l'expression entre crochets, qui est formée avec le second groupe de variables, on ramène le problème à l'intégration des deux équations

$$p_4^2+(p_5+x_4)(p_5+x_6)p_6=\alpha,$$
$$(x_2p_1+x_1p_2)x_3+\alpha p_3(p_1-p_2)=a.$$

La première de ces équations s'intègre très-simplement au moyen de la séparation des variables. En effet, remarquons d'abord que la variable indépendante x_5 n'y entre pas explicitement; posons par conséquent

$$p_5=\beta;$$

l'équation prendra la forme

$$p_4^2+(\beta+x_4)(\beta+x_6)p_6=\alpha.$$

Il est évident maintenant que les deux couples de variables x_4 et p_4, x_6 et p_6 sont séparées. En posant donc

$$(\beta+x_6)p_6=\gamma,$$

il vient

$$p_4^2+\gamma(\beta+x_4)=\alpha,$$

et l'on en tire

$$p_6=\frac{\gamma}{\beta+x_6},\qquad p_4=\sqrt{\alpha-\beta\gamma-\gamma x_4};$$

par suite,

$$p_4dx_4+p_5dx_5+p_6dx_6=\sqrt{\alpha-\beta\gamma-\gamma x_4}\cdot dx_4+\beta dx_5+\frac{\gamma dx_6}{\beta+x_6},$$

d'où l'on tire, par l'intégration, la fonction cherchée

$$z'+A'=\frac{2}{3\gamma}(\alpha-\beta\gamma-\gamma x_4)^{\frac{3}{2}}+\beta x_5+\log(\beta+x_6)^{\gamma}.$$

62. Passons à l'intégration de la seconde des équations précédentes,

$$H=(x_2p_1+x_1p_2)x_3+\alpha p_3(p_1-p_2)=a.$$

Ici l'on n'aperçoit pas la possibilité de séparer les variables. Nous prendrons donc la méthode générale de Jacobi, pour trouver deux fonctions H_1, H_2 des variables x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3.

D'abord nous chercherons une fonction H_1 satisfaisant à l'équation linéaire

$$(H, H_1) = \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial H_1}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial H_1}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial H_1}{\partial p_3} - \frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_3} = 0;$$

puis une autre fonction H_2 satisfaisant aux deux équations simultanées, de même forme que la précédente,

$$(m) \qquad (H, H_2) = 0, \quad (H_1, H_2) = 0.$$

D'après cela, la fonction H_1 devra être déterminée comme une des intégrales du système d'équations simultanées

$$(n) \quad \frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial H}{\partial x_3}} = \frac{-dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{-dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{-dx_3}{\frac{\partial H}{\partial p_3}},$$

lesquelles, par la substitution de la valeur donnée de H, prennent la forme

$$\frac{dp_1}{x_3 p_2} = \frac{dp_2}{x_3 p_1} = \frac{dp_3}{x_2 p_1 + x_1 p_2} = \frac{-dx_1}{x_2 x_3 + \alpha p_3} = \frac{-dx_2}{x_1 x_3 - \alpha p_3} = \frac{-dx_3}{\alpha(p_1 - p_2)}.$$

D'après une propriété connue des rapports égaux, le premier et le second, le quatrième et le cinquième rapport du système précédent donnent l'équation

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2} = -\frac{d(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2},$$

dont l'intégrale est

$$(x_1 + x_2)(p_1 + p_2) = \text{const.}$$

On peut donc poser

$$H_1 = (x_1 + x_2)(p_1 + p_2).$$

63. Il faut ensuite déterminer la fonction H_2 satisfaisant simultanément aux deux équations (m). Pour ce calcul, il est commode de s'aider du tableau suivant:

[illegible]	φ	ψ	θ	θ'
[illegible]	[illegible]	0	0	0
[illegible]	[illegible]	α	1	$-x_3$
[illegible]	[illegible]	0	0	0
[illegible]	[illegible]	$-\alpha$	-1	x_3
[illegible]	[illegible]	$-x_2$	0	p_2-p_1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0

[illegible] $(H_1, \theta')=0$.
[illegible] $(H, \theta')=\theta''$
[illegible] $=(p_1-p_2)x_3$
[illegible] $+\alpha(p_1-p_2)$
[illegible] $=\frac{\theta'^2}{\theta}+\alpha\theta'$

[illegible] des différentes colon- [illegible] entrent dans le calcul, et [illegible] se trouvent les dérivées partielles [illegible] $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial p_1}$, ..., inscrites à gauche [illegible] par rapport à laquelle est prise [illegible] bas de chaque colonne, nous avons [illegible] combinaisons de la forme (A, B) de la [illegible] à cette colonne avec les fonctions préce- [illegible] pour le calcul de ces combinaisons [illegible] commode.

[illegible] il faut commencer le calcul de H_2 par [illegible] de l'une des deux équations (n). Si [illegible] première de ces équations, il faudra dé- [illegible] du système (n), autre que $H_1=\text{const}$ [illegible] second rapport de ce système fournissent l'é-

$$\frac{dp_1}{p_2}=\frac{dp_2}{p_1},$$

$$\varphi = \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2} = \text{const.}$$

Au moyen du premier, du second et du dernier rapport du système (n), nous avons l'équation

$$\frac{d(p_1 - p_2)}{-x_3(p_1 - p_2)} = -\frac{dx_3}{\alpha(p_1 - p_2)},$$

ou

$$\alpha d(p_1 - p_2) = x_3 dx_3,$$

dont l'intégrale est

$$\psi = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2} = \text{const.}$$

64. Le tableau précédent montre que l'intégrale φ ne peut fournir la valeur de H_2, parce que le résultat de la substitution dans (H_1, φ) n'est pas égal à zéro, et que, ce résultat étant une fonction de φ, alors en vertu de la Remarque 1 du §. 18 (art. 49), la fonction φ ne peut servir pour le calcul de H_2, lorsqu'on a déjà choisi la valeur de H_1.

On voit par le même tableau que l'intégrale ψ satisfait aux deux équations simultanées (m); on peut donc prendre $H_2 = \psi$.

En égalant les valeurs trouvées pour H_1 et pour H_2 respectivement à des constantes arbitraires b et c, on aura, au lieu de l'équation donnée, les trois équations

$$H = (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + \alpha p_3 (p_1 - p_2) = a,$$
$$H_1 = (x_1 + x)(p_1 + p) = b,$$
$$H_2 = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2} = c,$$

d'où l'on tire algébriquement

$$p_1 = \frac{b}{2(x_1 + x_2)} + \frac{c}{2\alpha} + \frac{x_3^2}{4\alpha},$$
$$p_2 = \frac{b}{2(x_1 + x_2)} - \frac{c}{2\alpha} - \frac{x_3^2}{4\alpha},$$
$$p_3 = \frac{2a - b x_3}{2c - x_3^2} + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2) x_3;$$

par conséquent,

$$p_1dx_1 + p_2dx_2 + p_3dx_3$$
$$= \frac{b}{2}\frac{d(x_1+x_2)}{x_1+x_2} + \frac{1}{2\alpha}(dx_1 - dx_2)\left(c + \frac{x_3^2}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\,x_3\,dx_3 + \frac{2a - bx_3}{2c + x_3^2}\,dx_3.$$

En intégrant cette expression, nous obtiendrons la seconde partie de l'intégrale cherchée,

$$z'' + A'' = \frac{b}{2}\log(x_1+x_2) + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\left(c + \frac{x_3^2}{2}\right)$$
$$+ \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c}}\operatorname{arctang}\frac{x_3}{\sqrt{2c}} - \frac{b}{2}\log(2c + x_3^2).$$

Par conséquent l'intégrale complète du problème sera

$$z + A = z' + z'' + (A' + A'')$$
$$= \log\frac{(x_1+x_2)^{\frac{b}{2}}(\beta + x_6)^{\gamma}}{(2c + x_3^2)^{\frac{b}{2}}} + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\left(c + \frac{x_3^2}{2}\right)$$
$$+ \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c}}\operatorname{arctang}\frac{x_3}{\sqrt{2c}} + \frac{2}{3\gamma}(\alpha - \beta\gamma - \gamma x_4)^{\frac{3}{2}} + \beta x_5,$$

$A = A' + A''$, b, c, α, β, γ désignant six constantes arbitraires distinctes.

66. Voyons s'il n'est pas possible d'obtenir la solution du problème, en commençant le calcul de la fonction H_2 par la détermination d'une intégrale de la seconde des équations (m).

L'intégration de l'équation

$$(H_1, H_2) = (p_1+p_2)\frac{\partial H_2}{\partial p_1} - (x_1+x_2)\frac{\partial H_2}{\partial x_1} + (p_1+p_2)\frac{\partial H_2}{\partial p_2}$$
$$- (x_1+x_2)\frac{\partial H_2}{\partial x_2} = 0$$

se ramène à celle du système d'équations

$$\frac{dp_1}{p_1+p_2} = \frac{dp_2}{p_1+p_2} = \frac{-dx_1}{x_1+x_2} = \frac{-dx_2}{x_1+x_2},$$

dont les intégrales sont évidemment

$$p_1 - p_2 = \text{const.}, \quad p_1 - p_2 + x_1 - x_2 = \text{const.}$$

Prenons la première de ces intégrales, comme étant la plus simple, et posons

$$\theta = p_1 - p_2.$$

Le tableau ci-dessus nous fait voir que le résultat de la substitution de θ à la place de H_2 dans la première des équations (m) est $-x_3\theta$, et cette fonction, que nous désignerons pur θ', sera, d'après la théorie, une nouvelle intégrale de la seconde équation (m). Le résultat de la substitution de θ' à la place de H_2 dans la première équation (m) sera

$$\theta'' = \frac{\theta'^2}{\theta} + \alpha\theta^2.$$

La fonction θ'' est évidemment une nouvelle intégrale de la seconde équation (m); mais elle s'exprime en fonction des deux précédentes θ et θ'. Nous arrêterons donc là les substitutions, et nous chercherons une fonction F des deux intégrales distinctes θ et θ', qui satisfasse aux deux équations (m). Pour cela, formons les équations

$$[H_1,\ F(\theta,\ \theta')] = (H_1,\ \theta)\frac{\partial F}{\partial \theta} + (H_1,\ \theta')\frac{\partial F}{\partial \theta'}$$

$$= 0.\frac{\partial F}{\partial \theta} + 0.\frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0,$$

$$[H,\ F(\theta,\ \theta')] = (H,\ \theta)\frac{\partial F}{\partial \theta} + (H,\ \theta')\frac{\partial F}{\partial \theta'}$$

$$= \theta'\frac{\partial F}{\partial \theta} + \left(\frac{\theta'^2}{\theta} + \alpha\theta^2\right)\frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0.$$

La première de ces équations est satisfaite par une forme quelconque de la fonction F; la seconde sera satisfaite, si l'on détermine F comme intégrale de l'équation

$$\frac{d\theta}{\theta'} = \frac{d\theta'}{\frac{\theta'^2}{\theta} + \alpha\theta^2}.$$

En exposant la théorie générale, nous avons introduit dans un pareil système d'équations une nouvelle variable τ, en égalant la valeur commune des rapports précédents à la différentielle $d\tau$. Mais dans le cas actuel il sera aussi simple de se passer de variable auxiliaire. En effet, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{\theta'}{\theta} + \alpha \frac{\theta^2}{\theta'}.$$

En posant

$$\theta' = u\theta, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta'}{d\theta} = u + \theta \frac{du}{d\theta},$$

il vient

$$u + \theta \frac{du}{d\theta} = u + \alpha \frac{\theta}{u}, \quad \text{ou} \quad udu = \alpha d\theta,$$

d'où, en intégrant,

$$\alpha\theta = \text{const.} + \frac{u^2}{2},$$

et par suite

$$F(\theta, \theta') = \alpha\theta - \frac{\theta'^2}{2\theta^2} = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2}.$$

Cette intégrale de la première équation (m) avait déjà été tirée immédiatement du système (n), et nous l'avions désignée par ψ. Par suite, la nouvelle voie conduit à la même intégrale complète; cependant, quoique plus longue, elle est plus intéressante que la précédente, en ce qu'elle présente une application plus complète de la théorie de Jacobi.

§. 20.

66. Nous allons maintenant introduire, dans l'exposition de la méthode de Jacobi, les simplifications et les compléments dont il a été question à la fin de l'avant-dernier paragraphe (art. 53).

Représentons encore l'équation donnée par

$$H(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a,$$

la fonction inconnue z des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ n'y entrant que par ses dérivées partielles $p_1, \ldots, p_n$; et le système des $n-1$ équations cherchées qui doivent la compléter par

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \ldots, \quad H_{n-1} = a_{n-1},$$

les premiers membres devant être des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, qui ne contiennent pas les constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Ce système de n équations peut évidemment être remplacé par tout autre système équivalent. Par exemple, par la première de ces équations, on peut exprimer p_1 en fonction des autres va-

riables et de a; en substituant cette valeur de p_1 dans la seconde équation, on pourra en tirer la valeur de p_2 en fonction de toutes les variables restantes, hormis p_1 et p_2, et des constantes a, a_1. En continuant ainsi, il est clair que l'on pourra généralement exprimer chacune des n premières quantités de la série

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ a,\ a_1,\ldots,\ a_{n-1}$$

en fonction des $2n$ quantités qui les suivent dans cette série. Si l'on désigne ces expressions respectivement par $\omega_1,\ \omega_2,\ldots,\ \omega_n$, nous aurons, au lieu du système d'équations précédent, cet autre système équivalent, composé aussi de n équations,

$$p_1 - \omega_1 = 0,\quad p_2 - \omega_2 = 0,\ldots,\quad p_n - \omega_n = 0.$$

67. Comme nous avons sous-entendu, dans ce qui précède, que les premiers membres des équations $H = a$, $H_1 = a_1,\ldots$ satisfaisaient identiquement à la condition

$$(a) \qquad (H_i,\ H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs des indices i et k prises dans la suite des nombres $0, 1, .., n-1$; alors, en vertu du Théorème III du §. 17 (art. 41), les premiers membres des équations $p_1 - \omega_1 = 0$, $p_2 - \omega_2 = 0,\ldots$ devront satisfaire identiquement à la condition

$$(b) \qquad (p_{i+1} - \omega_{i+1},\ p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,$$

pour les mêmes valeurs des indices i et k. Et de même que les équations (a) nous ont servi pour la détermination successive des fonctions $H_1,\ldots,\ H_{n-1}$ au moyen de la fonction donnée H; de même les équations (b) pourront servir à déterminer les fonctions $\omega_2,\ldots,\ \omega_n$ au moyen de la fonction donnée ω_1. Mais il est facile de voir que les équations (b) sont plus simples que les équations (a) correspondantes.

En effet, ces dernières sont toutes de la même forme,

$$(H_i,\ H_k) = \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_m}\frac{\partial H_k}{\partial p_m} - \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_k}{\partial x_m} \right) = 0,$$

et, comme chacune des fonctions H_i, H_k contient toutes les $2n$ variables $x_1,\ldots,\ x_n,\ p_1,\ldots,\ p_n$, chacune de ces équations aura $2n$ termes. L'équation correspondante du système (b), formée d'après la même loi, sera

$$(p_{i+1}-\omega_{i+1},\ p_{k+1}-\omega_{k+1})$$

$$=\sum_{m=1}^{m=n}\left\{\frac{\partial(p_{i+1}-\omega_{i+1})}{\partial x_m}\frac{\partial(p_{k+1}-\omega_{k+1})}{\partial p_m}-\frac{\partial(p_{i+1}-\omega_{i+1})}{\partial p_m}\frac{\partial(p_{k+1}-\omega_{k+1})}{\partial x_m}\right\}$$

$$=0.$$

Mais si l'on observe que les fonctions ω_{i+1}, ω_{k+1}, qui peuvent renfermer toutes les variables $x_1,\ldots,x_n$, ne doivent contenir, parmi les variables $p_1,\ldots,p_n$, que celles dont les indices sont respectivement plus grands que les indices $i+1$, $k+1$ de ces fonctions; il est facile de s'assurer que l'équation précédente aura d'autant moins de termes que les nombres $i+1$, $k+1$ seront plus grands. D'après cette remarque, et en supposant $i<k$, on pourra développer comme il suit la somme qui forme le premier membre de l'équation précédente,

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_1}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_1} \\ 0, & 0 \end{vmatrix}_{(m=1)} + \begin{vmatrix} *, & * \\ 0, & 0 \end{vmatrix}_{(m=2)} + \cdots + \begin{vmatrix} *, & * \\ 0, & 0 \end{vmatrix}_{(m=i)}$$

$$+ \begin{vmatrix} *, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} \\ 1, & 0 \end{vmatrix}_{(m=i+1)} + \begin{vmatrix} *, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+2}} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_{i+2}}, & 0 \end{vmatrix}_{(m=i+2)} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} *, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_k} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_k}, & 0 \end{vmatrix}_{(m=k)} + \begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{k+1}}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_{k+1}}, & 1 \end{vmatrix}_{(m=k+1)}$$

$$+ \begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{k+2}}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+2}} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_{k+2}}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_{k+2}} \end{vmatrix}_{(m=k+2)} + \cdots + \begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_n}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_n}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}_{(m=n)}.$$

Dans ce développement, nous avons remplacé par des astérisques (*) les éléments de chaque déterminant qui devaient être multipliés par zéro. Il est évident, d'après cela, que l'équation précédente peut s'écrire comme il suit,

$$(c)\quad \begin{cases} (p_{i+1}-\omega_{i+1},\ p_{k+1}-\omega_{k+1}) \\ = \dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} - \dfrac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{k+1}} - \sum\limits_{m=i+2}^{m=k+1} \dfrac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m} \\ + \sum\limits_{m=k+2}^{m=n}\left(\dfrac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m} - \dfrac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right) = 0, \end{cases}$$

et que le nombre de ses termes est égal à $2n-k-i$. Ainsi, par exemple, dans la première équation du système (b), pour laquelle $i=0$, $k=1$, il y a $2n-1$ termes; dans la dernière, où $i=n-2$, $k=n-1$, il y a seulement 3 termes.

68. D'après cela, la fonction ω_2 des variables $p_3,\ldots,p_n$, $x_1,\ldots,x_n$ devra être déterminée au moyen de la fonction donnée ω_1, par l'intégration de l'équation linéaire

$$(1)\quad \begin{cases} (p_1-\omega_1,\ p_2-\omega_2) = -\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_2} \\ + \sum\limits_{m=2}^{m=n}\left(\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_m}\dfrac{\partial\omega_2}{\partial p_m} - \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_m}\right) = 0, \end{cases}$$

dans laquelle la fonction cherchée $p_2=\omega_2$ entre non-seulement par ses dérivées partielles, mais encore explicitement dans les coefficients. Le nombre des termes est $2n-1$, et l'un d'entre eux ne contient pas les dérivées partielles de la fonction cherchée.

La fonction ω_3 des variables $p_4,\ldots,p_n$, $x_1,\ldots,x_n$ devra être déterminée au moyen des fonctions connues ω_1, ω_2, de manière à satisfaire simultanément aux deux équations linéaires

$$(p_1-\omega_1,\ p_3-\omega_3) = -\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega_1}{\partial p_3}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3} + \sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_m}\frac{\partial\omega_3}{\partial p_m} - \frac{\partial\omega_1}{\partial p_m}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_m}\right) = 0,$$

$$(p_2-\omega_2,\ p_3-\omega_3) = -\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3} + \frac{\partial\omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega_2}{\partial p_3}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3} + \sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_m}\frac{\partial\omega_3}{\partial p_m} - \frac{\partial\omega_2}{\partial p_m}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_m}\right) = 0,$$

dont les coefficients contiennent pareillement la fonction cherchée $p_3=\omega_3$, et le nombre des termes est égal pour la première à $2n-2$, pour la seconde à $2n-3$.

En général, lorsqu'on aura déjà déterminé les fonctions

$\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k$, alors, au moyen de ces fonctions et de la fonction donnée ω_1, on devra déterminer ω_{k+1} en fonction de $p_{k+2}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$, de manière à satisfaire simultanément au système des k équations linéaires

$$(k) \quad (p_1 - \omega_1,\ p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,\ (p_2 - \omega_2,\ p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \ldots,$$
$$(p_k - \omega_k,\ p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,$$

lesquelles sont de la forme de l'équation (c), et s'obtiennent en faisant successivement dans celle-ci

$$i = 0,\ 1, \ldots,\ k-1.$$

Relativement à leur forme, nous n'aurons qu'à répéter les remarques faites plus haut sur les équations des systèmes précédents, et les nombres de leurs termes seront respectivement

$$(k') \quad 2n-k,\ 2n-k-1,\ 2n-k-2, \ldots,\ 2n-2k+1.$$

On peut écrire de cette manière chacun des n systèmes d'équations qui servent à la détermination successive des fonctions $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$. Mais on voit par ce qui précède que, dans les différentes équations d'un même système, le nombre des variables n'est pas le même, non plus que celui des termes. Ainsi, dans les équations (k), les nombres des variables forment évidemment la série

$$2n-1,\ 2n-2,\ 2n-3, \ldots,\ 2n-k,$$

les nombres de termes étant exprimés par la série (k').

En conséquence, il faut transformer les équations ci-dessus, de manière à rendre le nombre des variables, ainsi que celui des termes, identiques dans toutes les équations d'un même système, et respectivement égaux aux nombres des variables et des termes dans la dernière équation du système. Ainsi, dans chacune des équations (k), on réduira le nombre des variables à $2n-k$, et celui des termes à $2n-2k+1$.

69. Commençons par appliquer cette transformation aux équations (2). La première de ces équations peut s'obtenir immédiatement, puisque la fonction ω_1 des variables $p_2, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$ se tire algébriquement de l'équation donnée; mais on ne peut former la seconde qu'après avoir déterminé une intégrale $p_2 = \omega_2$ de l'équation (1). Dès que l'on connaîtra cette intégrale, où ω_2 désigne une fonction de $p_3, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$, on pourra alors évidemment substituer dans ω_1 la valeur de p_2, et exprimer ainsi ω_1 au moyen des mêmes variables que ω_2, d'où il devra résulter

une simplification de la première des équations (2). En désignant par ω_1' ce que devient la fonction ω_1 après la substitution, et par t une quelconque des variables $p_3, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$, il est clair qu'on aura

$$\frac{\partial \omega_1'}{\partial t} = \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial t}.$$

Cette formule indique d'elle-même de quelle manière s'opérera la transformation demandée. Pour cela, il est aisé de voir qu'il faut ajouter à la première des équations (2) le produit de la seconde par $\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 = &-\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \\ &-\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}\right) - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial p_3} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial p_3}\right)\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \\ &+ \sum_{m=4}^{m=n}\left\{\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \omega_3}{\partial p_m} - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial p_m} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial p_m}\right)\frac{\partial \omega_3}{\partial x_m}\right\}, \end{aligned}$$

ou, en remarquant que

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} = 0,$$

et ayant égard à la formule précédente,

$$\begin{aligned} 0 = &-\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1'}{\partial p_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \\ &+ \sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_m}\frac{\partial \omega_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1'}{\partial p_m}\frac{\partial \omega_3}{\partial x_m}\right). \end{aligned}$$

On remplacera par cette équation la première des équations (2), après quoi ces deux équations ne renfermeront plus l'une et l'autre que les mêmes variables $p_3, p_4, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$, et auront le même nombre de termes $2n-3$; de sorte que l'une des équations se transformera dans l'autre, lorsqu'on changera ω_1' en ω_2 et vice versa.

Il est évident aussi que ces deux équations peuvent être représentées symboliquement sous la forme

(2′) $\left\{\begin{array}{l} (p_1 - \omega_1',\ p_3 - \omega_3) = 0, \quad (p_2 - \omega_2,\ p_3 - \omega_3) = 0, \\ \text{et que leur combinaison donne encore une troisième} \\ \text{identité,} \\ \qquad (p_1 - \omega_1',\ p_2 - \omega_2) = 0, \end{array}\right.$

laquelle doit avoir lieu en vertu du Théorème IV du §. 17.

70. En suivant la même marche, on pourra effectuer la transformation voulue dans tous les systèmes successifs d'équations qui servent à la détermination des fonctions ω_4, ω_5,.... Sans nous arrêter donc à chacun de ces systèmes en particulier, nous allons indiquer la marche de cette transformation pour les équations (k) (art. 69), qui peuvent représenter un quelconque des systèmes que l'on aura à considérer.

On ne peut former les équations (k) qu'après avoir déjà obtenu les valeurs

$$\begin{aligned}
p_1 &= \omega_1(p_2,\ldots, p_n, x_1,\ldots, x_n),\\
p_2 &= \omega_2(p_3,\ldots, p_n, x_1,\ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_{k-1} &= \omega_{k-1}(p_k,\ldots, p_n, x_1,\ldots, x_n),\\
p_k &= \omega_k(p_{k+1},\ldots, p_n, x_1,\ldots, x_n),
\end{aligned}$$

dont la première se tire algébriquement de l'équation donnée, et les suivantes respectivement de l'intégration des équations (1), (2')....

En substituant les valeurs de p_k, p_{k-1},.., p_2, représentées par ces équations successives, dans chacune des équations précédentes, on exprimera toutes les fonctions ω_1, ω_2,..., ω_{k-1} de la même manière qu'est exprimée la fonction ω_k, c'est-à-dire au moyen des variables p_{k+1},...., p_n, x_1,...., x_n. Si l'on désigne par ω_1', ω_2',..., ω_{k-1}' ce que deviennent ces fonctions après les substitutions, et par t une quelconque des variables dont elles dépendront alors, il viendra

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial t} = \frac{\partial\omega_{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial\omega_{k-1}}{\partial p_k}\,\frac{\partial\omega_k}{\partial t},\\
&\frac{\partial\omega_{k-2}'}{\partial t} = \frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial t} + \frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_{k-1}}\,\frac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial t} + \frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_k}\,\frac{\partial\omega_k}{\partial t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial\omega_1'}{\partial t} = \frac{\partial\omega_1}{\partial t} + \frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\,\frac{\partial\omega_2'}{\partial t} + \frac{\partial\omega_1}{\partial p_3}\,\frac{\partial\omega_3'}{\partial t}\\
&\qquad\qquad + \ldots + \frac{\partial\omega_1}{\partial p_{k-1}}\,\frac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial t} + \frac{\partial\omega_1}{\partial p_k}\,\frac{\partial\omega_k}{\partial t}.
\end{aligned}\right.$$

71. Ces formules montrent d'elles-mêmes comment on devra procéder pour faire la transformation demandée. Prenons les équations (k)

$$(p_1-\omega_1,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,\quad (p_2-\omega_2,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,\ldots,$$
$$(p_k-\omega_k,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,$$

et désignons-les respectivement par

$$(k_1),\ (k_2),\ldots,\ (k_k).$$

Pour les réduire à la forme de la dernière (k_k), on commencera la transformation par l'équation (k_{k-1}), et pour cela, comme l'indique la première des équations (d), on ajoutera à l'équation (k_{k-1}) l'équation (k_k) multipliée par $\frac{\partial\omega_{k-1}}{\partial p_k}$, ce qui donnera l'équation

$$(k_{k-1})+(k_k)\frac{\partial\omega_{k-1}}{\partial p_k}=0,$$

ou, en vertu de la formule en question, l'équation

$$(k_{k-1}')\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial x_{k+1}}+\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k-1}}-\dfrac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ +\sum\limits_{m=k+2}^{m=n}\left(\dfrac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial x_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m}-\dfrac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial p_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)=0, \end{array}\right.$$

qui remplacera l'équation (k_{k-1}) du système (k).

Pour transformer l'équation (k_{k-2}), il faudra, d'après la seconde des formules (d), ajouter à l'équation (k_{k-2}) l'équation (k_{k-1}') multipliée par $\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_{k-1}}$, et l'équation (k_k) multipliée par $\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_k}$, ce qui donnera l'équation

$$(k_{k-2})+(k_{k-1}')\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_{k-1}}+(k_k)\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_k}=0,$$

ou

$$(k_{k-2}')\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial\omega_{k-2}'}{\partial x_{k+1}}+\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k-2}}-\dfrac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ +\sum\limits_{m=k+2}^{m=n}\left(\dfrac{\partial\omega_{k-2}'}{\partial x_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m}-\dfrac{\partial\omega_{k-2}'}{\partial p_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)=0. \end{array}\right.$$

Supposons que, en continuant de cette manière, nous ayons

transformé toutes les équations du système (k), à l'exception de la première; alors, pour transformer aussi celle-ci, on formera l'équation

$$(k_1) + (k_2')\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} + (k_3')\frac{\partial \omega_1}{\partial p_3} + \ldots + (k_{k-1}')\frac{\partial \omega_1}{\partial p_{k-1}} + (k_k)\frac{\partial \omega_1}{\partial p_k} = 0,$$

laquelle, en vertu de la dernière des formules (d), prendra la forme

$$(k_1') \quad \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial \omega_1'}{\partial x_{k+1}} + \dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \omega_1'}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ + \sum\limits_{m=k+2}^{m=n}\left(\dfrac{\partial \omega_1'}{\partial x_m}\dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m} - \dfrac{\partial \omega_1'}{\partial p_m}\dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m}\right) = 0, \end{array} \right.$$

et c'est par cette équation qu'on remplacera l'équation (k_1).

72. Ainsi le système transformé se composera des équations

$$(k_1'), \ldots, (k_{k-2}'), (k_{k-1}'), (k_k).$$

Dans chacune de ces équations entrent les seules et mêmes variables $p_{k+2}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$, et elles contiennent toutes le même nombre de termes $2n-2k+1$.

Il est évident que ces équations se transforment les unes dans les autres par l'échange des fonctions $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_{k-1}', \omega_k$; on pourra donc les représenter toutes par la même formule générale

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial \omega_l'}{\partial x_{k+1}} + \dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_l} - \dfrac{\partial \omega_l'}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ + \sum\limits_{m=k+2}^{m=n}\left(\dfrac{\partial \omega_l'}{\partial x_m}\dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m} - \dfrac{\partial \omega_l'}{\partial p_m}\dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m}\right) = 0, \end{array} \right.$$

ou l'on fera successivement $l = 1, 2, \ldots, k$.

Cette même formule peut servir à représenter les équations de tous les autres systèmes, qui s'en déduisent toutes en donnant successivement à l'indice k les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$, et attribuant, pour chacune de ces valeurs, à l'indice l toutes les valeurs non plus grandes que k.

Enfin, remarquons encore que le système (k) transformé peut s'écrire symboliquement sous la forme

$$(p_1 - \omega_1', p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \quad (p_2 - \omega_2', p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \ldots,$$
$$(p_k - \omega_k, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,$$

71. Ces formules montrent d'elles-mêmes comment on devra procéder pour faire la transformation demandée. Prenons les équations (k)

$$(p_1-\omega_1,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,\quad (p_2-\omega_2,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,\ldots,$$
$$(p_k-\omega_k,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,$$

et désignons-les respectivement par

$$(k_1),\ (k_2),\ldots,\ (k_k).$$

Pour les réduire à la forme de la dernière (k_k), on commencera la transformation par l'équation (k_{k-1}), et pour cela, comme l'indique la première des équations (d), on ajoutera à l'équation (k_{k-1}) l'équation (k_k) multipliée par $\frac{\partial\omega_{k-1}}{\partial p_k}$, ce qui donnera l'équation

$$(k_{k-1})+(k_k)\frac{\partial\omega_{k-1}}{\partial p_k}=0,$$

ou, en vertu de la formule en question, l'équation

$$(k_{k-1}')\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial x_{k+1}}+\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k-1}}-\dfrac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ +\sum\limits_{m=k+2}^{m=n}\left(\dfrac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial x_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m}-\dfrac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial p_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)=0, \end{array}\right.$$

qui remplacera l'équation (k_{k-1}) du système (k).

Pour transformer l'équation (k_{k-2}), il faudra, d'après la seconde des formules (d), ajouter à l'équation (k_{k-2}) l'équation (k_{k-1}') multipliée par $\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_{k-1}}$, et l'équation (k_k) multipliée par $\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_k}$, ce qui donnera l'équation

$$(k_{k-2})+(k_{k-1}')\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_{k-1}}+(k_k)\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_k}=0,$$

ou

$$(k_{k-2}')\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial\omega_{k-2}'}{\partial x_{k+1}}+\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k-2}}-\dfrac{\partial\omega_{k-1}'}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ +\sum\limits_{m=k+2}^{m=n}\left(\dfrac{\partial\omega_{k-2}'}{\partial x_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m}-\dfrac{\partial\omega_{k-2}'}{\partial p_m}\dfrac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)=0. \end{array}\right.$$

Supposons que, en continuant de cette manière, nous ayons

transformé toutes les équations du système (k), à l'exception de la première; alors, pour transformer aussi celle-ci, on formera l'équation

$$(k_1) + (k_2')\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} + (k_3')\frac{\partial \omega_1}{\partial p_3} + \ldots + (k_{k-1}')\frac{\partial \omega_1}{\partial p_{k-1}} + (k_k)\frac{\partial \omega_1}{\partial p_k} = 0,$$

laquelle, en vertu de la dernière des formules (d), prendra la forme

$$(k_1') \quad \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial \omega_1'}{\partial x_{k+1}} + \dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \omega_1'}{\partial p_{k+1}} \dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ + \sum\limits_{m=k+2}^{m=n} \left(\dfrac{\partial \omega_1'}{\partial x_m} \dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m} - \dfrac{\partial \omega_1'}{\partial p_m} \dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m} \right) = 0, \end{array} \right.$$

et c'est par cette équation qu'on remplacera l'équation (k_1).

72. Ainsi le système transformé se composera des équations

$$(k_1'), \ldots, (k_{k-2}'), (k_{k-1}'), (k_k).$$

Dans chacune de ces équations entrent les seules et mêmes variables $p_{k+2}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$, et elles contiennent toutes le même nombre de termes $2n-2k+1$.

Il est évident que ces équations se transforment les unes dans les autres par l'échange des fonctions $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_{k-1}', \omega_k$; on pourra donc les représenter toutes par la même formule générale

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial \omega_l'}{\partial x_{k+1}} + \dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_l} - \dfrac{\partial \omega_l'}{\partial p_{k+1}} \dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ + \sum\limits_{m=k+2}^{m=n} \left(\dfrac{\partial \omega_l'}{\partial x_m} \dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m} - \dfrac{\partial \omega_l'}{\partial p_m} \dfrac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m} \right) = 0, \end{array} \right.$$

ou l'on fera successivement $l = 1, 2, \ldots, k$.

Cette même formule peut servir à représenter les équations de tous les autres systèmes, qui s'en déduisent toutes en donnant successivement à l'indice k les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$, et attribuant, pour chacune de ces valeurs, à l'indice l toutes les valeurs non plus grandes que k.

Enfin, remarquons encore que le système (k) transformé peut s'écrire symboliquement sous la forme

$$(p_1 - \omega_1', p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \quad (p_2 - \omega_2', p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \ldots,$$
$$(p_k - \omega_k, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,$$

ω_1', ω_2', ... , ω_k désignant des fonctions des seules variables $p_{k+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$.

A ces équations on peut encore joindre les identités

$$(p_l - \omega_l', p_{l'} - \omega_{l'}') = 0,$$

qui ont lieu, en vertu du Théorème IV du §. 17, pour toutes les valeurs de l et de l' prises dans la suite des nombres 1, 2, .., k.

§. 21.

73. Avant de traiter de l'intégration des systèmes d'équations obtenus dans le paragraphe précédent, faisons-leur subir encore une dernière transformation, d'ailleurs très-simple et uniforme, et qu'il suffira, en conséquence, d'expliquer sur l'équation (*e*), qui représente le type général de toutes les autres.

Dans l'équation (*e*), $p_{k+1} = \omega_{k+1}$ désigne la fonction cherchée des variables $p_{k+2}, .., p_n, x_1, .., x_n$; et ω_l' est une fonction donnée, dans laquelle entre, outre les variables précédentes, la fonction elle-même $p_{k+1} = \omega_{k+1}$ qu'il s'agit de déterminer. D'après cela, suivant le procédé ordinaire, on transformera cette équation en une autre, pareillement linéaire, dans laquelle la variable p_{k+1} se joindra aux précédentes comme variable indépendante, et où la nouvelle fonction inconnue n'entrera plus dans les coefficients de l'équation.

Supposons, en effet, que

$$f_k(p_{k+1}, p_{k+2}, .., p_n, x_1, .., x_n) = \text{const.} = a_k$$

soit l'équation d'où l'on doive tirer la valeur

$$p_{k+1} = \omega_{k+1},$$

satisfaisant à l'équation (*e*). L'équation $f_k = a_k$, par la substitution de la valeur ω_{k+1} de p_{k+1}, se changera en identité; par suite, en la différentiant par rapport à l'une quelconque t des variables $p_{k+2}, .., p_n, x_1, \ldots, x_n$, nous aurons encore une identité,

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial t} = 0,$$

ou

$$-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial t} = \frac{\partial f_k}{\partial t}.$$

En multipliant donc l'équation (*e*) par $-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}$, il viendra

$$\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial \omega_l'}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_l} - \frac{\partial \omega_l'}{\partial p_{k+1}}\left(-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\right)$$
$$+ \sum_{m=k+2}^{m=n}\left\{\frac{\partial \omega_l'}{\partial x_m}\left(-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m}\right) - \frac{\partial \omega_l'}{\partial p_m}\left(-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)\right\} = 0,$$

ou, en vertu de l'égalité précédentes

$$(g) \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_l} + \sum_{m=k+2}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega_l'}{\partial x_m}\frac{\partial f_k}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_l'}{\partial p_m}\frac{\partial f_k}{\partial x_m}\right) = 0.$$

Enfin, cette équation peut encore se mettre sous la forme symbolique

$$(p_l - \omega_l',\ f_k) = 0,$$

ω_l' et f_k représentant des fonctions des seules et mêmes variables $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$.

74. Toutes les équations étant finalement ramenées à la forme convenable, nous pouvons maintenant exposer la méthode pour les intégrer. Le plan général et l'essence du procédé nécessaire pour le succès de cette intégration sont, dans le cas actuel, analogues à ce que nous avons développé au §. 18, en traitant de l'intégration des équations correspondantes, de forme non encore simplifiée. La différence de détail provient principalement, dans le cas présent, de l'élimination graduelle des variables superflues dans les équations qu'il faut intégrer pour la détermination successive des $n-1$ fonctions inconnues. De cette manière, nous aurons encore ici $n-1$ systèmes à intégrer, lesquels se composeront des mêmes nombres d'équations que précédemment; mais, chaque fois qu'on passe à la détermination d'une nouvelle fonction, le nombre des variables est diminué de deux unités, par suite de l'élimination effectuée à l'aide de la fonction que l'on vient de déterminer immédiatement avant celle que l'on cherche. En même temps que la théorie se trouve simplifiée par ce procédé, elle est encore perfectionnée sous un autre rapport: les équations d'un même système contiennent maintenant un égal nombre de variables; mais les variables ne sont pas toutes identiques dans les diverses équations, et cette circonstance a pour effet, comme nous le verrons bientôt, de délivrer la théorie de l'imperfection que nous avons signalée dans la Remarque 1 du §. 18 (art. 49), et qui diminuait la sûreté des applications de la méthode.

75. La détermination successive des $n-1$ fonctions inconnues, nécessaires pour la solution de notre problème, peut être présentée comme il suit sous une forme générale.

De l'équation donnée aux dérivées partielles du premier ordre

$$H(x_1,..,\ x_n,\ p_1,..,\ p_n) = a,$$

on tirera algébriquement la valeur de l'une des dérivées partielles p_1, en fonction des autres et des variables $x_1,..,\ x_n$; soit

$$p_1 = \omega_1(p_2,..,\ p_n,\ x_1,..,\ x_n,\ a)$$

cette valeur. Pour déterminer l'équation

$$f_1(p_2,..,\ p_n,\ x_1,..,\ x_n,\ a) = \text{const.} = a_1,$$

d'où l'on tirera l'expression de p_2 en fonction de $p_3,..,\ p_n\ x_1,...,\ x_n,\ a,\ a_1$, on prendra l'équation linéaire

$$(p_1 - \omega_1,\ f_1) = 0,$$

qui, en vertu de la formule (g), est de la forme

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \sum_{m=2}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m}\frac{\partial f_1}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_m}\frac{\partial f_1}{\partial x_m}\right) = 0,$$

et l'on déterminera une de ses intégrales particulières, renfermant p_2, ce qui se ramène à la détermination de l'une des intégrales du système des $2n-2$ équations simultanées aux différentielles ordinaires entre $2n-1$ variables,

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}} = ... = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_n}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}} = ... = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_n}}.$$

Si l'on représente cette intégrale par

$$\varphi(p_2,..,\ p_n,\ x_1,..,\ x_n,\ a) = \text{const.},$$

on pourra prendre $f_1 = \varphi$, et de l'équation $f_1 = a_1$ on tirera la valeur cherchée de p_2, savoir

$$p_2 = \omega_2(p_3,...,\ p_n,\ x_1,..,\ x_n,\ a,\ a_1).$$

En portant dans la fonction ω_1 la valeur que l'on vient de trouver pour p_2, et désignant par ω_1' ce que devient ω_1 après cette substitution, on aura

$$p_1 = \omega_1'$$

pour la valeur de p_1 exprimée au moyen des mêmes variables que p_2.

76. Pour déterminer ensuite l'équation

$$f_2(p_3, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, a, a_1) = \text{const.} = a_2$$

qui doit fournir l'expression de p_3 en fonction de $p_4, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, a, a_1, a_2$, on posera les deux équations linéaires simultanées

$$(\alpha) \qquad (p_1 - \omega_1', f_2) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f_2) = 0,$$

qui, en vertu de la formule (g), sont de la forme

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \sum_{m=3}^{m=n} \left(\dfrac{\partial \omega_1'}{\partial x_m} \dfrac{\partial f_2}{\partial p_m} - \dfrac{\partial \omega_1'}{\partial p_m} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} \right) = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + \sum_{m=3}^{m=n} \left(\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_m} \dfrac{\partial f_2}{\partial p_m} - \dfrac{\partial \omega_2}{\partial p_m} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} \right) = 0, \end{cases}$$

et l'on en déterminera une solution commune. A ces équations on pourra encore joindre l'identité

$$(\alpha') \qquad (p_1 - \omega_1', p_2 - \omega_2) = 0,$$

qui a lieu en vertu du Théorème IV du §. 17.

La détermination de la fonction f_2 satisfaisant aux équations simultanées linéaires aux dérivées partielles (α), s'effectue en s'appuyant sur le Théorème I du §. 17, et s'aidant de l'identité (α').

On cherchera d'abord une intégrale particulière de l'une des équations (α), intégrale qui renferme p_3; ce qui se ramènera à la recherche de l'une des intégrales du système des $2n-4$ équations simultanées aux différentielles ordinaires entre $2n-3$ variables

$$(\beta) \qquad \frac{dx_1}{1} = \frac{dx_3}{-\dfrac{\partial \omega_1'}{\partial p_3}} = \ldots = \frac{dx_n}{-\dfrac{\partial \omega_1'}{\partial p_n}} = \frac{dp_3}{\dfrac{\partial \omega_1'}{\partial x_3}} = \ldots = \frac{dp_n}{\dfrac{\partial \omega_1'}{\partial x_n}},$$

si l'on veut obtenir une intégrale de la première des équations (α); ou du système

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{-\dfrac{\partial \omega_2}{\partial p_3}} = \ldots = \frac{dx_n}{-\dfrac{\partial \omega_2}{\partial p_n}} = \frac{dp_3}{\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_3}} = \ldots = \frac{dp_n}{\dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_n}},$$

si l'on veut obtenir une intégrale de la seconde des équations (α).

Supposons, par exemple, que nous ayons déterminé une intégrale du premier de ces systèmes,.

$$\psi(p_3,\ldots, p_n, x_1,\ldots, x_n, a, a_1) = \text{const.},$$

dans laquelle x_2 pourra entrer en jouant le rôle de constante.

Cette fonction ψ, qui représente une intégrale particulière de la première équation (α), substituons-la dans la seconde de ces équations à la place de f_2; substituons le résultat ψ_1 de cette substitution dans la même équation à la place de f_2, et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi la série de fonctions

$$(p_2-\omega_2, \psi)=\psi_1,\ (p_2-\omega_2, \psi_1)=\psi_2,\ldots,\ (p_2-\omega_2, \psi_{i-1})=\psi_i,\ldots.$$

On prouve aisément, au moyen du Théorème I du §. 17, que les fonctions $\psi_1, \psi_2,\ldots$ sont des intégrales de la première équation (α). En effet, en prenant l'identité qui exprime ce théorème,

$$[A, (B, C)]+[B, (C, A)]+[C, (A, B)] = 0,$$

si l'on y fait $A = p_1-\omega_1'$, $B = p_2-\omega_2$, et que l'on ait égard à l'identité (α'), on trouve

$$[p_1-\omega_1', (p_2-\omega_2, C)]+[p_2-\omega_2, (C, p_1-\omega_1')] = 0,$$

identité qui a lieu pour toute fonction C des variables $x_1,\ldots, x_n$, $p_1,\ldots, p_n$.

En faisant maintenant tour à tour

$$C = \psi, \psi_1,\ldots, \psi_i,\ldots,$$

on obtient successivement les identités

$$[p_1-\omega_1', (p_2-\omega_2, \psi)] = 0, \quad \text{ou} \quad (p_1-\omega_1', \psi_1) = 0,$$
$$[p_1-\omega_1', (p_2-\omega_2, \psi_1)] = 0, \quad \text{ou} \quad (p_1-\omega_1', \psi_2) = 0,$$
$$\text{etc.}\ldots,$$

qui démontrent le théorème.

Puisque $\psi, \psi_1, \psi_2,\ldots$ représentent des intégrales de la première des équations (α), il s'ensuit de là que

$$\psi = \text{const.}, \quad \psi_1 = \text{const.}, \quad \psi_2 = \text{const.},\ldots$$

sont des intégrales du système des $2n-4$ équations différentielles ordinaires simultanées (β). Mais ce système n'admet que $2n-4$ intégrales distinctes ou indépendantes entre elles, et toutes les autres intégrales du même système en sont des fonctions. Donc si, dans le calcul de la série $\psi, \psi_1, \psi_2,\ldots, \psi_i,\ldots$, on ne rencontre

pas de terme qui se réduise à une constante quelconque ou à zéro, on devra alors parvenir nécessairement à un terme ψ_i qui s'exprime en fonction des précédents, et qui pourra, en outre, renfermer x_2 en qualité de constante. Supposons que l'on ait ainsi

$$\psi_i = F(x_2, \psi, \psi_1, .., \psi_{i-1}),$$

l'indice i ne devant pas, évidemment, surpasser $2n-4$.

Il serait inutile de pousser plus loin le calcul de la série précédente, puisque les nouveaux termes ajoutés seraient bien des intégrales de la première équation (α), mais s'exprimeraient tous en fonction des intégrales déjà trouvées; et nous savons a **priori** qu'une fonction arbitraire d'une ou de plusieurs intégrales d'une équation linéaire aux dérivées partielles est aussi une intégrale de cette équation. En profitant de ce qu'on peut choisir arbitrairement la forme de la fonction des variables $x_2, \psi, \psi_1, .., \psi_{i-1}$ qui satisfait à la première équation (α), on pourra déterminer cette forme de manière qu'elle satisfasse en outre à la seconde équation (α).

Soit $\theta(x_2, \psi, \psi_1, .., \psi_{i-1})$ la fonction cherchée; en la substituant à la place de f_2 dans la seconde équation (α), on voit qu'en vertu de la formule (8) du §. 16 (art. 37), cette équation prend la forme

$$(p_2 - \omega_2, \theta)$$

$$= (p_2 - \omega_2, x_2)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + (p_2 - \omega_2, \psi)\frac{\partial\theta}{\partial\psi} + (p_2 - \omega_2, \psi_1)\frac{\partial\theta}{\partial\psi_1}$$

$$+ .. + (p_2 - \omega_2, \psi_{i-1})\frac{\partial\theta}{\partial\psi_{i-1}} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \psi_1\frac{\partial\theta}{\partial\psi} + \psi_2\frac{\partial\theta}{\partial\psi_1} + \ldots + F(x_2, \psi, .., \psi_{i-1})\frac{\partial\theta}{\partial\psi_{i-1}} = 0.$$

L'intégration de cette équation linéaire se ramène à celle du système d'équations différentielles ordinaires simultanées

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = \ldots = \frac{d\psi_{i-1}}{F(x_2, \psi, .., \psi_{i-1})},$$

qui se réduisent très-simplement à une seule équation différentielle ordinaire de l'ordre i, entre les variables x_2 et ψ,

$$\frac{d^i\psi}{dx_2{}^i} = F\left(x_2, \psi, \frac{d\psi}{dx_2}, \ldots, \frac{d^{i-1}\psi}{dx_2{}^{i-1}}\right).$$

Si l'on détermine une des intégrales premières de cette équation

$$\chi(x_2,\ \psi,\ \frac{d\psi}{dx_2},\ldots,\ \frac{d^{i-1}\psi}{dx_2^{i-1}}) = \text{const.},$$

et qu'on y substitue les valeurs

$$\frac{d\psi}{dx_2} = \psi_1,\quad \frac{d^2\psi}{dx_2^2} = \psi_2,\ldots,$$

on aura une intégrale du système précédent d'équations simultanées,

$$\chi(x_2,\ \psi,\ \psi_1,\ldots,\ \psi_{i-1}) = \text{const.}$$

Par conséquent, $f_2 = \theta = \chi$ sera une intégrale commune des équations (α). En posant

$$f_2 = \chi = \text{const.} = a_2,$$

on en déduira la valeur cherchée de p_3 en fonction de $p_4,\ldots,\ p_n,\ x_1,\ldots,\ x_n,\ a,\ a_1,\ a_2$, valeur que nous représenterons par

$$p_3 = \omega_3(p_4,\ldots,\ p_n,\ x_1,\ldots,\ x_n,\ a,\ a_1,\ a_2).$$

Si, dans le calcul de la suite $\psi_1,\ \psi_2,\ldots$, on rencontre un terme qui se réduise à une constante, alors la détermination de l'intégrale commune des équations (α) se fera très-simplement. Soit, en effet, $\psi_i = k$, k étant une constante; nous aurons

$$\frac{d^i\psi}{dx^i} = k,$$

d'où l'on tire, en intégrant

$$\frac{d^{i-1}\psi}{dx^{i-1}} - kx_2 = \text{const.},$$

et par suite

$$f_2 = \psi_{i-1} - kx_2.$$

Si $k=0$, alors $f_2 = \psi_{i-1}$.

77. La méthode que nous venons d'exposer pour la détermination de l'intégrale commune des équations (α) ne présente plus les imperfections de détail dont nous avons parlé dans la Remarque I du §. 18. Cela tient à ce que dans la seconde des équations (α) se trouve la variable x_2, qui entre comme constante dans la première de ces équations. Si nous échangions les rôles des deux équations (α), on parviendrait encore aux mêmes conséquences, parce que la première équation contient la variable x_1, qui entre comme constante dans la seconde. En effet, si ψ_1 est

$$\begin{cases} [p_1-\omega_1'', (p_3-\omega_3, \Phi)] = 0, \text{ ou } (p_1-\omega_1'', \Phi_1) = 0, \\ [p_2-\omega_2', (p_3-\omega_3, \Phi)] = 0, \text{ ou } (p_2-\omega_2', \Phi_1) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} [p_1-\omega_1'', (p_3-\omega_3, \Phi_1)] = 0, \text{ ou } (p_1-\omega_1'', \Phi_2) = 0, \\ [p_2-\omega_2', (p_3-\omega_3, \Phi_1)] = 0, \text{ ou } (p_2-\omega_2', \Phi_2) = 0; \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui démontrent la proposition énoncée.

Si la série Φ, Φ_1, Φ_2,.. ne se clot pas par un terme égal à une constante ou à zéro, on devra alors finir par obtenir un terme qui s'exprime en fonction des précédents, puisque chacune des deux premières équations (γ) ne peut être satisfaite que par $2n-6$ intégrales particulières distinctes. Soit Φ_k ce terme, dans l'expression duquel, outre les quantités Φ, Φ_1,.., Φ_{k-1}, pourra entrer aussi la variable x_3. Posons donc

$$\Phi_k = F(x_3, \Phi, \Phi_1, .., \Phi_{k-1}),$$

k n'étant pas plus grand que $2n-6$.

Puisqu'une fonction arbitraire des variables x_3, Φ, Φ_1,.., Φ_{k-1} satisfait aux deux premières équations (γ), il suffit de déterminer sa forme de manière à satisfaire à la troisième équation (γ); elle satisfera encore également aux deux premières. Si l'on désigne la fonction cherchée par π, on trouve, pour la déterminer, l'équation linéaire

$$(p_3-\omega_3, \pi) = \frac{\partial\pi}{\partial x_3} + \Phi_1 \frac{\partial\pi}{\partial\Phi} + \Phi_2 \frac{\partial\pi}{\partial\Phi_1} + .. + F\frac{\partial\pi}{\partial\Phi_{k-1}} = 0,$$

dont l'intégration se ramène au système d'équations simultanées

$$\frac{dx_3}{1} = \frac{d\Phi}{\Phi_1} = \frac{d\Phi_1}{\Phi_2} = \ldots = \frac{d\Phi_{k-1}}{F},$$

ou à l'équation d'ordre k à deux variables

$$\frac{d^k\Phi}{dx^k} = F(x_3, \Phi, \frac{d\Phi}{dx_3}, .., \frac{d^{k-1}\Phi}{dx_3^{k-1}}).$$

En déterminant une de ses intégrales premières

$$\Psi(x_3, \Phi, \frac{d\Phi}{dx_3}, \ldots, \frac{d^{k-1}\Phi}{dx_3^{k-1}}) = \text{const.},$$

et y substituant les valeurs

$$\frac{d\Phi}{dx_3} = \Phi_1, \quad \frac{d^2\Phi}{dx_3^2} = \Phi_2, \ldots,$$

on obtiendra la valeur cherchée

$$f_3 = \pi = \Psi(x_3,\ \Phi,\ \Phi_1, .., \Phi_{k-1})$$

de la fonction f_3 qui satisfait à l'ensemble des équations (γ).

Si dans l'égalité $\Phi_k = F$, l'indice $k = 1$, la fonction F sera de l'une des formes

$$F(x_3,\ \Phi),\quad F(\Phi),\quad F(x_3),\quad F = \text{const.},\quad F = 0.$$

Dans tous ces cas, comme nous l'avons montré dans l'art. 77, la méthode précédente pour la détermination de l'intégrale commune des équations (γ) ne tombe pas en défaut; au contraire, son application se trouve simplifiée.

79. En posant $f_3 = \Psi = \text{const.} = a_3$, on tirera de cette équation une expression de p_4 en fonction de $p_5, .., p_n, x_1, .., x_n, a, a_1, a_2, a_3$, soit

$$p_4 = \omega_4.$$

Par la substitution de cette valeur de p_4 dans les fonctions ω_1'', ω_2', ω_3, si l'on désigne par ω_1''', ω_2'', ω_3' ce que deviennent ces fonctions respectivement, on aura les valeurs

$$p_1 = \omega_1''',\quad p_2 = \omega_2'',\quad p_3 = \omega_3'$$

de p_1, p_2, p_3 exprimées au moyen des mêmes variables que p_4.

Pour trouver maintenant l'équation $f_4 = \text{const.} = a_4$, qui doit donner l'expression de p_5 en fonction de $p_6, .., p_n, x_1, .., x_n$, il faudra intégrer le système des quatre équations simultanées linéaires aux dérivées partielles

$$(p_1 - \omega_1''',\ f_4) = 0,\quad (p_2 - \omega_2'',\ f_4) = 0,$$
$$(p_3 - \omega_3',\ f_4) = 0,\quad (p_4 - \omega_4,\ f_4) = 0.$$

80. Mais l'essence de la méthode a été déjà suffisamment expliquée par les développements que nous avons donnés sur la marche générale de l'intégration des deux systèmes (α) et (γ); de sorte qu'il est maintenant très-facile d'étendre l'application de cette méthode au système des quatre équations que nous venons d'écrire, ainsi qu'aux systèmes d'équations suivants. Supposons que de cette manière on ait déjà intégré $n-2$ systèmes, et qu'il ne reste plus à intégrer que le $(n-1)^{ième}$ et dernier. Soient

$$H(p_1,\ldots, p_n, x_1,\ldots, x_n) = a,$$

$$f_1(p_2,\ldots, p_n, x_1,\ldots, x_n, a) = a_1,$$

$$f_2(p_3,\ldots, p_n, x_1,\ldots, x_n, a, a_1) = a_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{n-2}(p_{n-1}, p_n, x_1,\ldots, x_n, a, a_1,\ldots, a_{n-3}) = a_{n-2}$$

l'équation donnée et les intégrales des n systèmes déjà intégrés.

D'après la méthode d'intégration précédente, on devra tirer de chacune de ces équations les expressions de chacune des $n-1$ premières quantités de la suite

$$p_1, p_2,\ldots, p_{n-1}, p_n, x_1,\ldots, x_n, a, a_1,\ldots, a_{n-2}$$

en fonction des $2n$ qui la suivent. En conservant les notations précédentes, représentons ces expressions par

$$p_1 = \omega_1, \quad p_2 = \omega_2,\ldots, \quad p_{n-1} = \omega_{n-1}.$$

Il faudra ensuite porter les valeurs de p_{n-1}, $p_{n-2},\ldots,$ p_2, fournies par les équations du système précédent, en remontant depuis la dernière, dans toutes ces équations jusqu'à la première. En conservant le mode de notation déjà employé, marquons le nombre des substitutions successives, effectuées dans chacune des fonctions $\omega_1, \omega_2,\ldots$, en affectant ces fonctions d'un indice supérieur correspondant. On aura de cette manière

$$p_1 = \omega_1^{(n-2)}, \; p_2 = \omega_2^{(n-3)},\ldots, \; p_{n-2} = \omega_{n-2}', \; p_{n-1} = \omega_{n-1},$$

pour les expressions de $p_1,\ldots, p_{n-1}$ au moyen de $p_n, x_1,\ldots, x_n, a, a_1,\ldots, a_{n-2}$.

Passons maintenant à la détermination de l'équation

$$f_{n-1}(p_n, x_1,\ldots, x_n, a, a_1,\ldots, a_{n-2}) = \text{const.} = a_{n-1},$$

d'où l'on doit tirer p_n en fonction de $x_1,\ldots, x_n, a, a_1,\ldots, a_{n-1}$. Pour cela, prenons le système des équations aux dérivées partielles

$$(p_1 - \omega_1^{(n-2)}, f_{n-1}) = 0,$$

$$(p_2 - \omega_2^{(n-3)}, f_{n-1}) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(p_{n-1} - \omega_{n-1}, f_{n-1}) = 0,$$

lesquelles, en vertu de la formule (g), sont de la forme

$$(\delta)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial x_n}\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \dfrac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial p_n}\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \omega_2^{(n-3)}}{\partial x_n}\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \dfrac{\partial \omega_2^{(n-3)}}{\partial p_n}\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_n}\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \dfrac{\partial \omega_{n-1}}{\partial p_n}\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$$

et déterminons leur intégrale commune f_{n-1}. Les principes de la méthode d'intégration de ces sortes de systèmes d'équations ont été exposés ci-dessus avec détail; c'est pourquoi, dans le cas présent, nous nous bornerons à de courtes explications.

81. On commencera par déterminer une intégrale particulière de l'une des équations (δ). Si l'on choisit la première, on devra chercher une des deux intégrales du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_n}{-\dfrac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial p_n}} = \frac{dp_n}{\dfrac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial x_n}}.$$

Soit $\xi = \text{const.}$ cette intégrale, ξ étant une fonction des variables p_n, x_1, x_n, et pouvant contenir $x_2, .., x_{n-1}$ comme constantes. Substituons cette fonction à la place de f_{n-1} dans une des autres équations (δ), dans la seconde, par exemple, et substituons de nouveau le résultat à la place de f_{n-1} dans la même équation. Nous aurons de cette manière

$$(p_2 - \omega_2^{(n-3)},\ \xi) = \xi', \quad (p_2 - \omega_2^{(n-3)},\ \xi') = \xi''.$$

Si ξ' s'exprime en fonction de ξ, x_2, $x_3, \ldots, x_n$, l'intégrale commune des deux premières équations (δ) sera déterminée comme intégrale de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$(\xi') \qquad \frac{d\xi}{dx_2} = \xi',$$

entre les deux variables ξ et x_2, les quantités $x_3, .., x_n$ pouvant y être considérées comme des constantes. Dans le cas contraire, ξ'' s'exprimera nécessairement en fonction de ξ, ξ' et de x_2, $x_3, .., x_n$; alors l'intégrale commune cherchée des deux premières équations (δ) sera une des deux intégrales premières de l'équation du second ordre

$$(\xi'') \qquad \frac{d^2\xi}{dx_2^2} = \xi'',$$

entre les deux variables ξ et x_2, puisque l'on doit considérer $x_3, \ldots, x_n$ comme des constantes. En outre, dans le second membre de l'équation, on devra remplacer ξ' par $\frac{d\xi}{dx_2}$.

Soit

$$\xi_1 = \text{const.}$$

une intégrale de l'une ou de l'autre des deux équations précédentes, et par suite une intégrale commune des deux premières équations (δ). Si elle est tirée de l'équation du premier ordre (ξ'), ξ_1 sera une fonction de $\xi, x_2, x_3, \ldots, x_n$; si elle est tirée de l'équation du second ordre (ξ''), ξ_1 contiendra en plus la dérivée $\frac{d\xi}{dx_2}$, qu'il faudra remplacer par la fonction ξ'.

Ensuite, pour déterminer une intégrale commune des trois premières équations (δ), formons les fonctions

$$(p_3 - \omega_3^{(n-4)}, \xi_1) = \xi_1', \quad (p_3 - \omega_3^{(n-4)}, \xi_1') = \xi_1''.$$

Actuellement, ou ξ_1' s'exprimera en fonction de $\xi_1, x_3, \ldots, x_n$; ou, si non, ξ_1'' s'exprimera nécessairement au moyen de $\xi_1, \xi_1', x_3, \ldots, x_n$. Dans le premier cas, on déterminera l'intégrale de l'équation du premier ordre, entre les variables ξ_1 et x_3,

$$\frac{d\xi_1}{dx_3} = \xi_1';$$

dans le second cas, on déterminera une des intégrales premières de l'équation du second ordre, entre les mêmes variables,

$$\frac{d^2\xi_1}{dx_3^2} = \xi_1'',$$

dans le second membre de laquelle on aura remplacé ξ_1' par $\frac{d\xi_1}{dx_3}$. Soit

$$\xi_2 = \text{const.}$$

une intégrale de l'une ou de l'autre de ces deux équations, et par suite une intégrale commune des trois premières équations (δ). Si elle est tirée de l'équation du second ordre, alors dans la fonction ξ_2 on substituera ξ_1' à la place de $\frac{d\xi_1}{dx_3}$.

De même, au moyen de ξ_2, on déterminera une intégrale commune ξ_3 des quatre premières équations (δ); et ainsi de suite. Supposons que, en continuant ce calcul, nous ayons déterminé

une intégrale commune ξ_{n-3} des $n-2$ premières équations (δ); pour déterminer enfin une intégrale commune de toutes les équations de ce système, calculons les fonctions

$$(p_{n-1} - \omega_{n-1},\ \xi_{n-3}) = \xi_{n-3}',\quad (p_{n-1} - \omega_{n-1},\ \xi_{n-3}') = \xi_{n-3}''.$$

L'intégrale commune cherchée du système d'équations (δ) se trouvera par l'intégration de l'équation du premier ordre

$$\frac{d\xi_{n-3}}{dx_{n-1}} = \xi_{n-3}',$$

si ξ_{n-3}' est une fonction de ξ_{n-3}, x_{n-1}, x_n; dans le cas contraire, ce sera l'une des deux intégrales premières de l'équation du second ordre

$$\frac{d^2\xi_{n-3}}{dx_{n-1}^2} = \xi_{n-3}'',$$

où ξ_{n-3}'' sera nécessairement une fonction de ξ_{n-3}, ξ_{n-3}', x_{n-1}, x_n, dans laquelle on remplacera ξ_{n-3}' par $\frac{d\xi_{n-3}}{dx_{n-1}}$. Il est clair, en outre, que x_n devra être considéré comme une constante dans les deux équations. Soit donc

$$f_{n-1} = \text{const.} = a_{n-1}$$

une intégrale de l'une ou de l'autre des deux équations précédentes, et par suite une intégrale commune des équations (δ). Si elle est tirée de l'équation du second ordre, on devra alors y remplacer de nouveau $\frac{d\xi_{n-3}}{dx_{n-1}}$ par ξ_{n-3}'.

82. Après la détermination de l'équation $f_{n-1} = a_{n-1}$, le problème s'achève de la manière suivante. Tirons de cette équation la valeur de p_n en fonction de $x_1, .., x_n, a, a_1, .., a_{n-1}$, et soit

$$p_n = \omega_n$$

cette valeur. En la substituant dans les fonctions $\omega_1^{(n-2)}, .., \omega_{n-1}$, que nous désignerons, après la substitution, par $\omega_1^{(n-1)}, .., \omega_{n-1}'$, nous aurons

$$(p)\quad p_1 = \omega_1^{(n-1)},\ p_2 = \omega_2^{(n-2)}, .., \ p_{n-1} = \omega_{n-1}',\ p_n = \omega_n,$$

pour les expressions des dérivées partielles de la fonction cherchée z au moyen des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et des $n-1$ constantes arbitraires $a_1, .., a_{n-1}$. Ces expressions, d'après la méthode même qui a servi à les déterminer, doivent remplir nécessairement les conditions d'intégrabilité de la forme

$$(q) \qquad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i},$$

pour toutes les valeurs de i et de k prises dans la suite des nombres 1, 2,.., n. En les substituant donc dans la formule générale de la différentielle de la fonction cherchée

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n,$$

on aura

$$dz = \omega_1^{(n-1)} dx_1 + \omega_2^{(n-2)} dx_2 + \ldots + \omega_n dx_n.$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$z = \int (\omega_1^{(n-1)} dx_1 + \ldots + \omega_n dx_n) + a_n,$$

pour l'expression cherchée de la fonction z des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, renfermant n constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_n$; c'est-à-dire pour l'intégrale complète du problème, de laquelle, par la variation des constantes arbitraires, on pourra déduire l'intégrale la plus générale.

83. Nous avons avancé tout à l'heure que les expressions (p) des dérivées partielles $p_1, \ldots, p_n$, d'après la manière même dont elles ont été trouvées, doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité (q). Démontrons cette proposition.

Les expressions (p) sont tirées du système d'équations

$$(f) \qquad \begin{cases} H(x_1, .., x_n, p_1, .., p_n) = a, \\ f_1(x_1, .., x_n, p_2, .., p_n, a) = a_1, \\ f_2(x_1, .., x_n, p_3, .., p_n, a, a_1) = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-1}(x_1, .., x_n, p_n, a, a_1, .., a_{n-2}) = a_{n-1}. \end{cases}$$

En substituant la valeur de a, déterminée par la première équation, dans toutes les autres équations; puis la valeur de a_1, déterminée par la seconde équation, dans toutes les suivantes, et éliminant de même les constantes $a_2, .., a_{n-2}$, les premiers membres $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ des équations précédentes deviendront des fonctions des seules variables $x_1, .., x_n, p_1, \ldots, p_n$, et nous les désignerons respectivement par $H_1, H_2, .., H_{n-1}$. Nous aurons ainsi, au lieu du système précédent, cet autre équivalent

$$(h) \qquad H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, .., \quad H_{n-1} = a_{n-1}.$$

Il est évident que du système (h) on déduira les mêmes va-

leurs de $p_1, .., p_n$ que du système (f); donc, en vertu du Théorème II du §. 17, il suffira de démontrer que les premiers membres des équations (k) vérifient identiquement la condition

$$(a) \qquad (H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs $0, 1, .., n-1$ attribuées aux indices i et k: alors la proposition en question sera établie.

84. Démontrons d'abord que les premiers membres des équations (f) vérifient identiquement la condition

$$(b) \qquad (f_i, f_k) = 0,$$

pour les mêmes valeurs de i et de k, en supposant en outre $f_0 = H$.

En effet, les $n-1$ systèmes d'équations simultanées, dont l'intégration nous a fourni les équations (f), sont, comme nous l'avons vu, des conséquences immédiates des $n-1$ autres systèmes d'équations simultanées données au §. 20, et dont le type général est

$$(c) \qquad (p_{i+1} - \omega_{i+1}, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,$$

ou, en supposant $i < k$,

$$(c) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial x_{k+1}} - \sum_{m=i+2}^{m=k+1} \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m} \\ &\quad + \sum_{m=k+2}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial x_m} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, les intégrales des deux systèmes en question sont fournies par les mêmes équations (f). En prenant donc, parmi ces dernières, deux équations

$$f_i(x_1, .., x_n, p_{i+1}, .., p_n, a_1, .., a_{i-1}) = a_i,$$

$$f_k(x_1, .., x_n, p_{k+1}, .., p_n, a_1, .., a_{k-1}) = a_k,$$

et tirant de la première la valeur de p_{i+1} en fonction de $p_{i+2}, .., p_n, x_1, .., x_n$, et de la seconde la valeur de p_{k+1} en fonction de $p_{k+2}, .., p_n, x_1, .., x_n$; si l'on désigne ces valeurs respectivement par

$$p_{i+1} = \omega_{i+1}, \quad p_{k+1} = \omega_{k+1},$$

la substitution de ces valeurs des fonctions $\omega_{i+1}, \omega_{k+1}$ réduira l'équation (c) à une identité. Or il est aisé de voir que cette

dernière n'est autre chose que l'équation (*b*) écrite sous une autre forme. En effet, si l'on met dans l'équation $f_i = a_i$ la valeur $p_{i+1} = \omega_{i+1}$, et dans l'équation $f_k = a_k$ la valeur $p_{k+1} = \omega_{k+1}$, on changera ces équations en identités. En désignant donc par t une des variables qui entrent dans ω_{i+1} et dans ω_{k+1}, et différentiant les identités en question par rapport à cette variable, il vient

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial t} = -\frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial t} = -\frac{\partial f_k}{\partial t}.$$

Si donc on multiplie l'égalité (*c*) par $\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}$, on trouve

$$-\sum_{m=i+1}^{m=k} \frac{\partial f_i}{\partial p_m} \frac{\partial f_k}{\partial x_m} + \sum_{m=k+1}^{m=n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_m} \frac{\partial f_k}{\partial p_m} - \frac{\partial f_i}{\partial p_m} \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \right) = 0.$$

Or cette dernière équation n'est autre chose que le développement de la condition qui était écrite symboliquement sous la forme (*b*).

85. Enfin, pour démontrer que les conditions (*a*) sont satisfaites dès que les conditions (*b*) le sont, il suffit de remarquer que les premières s'expriment sous forme linéaire au moyen des secondes. En effet, d'après ce que nous avons expliqué plus haut sur le passage des équations (*f*) aux équations (*k*), on a

$$H_i = f_i(x_1, .., x_n, p_{i+1}, .., p_n, H, H_1, .., H_{i-1}),$$

$$H_k = f_k(x_1, .., x_n, p_{k+1}, .., p_n, H, H_1, .., H_{k-1}).$$

Cette remarque faite, démontrons d'abord qu'une expression de la forme (f_i, H_k) s'exprime sous forme linéaire au moyen des fonctions qui forment les premiers membres des équations (*b*). Car, d'après la formule (8) du §. 16, on a

$$[f_i, H_k] = (f_i, f_k) + \sum_{k'=0}^{k'=k-1} (f_i, H_{k'}) \frac{\partial f}{\partial H_{k'}},$$

où l'on suppose évidemment $k' < k$.

En appliquant la même formule au développement de $(f_i, H_{k'})$, nous l'exprimerons au moyen de $(f_i, f_{k'})$ et de $(f_i, H_{k''})$, où $k'' < k'$. En continuant de la sorte nous exprimerons finalement $[f_i, H_k]$ sous forme linéaire, au moyen de

$$(f_i, f_k), (f_i, f_{k'}), (f_i, f_{k''}), .., (f_i, f_0) = (f_i, H),$$

et comme, en vertu de (*b*), ces dernières quantités sont identiquement nulles, il s'ensuit de là que

$$(d) \qquad [f_i, H_k] = 0,$$

pour toutes les valeurs 0, 1, 2,.., $n-1$ des indices i et k.

De plus, en vertu de la formule (5) du §. 16, on a

$$(H_i, H_k) = (f_i, f_k) + \sum_{k'=0}^{k'=k-1} (f_i, H_{k'}) \frac{\partial f_k}{\partial H_{k'}}$$
$$+ \sum_{i'=0}^{i'=i-1} (H_{i'}, f_k) \frac{\partial f_i}{\partial H_{i'}} + \sum_{i'=0}^{i'=i-1} \sum_{k'=0}^{k'=k-1} (H_{i'}, H_{k'}) \frac{\partial f_i}{\partial H_{i'}} \frac{\partial f_k}{\partial H_{k'}}.$$

Or, en vertu des équations (*b*) et (*d*), les trois premiers termes du second membre de l'équation précédente se réduisent à zéro; par conséquent, (H_i, H_k) s'exprime linéairement au moyen des symboles $(H_{i'}, H_{k'})$, dans lesquels $i' < i$, $k' < k$. En continuant ainsi, on exprimera finalement (H_i, H_k) sous forme linéaire au moyen des expressions qui forment les premiers membres des égalités (*b*) et (*d*), et qui sont identiquement nulles. On a, par conséquent,

$$(H_i, H_k) = 0$$

pour toutes les valeurs de i et de k prises dans la suite des nombres 0, 1, 2,.., $n-1$.

86. Le mode de démonstration qui vient de nous servir pour établir le théorème précédent, peut s'employer absolument de même pour faire voir que, si toutes les fonctions qui forment les premiers membres des équations (*f*), prises deux à deux, vérifient l'identité

$$(f_i, f_k) = 0,$$

cette identité subsistera lorsqu'on remplacera, dans l'une des fonctions f_i, f_k, ou dans toutes les deux, une ou plusieurs des constantes arbitraires qui y entrent par les fonctions qui leur sont égales en vertu des équations (*f*); ou, plus généralement, cette identité subsistera, quelque transformation que l'on ait fait subir aux fonctions f_i, f_k en vertu des équations (*f*).

§. 22.

87. Pour apprécier la valeur théorique de la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre que nous venons d'exposer, on ne peut pas se dispenser de prendre

en considération la question suivante: Combien y a-t-il en tout d'intégrations à effectuer pour obtenir l'intégrale complète, dans le cas de n variables indépendantes, quand la fonction inconnue, qui en dépend, n'entre dans l'équation donnée que par ses dérivées partielles du premier ordre?

La méthode de Jacobi conduit successivement à différents systèmes d'équations simultanées de la forme

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{F(x, y, .., u)} = \frac{dy}{f(x, y, .., u)} = \ldots = \frac{du}{\varphi(x, y, .., u)},$$

dans lesquels le nombre des variables $x, y, \ldots, u$ s'abaisse graduellement; et elle n'exige pas l'intégration complète de ces équations, mais seulement la détermination d'une intégrale de chaque système. En général, la difficulté de satisfaire à cette condition dépend de l'ordre de l'équation à intégrer, lequel se détermine d'après le nombre des constantes arbitraires introduites par l'intégration complète d'un système de la forme (α), et par suite est égal au nombre des variables $x, y, \ldots, u$, diminué d'une unité. Les systèmes de la forme (α), qui se rencontrent dans la méthode de Jacobi, se divisent en principaux et auxiliaires. Les premiers sont chacun d'un ordre complétement déterminé, non susceptible d'abaissement, tandis que, pour les seconds, on ne peut indiquer d'avance que la limite supérieure à laquelle leur ordre peut s'élever.

Pour faire comprendre la distinction entre les systèmes principaux et les systèmes auxiliaires, il suffit de montrer un système appartenant à chacune de ces deux classes. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu, par exemple, que, pour déterminer la fonction f_2, qui devait satisfaire simultanément aux deux équations

$$(a) \qquad (p_1 - \omega_1', f_2) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f_2) = 0,$$

il fallait trouver une des intégrales de l'un des systèmes d'équations

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial \omega_1'}{\partial p_3}} = \ldots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_1'}{\partial p_n}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_3}} = \ldots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_n}},$$

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_3}} = \ldots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_n}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}} = \ldots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_n}},$$

qui sont chacun de l'ordre $n-4$, cet ordre ne pouvant être

abaissé. Ce système et les systèmes analogues sont dits **principaux**.

Lorsqu'on a trouvé une intégrale $\varphi = \text{const.}$ de l'un des systèmes (*b*), du premier par exemple, on obtient alors, en substituant cette intégrale dans la seconde équation (*a*), une série d'intégrales du premier système (*b*),

$$\varphi = \text{const.}, \quad \varphi_1 = \text{const.}, \ldots, \quad \varphi_i = \text{const.}, \ldots$$

Mais comme le nombre des intégrales distinctes qu'admet ce système est égal à son ordre $2n-4$, il faudra nécessairement que, dans la série $\varphi, \varphi_1, \ldots$, on rencontre une fonction qui s'exprime au moyen des précédentes. Supposons que φ_i soit la première qui soit dans ce cas; son indice i ne devra pas surpasser $2n-4$. Nous pourrons alors écrire immédiatement le système d'équations

$$(c) \qquad \frac{dx_2}{1} = \frac{d\varphi}{\varphi_1} = \ldots = \frac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_i},$$

qui sera de l'ordre i, et dont une des intégrales sera la valeur cherchée de f_2.

Le système (*c*) est dit auxiliaire; tout ce que l'on sait sur ce système, c'est que son ordre i ne peut pas être plus élevé que l'ordre $2n-4$ des équations principales correspondantes (*b*). Mais il est clair que l'ordre de ce système peut être inférieur à cette limite, et qu'il doit varier généralement, quand, au lieu de l'intégrale $\varphi = \text{const.}$, on prend une autre intégrale du premier système (*b*), ou bien une intégrale du second système (*b*).

88. D'après ce que nous venons d'expliquer, il est maintenant facile de répondre à la question posée au commencement de l'art. précédent, en nous plaçant dans le cas le plus désavantageux, c'est-à-dire dans celui où tous les systèmes auxiliaires sont de l'ordre le plus élevé possible.

Dans ce cas, d'après ce qui a été vu au paragraphe précédent, la méthode de Jacobi exige la détermination d'une seule intégrale de chacun des $\frac{n(n-1)}{2}$ systèmes d'équations, dont il y a

1 de l'ordre $2n-2$, servant à déterminer la fonction f_1,
2 . . . . . $2n-4$, ... f_2,
3 . . . . . $2n-6$, ... f_3,
. . . . . .
i . . . . . $2n-2i$, ... f_i,
. . . . . .
$n-1$ . . . . . 2, ... f_{n-1}.

Remarquons d'ailleurs que le cas le plus défavorable, supposé dans ce tableau, ne se rencontre pas d'ordinaire dans les applications, l'ordre des équations auxiliaires étant le plus souvent moindre que la limite supérieure. Pour ce qui est du nombre total $\frac{n(n-1)}{2}$ des intégrales exigées, lequel, étant un nombre triangulaire, croît assez rapidement avec le nombre n des variables indépendantes, on peut faire à ce sujet les remarques suivantes. Le problème qui nous occupe est, par sa nature même, indéterminé, et la théorie de Jacobi présente, à chaque phase du développement du calcul, une latitude considérable dans le choix de l'équation dont on doit déterminer une intégrale pour faire faire au calcul du problème un pas en avant. D'après cela, dans un grand nombre de cas, on peut choisir des équations dont les intégrales se présentent d'une manière évidente; de sorte que le total général $\frac{n(n-1)}{2}$ des intégrations se réduit à un nombre beaucoup moindre d'intégrations à effectuer réellement.

89. Pour montrer une application de la méthode de Jacobi sous la forme exposée dans le paragraphe précédent, et pour donner en même temps un exemple des simplifications que nous venons d'indiquer, traitons encore un cas particulier.

Soit l'équation du premier ordre

$$t\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\left\{\left[u + t\left(\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial z}{\partial t} + (4w+5v)\frac{\partial z}{\partial v} + (3w+2v)\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y}\right\} = 0,$$

aux dérivées partielles de la fonction z des variables indépendantes t, u, v, w, y.

Introduisons les notations

$$y = x_1, \quad w = x_2, \quad v = x_3, \quad u = x_4, \quad t = x_5,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = p_2, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = p_3, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = p_4, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = p_5,$$

et tirons de l'équation proposée la valeur de $\frac{\partial z}{\partial y}$ ou p_1, que nous représenterons par ω_1. Nous aurons

$$p_1 = -(3x_2 + 2x_3)p_2 - (4x_2 + 5x_3)p_3 - [x_4 + x_5(p_2 - p_3]p_5 - \frac{x_5 p_5^2}{p_4}$$

$$= \omega_1.$$

Pour obtenir les quatre équations

$$f_1(p_2, p_3, p_4, p_5, x_1, \ldots, x_5) = a_1,$$

$$f_2(p_3, p_4, p_5, x_1, \ldots, x_5, a_1) = a_2,$$

$$f_3(p_4, p_5, x_1, \ldots, x_5, a_1, a_2) = a_3,$$

$$f_4(p_5, x_1, \ldots, x_5, a_1, a_2, a_3) = a_4,$$

($a_1, \ldots, a_4$ désignant des constantes arbitraires), qui, jointes à la proposée, doivent fournir les valeurs de $p_1, \ldots, p_5$ pour lesquelles $p_1 dx_1 + \ldots + p_5 dx_5$ deviendra une différentielle exacte, il faut, d'après la théorie que nous avons exposée procéder comme il suit:

On déterminera la fonction f_1 comme intégrale particulière de l'équation linéaire

$$(p_1 - \omega_1, f_1) = 0,$$

c'est-à-dire comme intégrale du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_5}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_5}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{dp_5}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_5}},$$

au moyen desquelles on trouve

$$dx_1 = \frac{d(p_2 - p_3)}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}} = \frac{d(p_2 - p_3)}{-(p_2 - p_3)},$$

ce qui donne immédiatement, en intégrant,

$$f_1 = (p_2 - p_3)\, e^{x_1} = a_1.$$

En tirant de là la valeur de p_2, que nous désignerons par ω_2, et la portant dans l'expression de ω_1, qui devient après la substitution ω_1', il viendra

$$p_2 = p_3 + a_1 e^{-x_1} = \omega_2, \quad p_1 = \omega_1'.$$

La fonction f_2 devra être déterminée comme intégrale particulière des équations linéaires simultanées

$$(p_2 - \omega_2, f_2) = 0, \quad (p_1 - \omega_1', f_2) = 0.$$

L'intégration de la première de ces équations se déduit du système d'équations

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_3}} = \frac{dx_4}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_4}} = \frac{dx_5}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_5}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_4}} = \frac{dp_5}{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_5}}.$$

L'équation

$$\frac{dp_3}{dx_3} = \frac{\partial\omega_2}{\partial x_3} = 0$$

donne l'intégrale

$$\varphi = p_3 = \text{const.}$$

En la substituant à f_2 dans la seconde des équations linéaires précédentes, il vient

$$(p_1 - \omega_1', \varphi) = \varphi_1 = \frac{\partial\omega_1'}{\partial x_3} = \frac{\partial\omega_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\omega_1}{\partial p_3}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}.$$

Or $\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3} = 0$; donc

$$\varphi_1 = -2p_2 - 5p_3 = -7\varphi - 2a_1 e^{-x_1}.$$

Donc, en vertu du paragraphe précédent, la valeur cherchée de la fonction f_3 s'obtiendra comme intégrale de l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx_1} + 7\varphi + 2a_1 e^{-x_1} = 0,$$

et l'on aura

$$f_3 = (\varphi + \tfrac{1}{5} a_1 e^{-x_1})\, e^{7x_1} = a_2.$$

Tirant de là l'expression de $p_3 = \omega_3$, et la substituant dans ω_1', que nous désignerons, après la substitution, par ω_1'', nous aurons

$$p_3 = a_2 e^{-7x_1} - \tfrac{1}{5} a_1 e^{-x_1} = \omega_3, \quad p_2 = \omega_2, \quad p_1 = \omega_1''.$$

La fonction f_3 devra être déterminée comme intégrale des équations linéaires simultanées

$$(p_3 - \omega_3, f_3) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f_3) = 0, \quad (p_1 - \omega_1'', f_3) = 0.$$

L'intégration de la première de ces équations se ramène à celle du système d'équations

$$\frac{dx_3}{1} = \frac{dx_4}{-\frac{\partial\omega_3}{\partial p_4}} = \frac{dx_5}{-\frac{\partial\omega_3}{\partial p_5}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_3}{\partial x_4}} = \frac{dp_5}{\frac{\partial\omega_3}{\partial x_5}}.$$

L'équation $\frac{dp_4}{dx_3} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_4} = 0$ donne l'intégrale

$$\psi = p_4 = \text{const.}$$

En la substituant dans la seconde des équations linéaires précédentes, on trouve identiquement

$$(p_2 - \omega_2, \psi) = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_4} = 0.$$

En substituant ψ au lieu de f_3 dans la troisième de ces mêmes équations, il vient

$$(p_1 - \omega_1'', \psi) = \psi_1 = \frac{\partial \omega_1''}{\partial x_4} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_4},$$

à cause de $\frac{\partial \omega_2}{\partial x_4} = 0$, $\frac{\partial \omega_3}{\partial x_4} = 0$; d'où $\psi_1 = -p_5$. En substituant maintenant ψ_1 à f_3 dans la même équation, il vient

$$(p_1 - \omega_1, \psi_1) = \psi_2 = -\frac{\partial \omega_1''}{\partial x_5} = -\frac{\partial \omega_1}{\partial x_5} = (p_2 - p_3)p_5 + \frac{p_5^2}{p_4}$$

$$= -a_1 e^{-x_1}\psi_1 + \frac{\psi_1^2}{\psi}.$$

Par conséquent, la fonction cherchée f_3 s'obtient comme intégrale première de l'équation du second ordre

$$\frac{d^2\psi}{dx_1^2} + a_1 e^{-x_1}\frac{d\psi}{dx_1} - \frac{1}{\psi}\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)^2 = 0.$$

Si l'on multiplie le premier membre de cette équation par le facteur $dx_1 : \frac{d\psi}{dx_1}$, on le transforme en une différentielle exacte, dont l'intégrale donne une intégrale première de l'équation, et par suite on a la valeur

$$f_3 = \log \frac{\frac{d\psi}{dx_1}}{\psi} - a_1 e^{-x_1} = \text{const.}$$

En y remplaçant $\frac{d\psi}{dx_1}$ par ψ_1, on trouve

$$f_3 = \log \frac{\psi_1}{\psi} - a_1 e^{-x_1} = \log\left(-\frac{p_5}{p_4}\right) - a_1 e^{-x_1} = \text{const.}$$

Tirons de la valeur $p_4 = \omega_4$, et substituons-la dans ω_1'', qui devient alors ω_1'''. On a

$$p_4 = e^{-\text{const.}-a_1 e^{-x_1}} \cdot p_5 = a_2 e^{-a_1 e^{-x_1}} \cdot p_5 = \omega_4.$$

$$p_3 = \omega_3, \quad p_2 = \omega_2, \quad p_1 = \omega_1''.$$

On déterminera la fonction f_4 comme intégrale commune des équations linéaires simultanées

$$(p_4 - \omega_4, f_4) = 0, \quad (p_3 - \omega_3, f_4) = 0,$$

$$(p_2 - \omega_2, f_4) = 0, \quad (p_1 - \omega_1'', f_4) = 0.$$

L'intégration de la première de ces équations dépend du système

$$\frac{dx_4}{1} = \frac{dx_5}{-\frac{\partial \omega_4}{\partial p_5}} = \frac{dp_5}{\frac{\partial \omega_4}{\partial x_5}},$$

dont une des équations

$$\frac{dp_5}{dx_4} = \frac{\partial \omega_4}{\partial x_5} = 0$$

a pour intégrale

$$\theta = p_5 = \text{const.}$$

Substituant cette expression au lieu de f_4 dans les autres équations linéaires, les résultats de la substitution dans la seconde et dans la troisième se réduisent identiquement à zéro, et la quatrième donne

$$(p_1 - \omega_1'', \theta) = \frac{\partial \omega_1''}{\partial x_5} = -(p_2 - p_3) p_5 - \frac{p_5^2}{p_4}$$

$$= -a_1 e^{-x_1} \theta - \frac{1}{a_2} e^{a_1 e^{-x_1}} \cdot \theta = \theta_1.$$

Donc la valeur de f_4 sera déterminée comme intégrale de l'équation

$$\frac{d\theta}{dx_1} + (a_1 e^{-x_1} + \frac{1}{a_2} e^{a_1 e^{-x_1}}) \theta = 0,$$

d'où l'on conclut

$$f_4 = \log \theta - a_1 e^{-x_1} + \frac{1}{a_2} \int e^{a_1 e^{-x_1}} dx_1 = \text{const.}$$

De là résulte

$$p_5 = a_4 \left(e^{a_1 e^{-x_1}} - \frac{1}{a_2} \int e^{a_1 e^{-x_1}} dx_1 \right),$$

et par suite

$$p_4 = a_3 a_4 e^{-\frac{1}{a_3}\int e^{a_1 e^{-x_1}} dx_1};$$

on a, de plus,

$$p_3 = a_3 e^{-7x_1} - \frac{1}{3} a_1 e^{-x_1},$$

$$p_2 = a_3 e^{-7x_1} + \frac{2}{3} a_1 e^{-x_1},$$

et enfin

$$p_1 = -7(x_2 + x_3) a_3 e^{-7x_1} - \frac{a_1}{3}(2x_2 - x_3) e^{-x_1}$$

$$-a_4 \left\{ x_4 + \left(a_1 e^{-x_1} + \frac{1}{a_3} e^{a_1 e^{-x_1}} \right) x_5 \right\} e^{a_1 e^{-x_1} - \frac{1}{a_3}\int e^{a_1 e^{-x_1}} dx_1}.$$

En substituant ces valeurs de $p_1, \ldots, p_5$ dans l'expression $p_1 dx_1 + \ldots + p_5 dx_5$, on devra obtenir une différentielle exacte; et en effet, en intégrant cette expression, on trouve l'intégrale complète du problème sous la forme

$$z = \frac{a_1}{3}(2x_2 - x_3) e^{-x_1} + a_3 (x_2 + x_3) e^{-7x_1}$$

$$+ a_4 \left(a_3 x_4 + x_5 e^{a_1 e^{-x_1}} \right) e^{-\frac{1}{a_3}\int e^{a_1 e^{-x_1}} dx_1} + \text{const.}$$

Nous nous bornerons ici à cet exemple simple, d'autant que, dans ce qui va suivre, nous considérerons l'application des principes contenus dans la théorie de Jacobi à des questions plus générales, dont les exemples particuliers conduiront à employer les mêmes méthodes d'intégration.

Chapitre VI.

Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.

§. 23.

90. La méthode que nous avons exposée ramène le problème de l'intégration d'une équation quelconque aux dérivées partielles du premier ordre à l'intégration de plusieurs systèmes,

de forme particulière, d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, compatibles entre elles. Jacobi ne s'est pas occupé de la question générale de l'intégration de plusieurs équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre et de forme quelconque; mais il s'est borné au cas particulier qu'il a rencontré, et dans lequel, suivant la remarque qu'il a faite (Nova methodus, §. 18), on peut employer pour les intégrations une méthode artificielle, fondée principalement sur le Théorème I du §. 17. Et cependant il ne restait que peu de chose à ajouter pour arriver à la solution complète de la question générale. Bour a montré, en effet, dans son Mémoire „Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre" (Journal de l'Ecole Polytechnique, 39e Cahier), que l'intégration des équations simultanées de forme quelconque aux dérivées partielles du premier ordre se ramène très-simplement à l'intégration d'équations simultanées de la forme de celles auxquelles Jacobi a limité ses recherches.

Pour envisager d'un point de vue commun les question de l'intégration d'une ou de plusieurs équations aux dérivées partielles du premier ordre, revenons en quelques mots sur la signification primitive du premier de ces deux problèmes, lequel, d'après son étendue, forme un cas particulier du second, tandis que, d'après la méthode de résolution, le second est renfermé comme cas plus simple dans le premier.

91. Une fonction inconnue z des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ peut être déterminée, lorsqu'on donne les expressions de toutes ses dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n,$$

en fonction des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$. Pour cela, il faut seulement s'assurer que les expressions données de $p_1, \ldots, p_n$ conviennent aux dérivées partielles d'une même fonction, c'est-à-dire qu'elles satisfont aux conditions

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}, \tag{1}$$

pour toutes les valeurs de i et de k prises dans la série $1, 2, \ldots, n$.

Dans le cas où ces conditions sont satisfaites, la fonction z s'obtient en intégrant l'expression de sa différentielle

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n. \tag{2}$$

92. Si, au lieu des valeurs explicites de $p_1, .., p_n$, en fonction des variables indépendantes, on donne n équations

$$H = 0, \quad H_1 = 0, .., \quad H_{n-1} = 0, \tag{3}$$

dont les premiers membres sont des fonctions de $x_1, .., x_n, p_1, .., p_n$, il existe alors des caractères analytiques généraux pour reconnaître si l'on peut résoudre algébriquement ces équations par rapport aux n inconnues $p_1, .., p_n$, et si les expressions de ces quantités vérifient les conditions (1).

Si une ou plusieurs des fonctions $H, H_1, .., H_{n-1}$ sont exprimables au moyen des autres et des variables $x_1, .., x_n$, alors ou les équations (3) sont insuffisantes pour la détermination des inconnues $p_1, ..., p_n$, ou elles sont contradictoires. Supposons, en effet, que l'on ait

$$H_i = \varphi(x_1, .., x_n, H, H_1, ..).$$

En vertu des équations données, nous aurons

$$H_i = \varphi(x_1, .., x_n, 0, 0, ...) = 0.$$

Si cette relation est identique, il faudra alors supprimer une unité du nombre des équations données, qui deviennent alors insuffisantes pour la détermination des n inconnues $p_1, ..., p_n$. Si la relation $\varphi = 0$ n'est pas identique, alors elle contredit l'hypothèse de l'indépendance des variables $x_1, .., x_n$.

Nous avons établi plus haut (§. 3) le caractère analytique indiqué par Jacobi, et d'après lequel on peut toujours juger si parmi les fonctions $H, .., H_{n-1}$ il s'en trouve quelqu'une qui soit dans le cas de celle que nous désignions tout à l'heure par H_i. Pour cela, en considérant $H, ..., H_{n-1}$ comme des fonctions des seules variables $p_1, ..., p_n$, on formera le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_n} \end{vmatrix} = \Delta. \tag{4}$$

Si Δ se réduit identiquement à zéro, alors une ou plusieurs des équations $H = 0, ..., H_{n-1} = 0$ sont contradictoires avec les autres, ou bien identiques avec les autres.

93. Mais supposons que Δ ne soit pas nul; alors se présente

cette seconde question: les expressions de $p_1, \ldots, p_n$, tirées des équations (3), satisfont-elles aux conditions (1)?

Supposons que les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$, tirées des équations (3), vérifient les conditions (1). En remettant ces valeurs à la place de $p_1, \ldots, p_n$ dans les équations (3), on changera celles-ci en identités. Si l'on prend deux des identités ainsi obtenues,

$$H_i = 0, \quad H_k = 0,$$

et qu'on les traite exactement comme nous avons traité, au §. 11, les identités

$$F_i = a_i, \quad F_k = a_k,$$

nous en conclurons de la même manière que les fonctions H_i, H_k doivent satisfaire à la condition

$$(H_i, H_k) = 0, \tag{5}$$

pour toutes les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$ des indices i et k.

Réciproquement, si les conditions (5) sont satisfaites, alors, en vertu du Théorème II du §. 17, nous en conclurons que les expressions de $p_1, \ldots, p_n$, tirées des équations (3), satisfont à la condition (1); par conséquent, il n'y aura qu'à les substituer dans l'expression (2), dont l'intégration donnera la fonction z *).

94. Remarquons que les conditions (5) peuvent être satisfaites ou identiquement, ou en vertu de quelques-unes des équations données (3). Dans le premier cas, il est évident qu'au lieu des équations données (3) on aurait pu prendre des équations plus générales, en écrivant dans leurs seconds membres des constantes arbitraires à la place de zéro. Dans le second cas, on ne pourra généraliser de cette manière que celles des équations (3) qui n'auront pas été prises en considération pour la vérification des équations (5).

95. La question précédente, qui est entièrement déterminée,

---

*) Bour, dans son Mémoire cité plus haut, donne constamment à la condition (5) le nom de Théorème de Liouville, et ajoute même que ce géomètre à démontré ce théorème dans le cours qu'il a professé en 1853 au Collége de France. D'autre part, dans le Mémoire de Donkin: „On a class of differential Equations, etc.", publié dans les Philosophical Transactions (1854, Part I), nous trouvons ce même théorème (Theorem 12, p. 83) mentionné (p. 71) parmi les résultats nouveaux obtenus par l'Auteur.

devient indéterminée si, au lieu du système complet des n équations (3), on n'a qu'un système incomplet de m équations entre les dérivées partielles du premier ordre, en supposant $m<n$. Le cas de $m=1$ constitue le problème de l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre. Nous avons vu plus haut que la solution de ce problème, considéré au point de vue théorique, est toujours possible, c'est-à-dire que, étant donnée l'équation

$$H=0,$$

entre les variables $x_1,\ldots, x_n, p_1,\ldots, p_n$, on peut toujours déterminer $n-1$ autres équations entre les mêmes variables,

$$H_1=\text{const.}=a_1,\ldots,\quad H_{n-1}=\text{const.}=a_{n-1},$$

dont les premiers membres satisfassent à la condition

$$(H_i, H_k)=0,$$

pour toutes les valeurs $0, 1,\ldots, n-1$ des indices i et k.

Si l'on suppose maintenant que le nombre m des équations données aux dérivées partielles du premier ordre soit plus grand que l'unité, on arrive alors à la question de l'intégration simultanée de plusieurs équations aux dérivées partielles du premier ordre. Il est facile de voir que, pour un même nombre de variables indépendantes, non-seulement ce nouveau problème n'est pas plus compliqué que le premier, mais encore il est plus simple; et que la théorie de la résolution du second problème découle tout naturellement de la méthode de résolution du premier.

96. La différence essentielle entre les deux questions consiste en ce que, dans le cas d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, l'intégration est toujours possible, et que la théorie générale de cette intégration ne limite en rien le choix de l'équation proposée; tandis que, dans le cas où l'on donne plusieurs équations aux dérivées partielles du premier ordre, elles n'admettent une intégrale commune que lorsqu'elles remplissent certaines conditions.

En effet, si l'on choisit arbitrairement m équations

$$(6)\qquad H_1=0,\quad H_2=0,\ldots,\quad H_m=0,$$

entre les variables $x_1,\ldots, x_n, p_1,\ldots, p_n$, il pourra exister entre elles deux sortes de cas d'incompatibilité: incompatibilité algébrique et incompatibilité d'intégration. Le premier cas a lieu,

lorsqu'une ou plusieurs des fonctions $H_1, \ldots, H_m$ s'expriment en fonction des autres et des variables $x_1, \ldots, x_n$; alors une ou plusieurs des équations (6) ou seront des identités, ou seront contradictoires avec les autres.

Si les équations données ne sont pas affectées de cette cause d'incompatibilité, il faut encore s'assurer si elles appartiennent à un système de n équations d'où l'on puisse tirer pour $p_1, \ldots, p_n$ des valeurs vérifiant les conditions (1); c'est-à-dire s'assurer s'il est possible d'obtenir une intégrale satisfaisant simultanément aux équations données. Pour cela, il n'y aura qu'à examiner si, pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots, m$ des indices i et k, les conditions

$$(7) \qquad (H_i, H_k) = 0$$

peuvent être satisfaites et de quelle manière elles peuvent l'être.

97. Si les équations (7) sont satisfaites soit identiquement, soit en vertu des équations données (6), alors l'intégrale qui satisfait à chacune de ces dernières, et qui renferme dans son expression, outre les variables indépendantes, $n-m+1$ constantes arbitraires, se trouvera par les procédés que nous avons exposés en traitant de l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre. En effet, pour résoudre le problème de cette manière, il suffira de compléter le système donné par $n-m$ équations

$$(8) \qquad H_{m+1} = \text{const.} = a_1, \quad H_{m+2} = \text{const.} = a_2, \ldots, \quad H_n = \text{const.} = a_{n-m},$$

dont les premiers membres représentent des fonctions indépendantes entre elles de $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, lesquelles devront être déterminées de manière à satisfaire à la condition

$$(H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs $i = 1, 2, \ldots, n$, et $k = m+1, m+2, \ldots, n$.

D'après cela, la fonction H_{m+1} peut être déterminée par la méthode exposée au §. 18, comme intégrale commune du système des m équations linéaires

$$(H_1, H_{m+1}) = 0, \quad (H_2, H_{m+1}) = 0, \ldots, \quad (H_m, H_{m+1}) = 0.$$

On déterminera de la même manière les premiers membres des autres équations (8); et ces équations, jointes aux équations données, feront connaître les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$, lesquelles renfermeront $n-m$ constantes arbitraires. Par suite, l'intégrale cherchée z contiendra $n-m+1$ constantes arbitraires.

98. Si la méthode précédente se trouve inapplicable (dans les circonstances indiquées dans les Remarques du §. 18, art. 49 et 51), ou si, pour d'autres motifs, on veut ramener les équations qu'il faut intégrer à contenir le moindre nombre possible de variables; on exprimera alors, à l'aide des équations (6), $p_1,.., p_m$ en fonction de $p_{m+1},.., p_n, x_1,.., x_n$. Soient

$$p_1 = \omega_1, \quad p_2 = \omega_2,.., \quad p_m = \omega_m$$

les expressions trouvées.

Observons qu'en vertu du Théorème III (§. 17) on doit avoir les identités

$$(9) \qquad (p_i - \omega_i,\ p_k - \omega_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs 1, 2,.., m des indices i et k.

Pour déterminer ensuite l'équation

$$f_1(p_{m+1},.., p_n,\ x_1,.., x_n) = \text{const.} = a_1,$$

qui doit fournir la valeur $p_{m+1} = \omega_{m+1}$, (ω_{m+1} représentant une fonction de $p_{m+2},.., p_n, x_1,.., x_n, a_1$), formons le système des m équations linéaires simultanées

$$(p_1 - \omega_1,\ f_1) = 0, \quad (p_2 - \omega_2,\ f_1) = 0,.., \quad (p_m - \omega_m,\ f_1) = 0,$$

où le nombre des variables est $2(n-m)+1$. Leur intégrale commune pourra se trouver, à l'aide des identités (9), par la méthode exposée au §. 21.

Ayant déterminé la valeur $p_{m+1} = \omega_{m+1}$, substituons-la dans les fonctions $\omega_1,.., \omega_m$; en désignant par $\omega_1',.., \omega_m'$ ce que deviendront ces fonctions après la substitution, nous formerons le système des $m+1$ équations linéaires simultanées

$$(p_1 - \omega_1',\ f_2) = 0, \quad (p_2 - \omega_2',\ f_2) = 0,..,$$
$$(p_m - \omega_m',\ f_2) = 0, \quad (p_{m+1} - \omega_{m+1},\ f_2) = 0,$$

entre $2(n-m)-1$ variables. Leur intégrale commune f_2 donnera l'équation

$$f_2(p_{m+2},.., p_n,\ x_1,.., x_n,\ a_1) = \text{const.} = a_2,$$

d'où l'on tirera la valeur de p_{m+2}. Et ainsi de suite.

99. De cette manière, dans la détermination successive des $n-m$ intégrales demandées

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2,.., \quad f_{n-m} = a_{n-m},$$

le nombre des équations linéaires simultanées va en augmentant chaque fois d'une unité, tandis que le nombre des variables qui y entrent va en diminuant de deux unités. Il est évident qu'en procédant ainsi, l'intégrale commune des équations (6) que l'on obtiendra renfermera dans son expression un nombre de constantes arbitraires égal au nombre des variables indépendantes, moins le nombre des équations données diminué de l'unité, c'est-à-dire égal à $n-m+1$.

Une telle intégrale commune des équations (6) peut être appelée l'**intégrale complète**. On peut former par son moyen l'intégrale la plus générale, renfermant une fonction arbitraire de $n-m$ quantités variables, en se servant de la variation des constantes arbitraires (§§. 2—4).

On voit, par ce qui précède, que l'intégration des m équations simultanées (6), qui satisfont aux conditions (7), se fait en opérant exactement comme lorsqu'on veut achever l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$H_1 = 0,$$

après avoir déjà trouvé, au moyen de cette équation, les $m-1$ équations

$$H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \ldots, \quad H_m = 0,$$

satisfaisant aux conditions (7), et qu'on demande de déterminer encore les $n-m$ équations restantes

$$H_{m+1} = a_1, \ldots, \quad H_n = a_{n-m}.$$

A ce point de vue, il est clair que le problème de l'intégration simultanée de plusieurs équations est plus simple que le problème de l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, pour un même nombre de variables indépendantes, puisque le premier n'exige qu'une partie des calculs nécessaires pour la solution du second.

100. Examinons maintenant dans quels cas les équations proposées (6) sont incompatibles au point de vue de l'intégration, c'est-à-dire n'admettent pas d'intégrale commune; dans quelles circonstances il peut rester de l'incertitude sur leur compatibilité, et comment on doit procéder alors pour obtenir la solution la plus complète (c'est-à-dire renfermant le plus grand nombre possible de constantes arbitraires), si cette solution est possible.

Les équations (6) sont incompatibles, si les conditions (7) ne

peuvent être satisfaites ni identiquement, ni en vertu des équations données, ni en vertu des $n-m$ équations qui sont encore inconnues et qu'il faudrait trouver pour compléter le système donné (6). Ce cas aura lieu évidemment lorsqu'une ou plusieurs des expressions (H_i, H_k), qui entrent dans les conditions (7), se réduiront à des constantes quelconques différentes de zéro, ou à des fonctions de $x_1,..,x_n, H_1,..,H_m$, ne s'annulant pas en vertu des équations données.

Mais si quelques-unes des expressions qui entrent dans les conditions (7) sont de la forme

$$(H_i, H_k) = H_{m+1},.., \quad (H_i, H_{k'}) = H_{m+l},$$

$H_{m+1},.., H_{m+l}$ désignant des fonctions qui renferment non-seulement $x_1,.., x_n, H_1,.., H_m$, mais encore $p_1,.., p_n$, et qui ne s'annulent pas en vertu des équations données (6); alors on n'a plus le droit d'affirmer que les équations données soient incompatibles; car les fonctions $H_{m+1},...., H_{m+l}$ peuvent s'annuler en vertu de quelques-unes des $n-m$ équations, encore inconnues, qui doivent compléter le système donné (6).

Pour qu'il en soit effectivement ainsi, il suffit d'admettre que les équations

$$H_{m+1} = 0,.., \quad H_{m+l} = 0$$

fassent partie des $n-m$ équations inconnues. Or, en ajoutant de cette manière au système donné (6) l nouvelles équations, il faudra soumettre celles-ci à la même épreuve à laquelle on a dû soumettre les premières, c'est-à-dire examiner de quelle manière on peut satisfaire aux conditions

$$(H_i, H_k) = 0$$

pour les indices $i = 1, 2,.., m+l$, et $k = m+1,.., m+l$.

101. Le calcul des expressions qui entrent dans ces conditions forme la partie laborieuse de la méthode que nous exposons; par conséquent, il n'est pas inutile de remarquer que le Théorème I du §. 17 peut épargner une partie notable de ce calcul. Si l'on désigne par j un des nombres $1, 2,.., m$, on a, en vertu de ce théorème,

$$(H_j, H_{m+1}) = [H_j, (H_i, H_k)] = -[H_i, (H_k, H_j)] - [H_k, (H_j, H_i)];$$

par conséquent, si, dans la vérification des conditions (7), on a déjà trouvé $(H_k, H_j) = 0$, $(H_j, H_i) = 0$, il est évident, sans nouveau calcul, que l'on aura aussi

$$(H_j, H_{m+1}) = 0.$$

102. Supposons qu'en appliquant une ou plusieurs fois le procédé que nous venons d'indiquer, on ait ajouté au système donné (6) un certain nombre r d'équations. On devra se trouver alors dans un des trois cas suivants:

1°. Le nombre $m+r$ est égal à n, et les conditions $(H_i, H_k) = 0$ ne sont pas encore satisfaites pour toutes les valeurs $1, 2, .., m+r$ des indices i et k. Alors les équations proposées (6) ne pourront avoir une intégrale commune.

2°. Le nombre $m+r$ est moindre que n; mais une ou plusieurs des expressions qui entrent dans les conditions précédentes se réduisent à des constantes ou à des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, $H_1, .., H_{m+r}$, différentes de zéro. Alors les équations proposées sont encore incompatibles.

3°. Le nombre $m+r$ n'est pas plus grand que n, et toutes les conditions précédentes sont satisfaites. Alors, par la méthode exposée plus haut, on pourra déterminer une intégrale commune des équations (6), renfermant $n-m-r+1$ constantes arbitraires.

103. Après l'aperçu que nous venons de donner et qui renferme la théorie générale de la résolution des problèmes déterminés et indéterminés aux dérivées partielles du premier ordre, il reste encore à compléter cette théorie par quelques remarques et à l'éclaircir par des exemples.

Nous avons considéré les équations aux dérivées partielles du premier ordre avec une certaine restriction dans leur forme, savoir, en supposant que la fonction inconnue z n'entrait pas dans ces équations par elle-même, mais seulement par ses dérivées partielles $p_1, .., p_n$. Si la fonction z entre elle-même dans les équations proposées, ce cas pourra se ramener au précédent, au moyen de la transformation indiquée au §. 14. En effet, si l'on met l'intégrale z sous la forme d'une fonction implicite donnée par l'équation

$$(a) \qquad Y(x_1, .., x_n, z) = 0,$$

et qu'on différentie cette équation, il vient

$$(b) \quad p_m = -\frac{\frac{\partial Y}{\partial x_m}}{\frac{\partial Y}{\partial z}} = -\frac{q_m}{q_{n+1}}, \text{ en posant } q_m = \frac{\partial Y}{\partial x_m}, \; q_{n+1} = \frac{\partial Y}{\partial z}.$$

La substitution des valeurs de p_m, pour $m = 1, 2, \ldots, n$, dans les équations données ramènera celles-ci à une forme telle, qu'elles renfermeront les $n+1$ variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, z, et les dérivées partielles $q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}$ de la fonction Y, laquelle n'entrera pas elle-même dans ces équations. Lorsqu'on aura obtenu une intégrale des équations transformées, alors, en rejetant la constante qui y entre par simple addition et égalant cette intégrale à zéro, on aura une équation qui donnera une valeur de z satisfaisant aux équations non transformées, d'après ce qui a été démontré à la fin du §. 14.

104. Comme exemple d'application du théorème de Liouville ou de Donkin à des problèmes déterminés aux dérivées partielles du premier ordre, prenons la question géométrique suivante:

Considérons la ligne dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r = F(\sin\theta, \cos\theta), \tag{1}$$

θ étant l'angle polaire et r le rayon vecteur, et en chaque point de cette ligne élevons une perpendiculaire au rayon vecteur correspondant. On demande de trouver la trajectoire orthogonale de ces perpendiculaires, c'est-à-dire la courbe à laquelle ces perpendiculaires sont normales.

En prenant le pôle pour origine des coordonnées rectangulaires x, y, et l'axe polaire pour axe des x, l'équation d'une de ces perpendiculaires sera

$$x\cos\theta + y\sin\theta = F(\sin\theta, \cos\theta). \tag{2}$$

L'équation de la trajectoire cherchée donnera y en fonction de x, ou vice versa. Les tangentes des angles que font avec l'axe des x la normale à la courbe cherchée et la droite (2) ont respectivement pour expressions

$$-\frac{dx}{dy}, \quad -\frac{\cos\theta}{\sin\theta};$$

ces tangentes devant être égales, l'équation différentielle du problème sera

$$\sin\theta . dx - \cos\theta . dy = 0. \tag{3}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à exprimer $\sin\theta$ et $\cos\theta$ en x et y, au moyen de l'équation (2), et à intégrer l'équation à deux variables (3). Mais il est aisé de voir que, quelle que soit la

fonction F, $\sin\theta$ et $-\cos\theta$ doivent s'exprimer en x et y de telle manière que la condition

$$\frac{\partial \sin\theta}{\partial y} + \frac{\partial \cos\theta}{\partial x} = 0$$

soit satisfaite, d'où il s'ensuit que le premier membre de l'équation (3) forme une différentielle exacte. En effet, en faisant, pour abréger,

$$\sin\theta = p, \quad \cos\theta = -q,$$

écrivons l'équation (2) sous la forme

$$-qx + py - F(p, -q) = 0,$$

équation à laquelle nous pourrons joindre encore la suivante,

$$p^2 + q^2 - 1 = 0.$$

En désignant respectivement par φ et ψ les premiers membres de ces équations, il est aisé de s'assurer que la condition

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

est identiquement satisfaite. Par conséquent,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Prenons le cas particulier où la fonction F se réduit à une constante a; alors l'équation de la courbe donnée, $r = a$, représente un cercle. Le système des perpendiculaires est celui des tangentes au cercle, et leur trajectoire orthogonale est la développante du cercle. Les équations qui déterminent p et q sont

$$-qx + py - a = 0, \quad p^2 + q^2 - 1 = 0;$$

en les résolvant, on trouve

$$p = \frac{ay \pm x\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{x^2+y^2}, \quad q = \frac{-ax \pm y\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{x^2+y^2}.$$

Partant, l'équation (3) prend la forme

$$\frac{ay \pm x\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{x^2+y^2}\,dx + \frac{-ax \pm y\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{x^2+y^2}\,dy = 0,$$

et le premier membre de cette équation doit être une différentielle exacte. En effet, on peut l'écrire sous la forme

$$a\frac{ydx-ydy}{x^2+y^2} \pm \frac{(xdx+ydy)\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{x^2+y^2}$$

$$= a\,.\,d\,\text{arctang}\,\frac{x}{y} \pm \tfrac{1}{2}\frac{d\,.\,(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2} = 0,$$

ou, en posant

$$\text{arctang}\frac{x}{y} = v, \quad x^2+y^2-a^2 = u^2,$$

$$adv \pm \frac{u^2du}{u^2+a^2} = 0.$$

Or

$$\int \frac{u^2du}{u^2+a^2} = u - a\,\text{arctang}\,\frac{u}{a}.$$

Donc l'intégrale de l'équation précédente est

$$av \pm u \mp a\,\text{arctang}\,\frac{u}{a} = \text{const.},$$

ou

$$a\,\text{arctang}\,\frac{x}{y} \pm \sqrt{x^2+y^2-a^2} \mp a\,\text{arctang}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a} = \text{const.}$$

105. Prenons maintenant un problème indéterminé aux dérivées partielles du premier ordre. Supposons que l'on demande de déterminer l'intégrale commune des deux équations

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_3} = x_2x_4, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_4} = x_1x_3.$$

En posant

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = p_3, \quad \frac{\partial z}{\partial x_4} = p_4,$$

nous écrirons les équations de cette manière,

$$H_1 = p_1p_3 - x_2x_4 = 0, \quad H_2 = p_2p_4 - x_1x_3 = 0.$$

Pour essayer leur compatibilité, formons l'expression

$$(H_1, H_2) = \begin{vmatrix} 0, & -x_3 \\ p_3, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_4, & 0, \\ 0, & p_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & -x_1 \\ p_1, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_2, & 0 \\ 0, & p_2 \end{vmatrix}$$

$$= x_3p_3 - x_4p_4 + x_1p_1 - x_2p_2.$$

Cette expression ne se réduit pas à zéro en vertu des équations données; mais elle peut s'annuler en vertu des équations encore

inconnues. Pour qu'il en soit réellement ainsi, supposons qu'une des deux équations encore inconnues soit

$$H_2 = x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0.$$

La condition (H_1, H_2) est maintenant remplie, et il reste à examiner si les expressions

$$(H_1, H_3) = \begin{vmatrix} 0, & p_1 \\ p_3, & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_4, & -p_2 \\ 0, & -x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & p_3 \\ p_1, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_2, & -p_4 \\ 0, & -x_4 \end{vmatrix}$$

$$= -p_1 p_3 + x_2 x_4 - p_1 p_3 + x_2 x_4 = -2H_1,$$

$$(H_2, H_3) = \begin{vmatrix} -x_3, & p_1 \\ 0, & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & -p_2 \\ p_4, & -x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_1, & p_3 \\ 0, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & -p_4 \\ p_3, & -x_4 \end{vmatrix}$$

$$= -x_1 x_3 + p_2 p_4 - x_1 x_3 + p_2 p_4 = 2H_2,$$

peuvent se réduire à zéro.

Or, il est évident qu'elles s'annulent en vertu des équations données; donc les équations

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0$$

sont compatibles et admettent une intégrale commune, qui contiendra dans son expression la plus complète $4-3+1=2$ constantes arbitraires. Passons à la détermination de cette intégrale.

Pour ramener au plus petit nombre possible de variables les équations à intégrer, résolvons les équations précédentes par rapport à p_1, p_2, p_3. Des équations $H_1 = 0$, $H_2 = 0$ on tire

$$p_1 = \frac{x_2 x_4}{p_3}, \quad p_2 = \frac{x_1 x_3}{p_4}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $H_3 = 0$, on obtient, pour la détermination de p_3, une équation du second degré un peu compliquée. Par suite, il est préférable de calculer une de ses racines (ce qui nous suffira), de la manière suivante. Multipliant entre elles les équations données

$$p_1 p_3 = x_2 x_4, \quad x_1 x_3 = p_2 p_4,$$

il vient

$$p_1 x_1 \cdot p_3 x_3 = p_2 x_2 \cdot p_4 x_4,$$

d'où l'on tire

$$\frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} = \frac{p_4 x_4}{p_3 x_3} = \frac{p_1 x_1 - p_4 x_4}{p_2 x_2 - p_3 x_3}.$$

Or, d'après l'équation $H_3 = 0$, on a

$$p_2 x_2 - p_3 x_3 = p_1 x_1 - p_4 x_4;$$

donc

$$p_3 = \frac{p_4 x_4}{x_3} = \omega_3.$$

Mettant cette valeur dans l'expression de p_1, il vient

$$p_1 = \frac{x_2 x_3}{p_4} = \omega_1;$$

on a, de plus,

$$p_2 = \frac{x_1 x_3}{p_4} = \omega_2.$$

Pour déterminer ensuite l'équation

$$f(p_4, x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{const.},$$

qui doit fournir l'expression de p_4 au moyen des variables indépendantes, il faudra intégrer simultanément les trois équations linéaires

$$(p_1 - \omega_1, f) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f) = 0, \quad (p_3 - \omega_3, f) = 0.$$

Les systèmes d'équations différentielles ordinaires correspondants aux deux premières de ces équations linéaires sont

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_4}{\frac{x_2 x_3}{p_4^2}} = \frac{dp_4}{0}, \quad \frac{dx_2}{1} = \frac{dx_4}{\frac{x_1 x_3}{p_4^2}} = \frac{dp_4}{0}.$$

Par suite, l'intégrale $\varphi = p_4 = \text{const.}$ sera commune aux deux premières équations linéaires. En la mettant dans la troisième à la place de f, on aura

$$(p_3 - \omega_3, \varphi) = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_4} = \frac{p_4}{x_3} = \frac{\varphi}{x_3} = \varphi_1.$$

Donc l'intégrale commune aux trois équations linéaires s'obtiendra par l'intégration de l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx_3} - \frac{1}{x_3}\varphi = 0,$$

et sera

$$\log \varphi - \log x_3 = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad \frac{p_4}{x_3} = \text{const.} = \alpha.$$

Par conséquent,

$$p_4 = \alpha x_3, \quad p_1 = \frac{x_2}{\alpha}, \quad p_2 = \frac{x_1}{\alpha}, \quad p_3 = \alpha x_4.$$

Donc

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + p_4 dx_4 = \frac{x_1 dx_2 + x_2 dx_1}{\alpha} + \alpha (x_4 dx_3 + x_3 dx_4).$$

En intégrant, on tire de là l'intégrale commune cherchée des équations données,

$$z = \frac{x_1 x_2}{\alpha} + \alpha x_3 x_4 + \text{const.}$$

§. 24.

106. Considérons l'application de l'intégration simultanée aux équations linéaires par rapport aux dérivées partielles du premier ordre. Supposons que les équation données soient

$$a_1^{(1)} p_1 + a_2^{(1)} p_2 + \ldots + a_{n-1}^{(1)} p_{n-1} + a_n^{(1)} p_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1^{(m)} p_1 + a_2^{(m)} p_2 + \ldots + a_{n-1}^{(m)} p_{n-1} + a_n^{(m)} p_n = 0,$$

en posant

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ \ldots, \ p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

et désignant par

$$a_1^{(1)}, \ a_2^{(1)}, \ldots, \ a_{n-1}^{(m)}, \ a_n^{(m)}$$

$m.n$ fonctions données des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$.

Nous représenterons les premiers membres de ces équations de deux manières: soit par les lettres correspondantes $H_1, \ldots, H_m$, soit par les symboles $A_1(z), \ldots, A_m(z)$. Dans le second système de notations, le résultat de la substitution d'une fonction quelconque φ à la place de z dans la première équation, par exemple, sera exprimé par $A_1(\varphi)$; le résultat de la même substitution dans la dernière équation sera $A_m(\varphi)$.

107. En admettant que les équations données soient algébriquement compatibles, il faudra examiner si les expressions (H_i, H_k) pourront être réduites à zéro pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots, m$ des indices i et k.

Ces expressions seront évidemment des fonctions linéaires par rapport à $p_1,\ldots, p_n$, dont la forme générale s'obtient aisément comme il suit. D'après la formule du commencement du §. 16, on a

$$(H_i,\ H_k) = \left|\begin{matrix} \frac{\partial a_1^{(i)}}{\partial x_1}p_1 + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}^{(i)}}{\partial x_1}p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(i)}}{\partial x_1}p_n, & a_1^{(i)} \\ \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial x_1}p_1 + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}^{(k)}}{\partial x_1}p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial x_1}p_n, & a_1^{(k)} \end{matrix}\right| .$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left|\begin{matrix} \frac{\partial a_1^{(i)}}{\partial x_n}p_1 + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}^{(i)}}{\partial x_n}p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(i)}}{\partial x_n}p_n, & a_n^{(i)} \\ \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial x_n}p_1 + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}^{(k)}}{\partial x_n}p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial x_n}p_n, & a_n^{(k)} \end{matrix}\right| .$$

En groupant ensemble, dans le second membre de cette égalité, les termes qui contiennent en facteurs communs les quantités $p_1,\ldots, p_n$, et appliquant la notation indiquée dans l'art. préc., il vient

$$(H_i,\ H_k) = [A_k(a_1^{(i)}) - A_i(a_1^{(k)})]p_1 + \ldots\ldots$$

$$+ [A_k(a_{n-1}^{(i)}) - A_i(a_{n-1}^{(k)})]p_{n-1} + [A_k(a_n^{(i)}) - A_i(a_n^{(k)})]p_n.$$

On voit par là que les expressions $(H_i,\ H_k)$ se réduisent à zéro: 1° en vertu des équations données, si elles se réduisent à des fonctions linéaires homogènes de quelques-unes des quantités $H_1,\ldots, H_m$; 2° identiquement, si les coefficients de $p_1,\ldots, p_n$ dans ces équations sont nuls séparément. Si elles ne s'annulent d'aucune de ces deux manières, alors, en égalant ces expressions à zéro, on ajoutera aux équations linéaires données d'autres équations également linéaires.

En appliquant pareillement ce calcul aux nouvelles équations linéaires que l'on vient de former, supposons que l'on ait ajouté aux équations données en tout r équations

$$H_{m+1} = 0,\quad H_{m+2} = 0,\ldots,\quad H_{m+r} = 0,$$

$m+r$ n'étant pas plus grand que n, et les conditions $(H_i, H_k) = 0$ étant satisfaites pour toutes les valeurs $1, 2,\ldots, m+r$ des indices i et k. On pourra, dans ce cas, trouver une intégrale satisfaisant simultanément aux équations données, et dont l'expression complète contiendra $n-m-r+1$ constantes arbitraires, y compris celle qui y entre par simple addition; et de cette intégrale on déduira très-simplement l'expression de l'intégrale la plus gé-

nérale, renfermant une fonction arbitraire de $n-m-r$ fonctions données.

108. La marche du calcul de l'intégrale complète a été exposée précédemment dans un cas plus général celui des équations simultanées non linéaires, et elle s'applique ici sans modification. Pour montrer seulement l'application de la nouvelle forme des conditions d'intégrabilité, prenons un exemple particulier: Trouver, s'il est possible, une intégrale satisfaisant simultanément aux deux équations linéaires

$$H_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + (t + xy + xu)\frac{\partial z}{\partial u} + (y + u - 3x)\frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$H_2 = \frac{\partial z}{\partial y} + (xut + y - xy)\frac{\partial z}{\partial u} + (ut - y)\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Pour essayer leur compatibilité, représentons par $A(z)$ et $B(z)$ les premiers membres de ces équations, et formons l'expression

$$\begin{aligned}(H_2, H_1) = {} & [A(0) - B(1)]\frac{\partial z}{\partial x} + [A(1) - B(0)]\frac{\partial z}{\partial y} \\ & + [A(xut + y - xy) - B(t + xy + xu)]\frac{\partial z}{\partial u} \\ & + [A(ut - y) - B(y + u - 3x)]\frac{\partial z}{\partial t}.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont nuls; pour calculer les autres, on trouve

$$A(xut - y - xy) = ut - y + (t + xy + xu)xt + (y + u - 3x)xu,$$

$$B(t + xy + xu) = x + (xut + y - xy)x + ut - y,$$

$$A(ut - y) = (t + xy + xu)t + (y + u - 3x)u,$$

$$B(y + u - 3x) = 1 + (xut + y - xy).$$

En portant ces valeurs dans les coefficients de l'expression précédente, on la ramène à la forme

$$(xyt + t^2 + u^2 + yu - 3xu + xy - y - 1)\left(x\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t}\right).$$

Il est clair, d'après cela, que la condition $(H_2, H_1) = 0$ sera satisfaite, si l'on pose

$$H_3 = x\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

En représentant le premier membre de cette dernière équation par $C(z)$, il vient

$$(H_3, H_1) = [A(0) - C(1)]\frac{\partial z}{\partial x} + [A(0) - C(0)]\frac{\partial z}{\partial y} + [A(x) - C(t + xy + xu)]\frac{\partial z}{\partial u} + [A(1) - C(y + u - 3x)]\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$(H_3, H_2) = [B(0) - C(0)]\frac{\partial z}{\partial x} + [B(0) - C(1)]\frac{\partial z}{\partial y} + [B(x) - C(xut + y - xy)]\frac{\partial z}{\partial u} + [B(1) - C(ut - y)]\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Or on a

$$A(x) = 1, \quad C(t + xy + xu) = x^2 + 1, \quad C(y + u - 3x) = x,$$

$$B(x) = 0, \quad C(xut + y - xy) = x^2t + xu, \quad C(ut - y) = xt + u.$$

Donc

$$(H_3, H_1) = -x^2\frac{\partial z}{\partial u} - x\frac{\partial z}{\partial t} = -xH_3,$$

$$(H_3, H_2) = -(x^2t + xu)\frac{\partial z}{\partial u} - (xt + u)\frac{\partial z}{\partial t} = -(xt + u)H_3.$$

Partant, les conditions $(H_3, H_1) = 0$, $(H_3, H_2) = 0$ sont satisfaites en vertu de l'équation $H_3 = 0$.

Ainsi les trois équations linéaires

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0$$

remplissent toutes les conditions d'intégrabilité. Donc, conformément aux conclusions de la théorie générale, l'intégrale qui conviendra simultanément à ces trois équations devra contenir dans son expression complète deux constantes arbitraires (dont une par simple addition). De cette intégrale complète on déduira l'intégrale la plus générale, exprimée au moyen d'une fonction arbitraire d'une certaine fonction donnée.

Cherchons d'abord l'intégrale complète. En posant, pour abréger,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = p_2, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = p_3, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = p_4,$$

déterminons, à l'aide des équations précédentes, les expressions des trois premières de ces quantités en fonction de la quatrième et des variables indépendantes. Si l'on désigne, pour abréger, ces expressions par ω_1, ω_2, ω_3, on aura

$p_1 = -(3x^2+t)p_4 = \omega_1, \quad p_2 = -yp_4 = \omega_2, \quad p_3 = -xp_4 = \omega_3.$

D'après cela, pour déterminer l'équation

$$f(p_4, x, y, t, u) = \text{const.},$$

qui donnera la valeur de p_4, cherchons une intégrale commune des trois équations linéaires

$$(p_1 - \omega_1, f) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f) = 0, \quad (p_3 - \omega_3, f) = 0.$$

Les systèmes d'équations simultanées aux différentielles ordinaires correspondantes aux équations précédentes seront

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_4}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_1}{\partial u}}, \quad \frac{dy}{1} = \frac{du}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_4}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_2}{\partial u}},$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{du}{-\frac{\partial\omega_3}{\partial p_4}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_3}{\partial u}}.$$

Or, comme on a $\frac{\partial\omega_1}{\partial u} = \frac{\partial\omega_2}{\partial u} = \frac{\partial\omega_3}{\partial u} = 0$, l'intégrale

$$f = p_4 = \text{const.} = \alpha$$

conviendra à chacun des trois systèmes d'équations simultanées et à chacune des trois équations linéaires précédentes. Par suite, les expressions des dérivées partielles de la fonction cherchée z seront

$$p_1 = -(3x^2+t)\alpha, \quad p_2 = -y\alpha, \quad p_3 = -x\alpha, \quad p_4 = \alpha.$$

Donc

$$dz = -\alpha[(3x^2+t)\,dx + y\,dy + x\,dt - du],$$

d'où l'on tire, en intégrant, l'expression de l'intégrale compiète

$$z = \alpha\,(u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2}) + \text{const.}$$

Enfin, l'expression de l'intégrale la plus générale peut être donnée sous deux formes: soit au moyen des équations

$$z = \alpha\,(u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2}) + \pi(\alpha),$$

$$0 = u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2} + \frac{d\pi(\alpha)}{d\alpha},$$

soit au moyen de l'équation unique

$$z = \pi\left(u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2}\right),$$

π désignant dans les deux cas une fonction entièrement arbitraire. Il est évident que ces deux expressions de l'intégrale générale sont équivalentes entre elles.

§. 25.

109. Dans le problème précédent, nous avons fait usage de la forme particulière que prennent les conditions d'intégrabilité des équations simultanées linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Il est à-propos de signaler encore ici une autre forme de ces mêmes conditions, dont Jacobi s'est servi pour établir le Théorème fondamental I du §. 17.

Prenons deux expressions linéaires par rapport aux dérivées partielles de la fonction z,

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

$$b_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + b_n \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ désignant des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, et représentons la première de ces expressions par $A(z)$, la seconde par $B(z)$.

On peut considérer A et B comme des signes d'opérations complétement déterminées, et nommer la première de ces opérations l'opération A, la seconde l'opération B. En soumettant à l'opération A une fonction quelconque z des variables $x_1, \ldots, x_n$, nous obtiendrons pour résultat une nouvelle fonction des mêmes variables, sur laquelle nous pourrons effectuer l'opération B. Représentons symboliquement par

$$B[A(z)]$$

le résultat de ces deux opérations successives. Si l'on exécute les mêmes opérations dans l'ordre inverse, on pourra représenter le nouveau résultat par

$$A[B(z)].$$

Voyons quelle sera, en général, la différence de ces deux résultats.

On a

$$B[A(z)] = b_1\frac{\partial A(z)}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial A(z)}{\partial x_2} + \ldots + b_n\frac{\partial A(z)}{\partial x_n}$$

$$= b_1\left\{\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right.$$

$$\left. + a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + a_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots + a_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}\right\}$$

$$+ b_2\left\{\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right.$$

$$\left. + a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + a_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \ldots + a_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ b_n\left\{\frac{\partial a_1}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right.$$

$$\left. + a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} + a_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} + \ldots + a_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}\right\},$$

ou

$$B[A(z)] = B(a_1)\frac{\partial z}{\partial x_1} + B(a_2)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + B(a_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}$$

$$+ b_1 a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + b_2 a_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \ldots + b_n a_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}$$

$$+ (b_1 a_2 + b_2 a_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots + (b_1 a_n + b_n a_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}$$

$$+ \ldots + (b_{n-1} a_n + b_n a_{n-1})\frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_n}.$$

On trouve de même

$$A[B(z)] = A(b_1)\frac{\partial z}{\partial x_1} + A(b_2)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + A(b_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}$$

$$+ a_1 b_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + a_2 b_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \ldots + a_n b_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}$$

$$+ (a_1 b_2 + a_2 b_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots + (a_1 b_n + a_n b_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}$$

$$+ \ldots + (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1})\frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_n}.$$

En comparant ces deux expressions, on remarque que ceux de leurs termes qui renferment les dérivées du second ordre de

la fonction z sont identiques de part et d'autre; donc, si l'on soustrait ces expressions l'une de l'autre, ces termes se détruiront, et la différence sera exprimée par la fonction linéaire suivante des dérivées partielles du premier ordre de la fonction z,

$$B[A(z)]-A[B(z)] = \{B(a_1)-A(b_1)\}\frac{\partial z}{\partial x_1}$$
$$+\{B(a_2)-A(b_2)\}\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+\{B(a_n)-A(b_n)\}\frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

110. Désignons maintenant les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ respectivement par $p_1, \ldots, p_n$, et posons

$$a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n = A(z) = H,$$
$$b_1 p_1 + \ldots + b_n p_n = B(z) = G.$$

D'après ce qui a été démontré au §. 24, art. 107, nous aurons

$$(H, G) = \{B(a_1)-A(b_1)\}p_1+\ldots+\{B(a_n)-A(b_n)\}p_n.$$

En comparant ce résultat à celui de l'art. précédent, il s'ensuit que l'on a

$$(H, G) = B[A(z)]-A[B(z)].$$

On en conclut que les deux équations linéaires

$$A(z) = 0, \quad B(z) = 0$$

seront compatibles, si la condition

$$B[A(z)] = A[B(z)]$$

est satisfaite, et il est évident que cette nouvelle forme de la condition d'intégrabilité des équations linéaires simultanées est équivalente à la précédente.

111. **Conséquence.** — Supposons maintenant que φ, ψ et z représentent des fonctions quelconques des variables $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$, et prenons deux expressions linéaires par rapport aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction z, de la forme suivante,

$$A(z) = (\varphi, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial p_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial p_n}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{\partial z}{\partial x_n},$$

$$B(z) = (\psi, z) = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial p_1}-\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial p_n}-\frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

En vertu de la formule démontrée plus haut (art. 109), on a

$$(\alpha) \qquad B[A(z)]-A[B(z)]$$
$$=\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\left[B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\right]\frac{\partial z}{\partial p_i}-\left[B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)-A\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)\right]\frac{\partial z}{\partial x_i}\right\}.$$

Or $A(z)=(\varphi, z)$, $B(z)=(\psi, z)$; donc

$$B[A(z)]=[\psi, (\varphi, z)], \quad A[B(z)]=[\varphi, (\psi, z)],$$

et

$$B[A(z)]-A[B(z)]=[\psi, (\varphi, z)]-[\varphi, (\psi, z)]$$
$$=[\psi, (\varphi, z)]+[\varphi, (z, \psi)].$$

De plus,

$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=\left(\psi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right), \quad -A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \varphi\right),$$

$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)=\left(\psi, \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right), \quad -A\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}, \varphi\right);$$

par conséquent, en vertu de la formule (4) du §. 16,

$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)=\left(\psi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \varphi\right)=\frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial x_i};$$

de même

$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)-A\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)=\frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial p_i}.$$

D'après cela, l'égalité (α) prend la forme

$$[\psi, (\varphi, z)]+[\varphi, (\psi, z)]$$
$$=\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial p_i}-\frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial p_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right\}=-[z, (\psi, \varphi)],$$

ou, en faisant passer tous les termes dans le premier membre,

$$[\psi, (\varphi, z)]+[\varphi, (z, \psi)]+[z, (\psi, \varphi)]=0.$$

112. Telle est, en substance, la démonstration que Jacobi a donnée de cette proposition (Nova Methodus, §§. 23.—26.). Mais, comme cette démonstration est étroitement liée à la théorie de l'intégration des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, j'ai cru préférable de la présenter en même temps que l'exposition de cette partie de la méthode, et j'ai donné plus haut (§. 17) une autre démonstration, qui m'a semblé n'être pas plus compliquée et se déduire immédiatement des propriétés fondamentales des expressions de la forme (φ, ψ).

Remarquons que ce Théorème était déjà connu avant la publication de la „Nouvelle méthode" de Jacobi. En effet, dans le Mémoire cité plus haut (§. 22) de Donkin, „On a Class of Differential Equations, etc.", on trouve ce Théorème (page 92, Section 11, §. 21), et au bas de la page 71, il est mentionné parmi les résultats trouvés pour la première fois ou démontrés d'une manière nouvelle par l'Auteur.

La démonstration de Donkin pourrait plutôt être considérée comme une vérification du Théorème en question. Du reste, à cause de sa brièveté, elle peut être utile pour une exposition abrégée de la théorie de Jacobi; c'est pourquoi je pense qu'il ne sera pas superflu de la rapporter ici.

113. „**Théorème.** Si p, q, r sont des fonctions quelconques des $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, on a

$$(\alpha) \qquad [(p, q), r] + [(q, r), p] + [(r, p), q] = 0.$$

„Si l'on développe cette expression, il est évident que chacun de ses termes se compose du produit d'une dérivée du second ordre de l'une des fonctions p, q, r, par des dérivées du premier ordre de chacune des deux autres fonctions.

„Considérons les termes contenant des dérivées du second ordre de p; ils seront de l'une des formes

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial y_j}\frac{\partial q}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial q}{\partial y_i}\frac{\partial r}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y_i \partial y_j}\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j},$$

i pouvant être égal à j, et chacun d'eux proviendra du premier ou du troisième terme de l'équation (α).

„En examinant maintenant chacune de ces formes, il est aisé de voir que, pour chaque terme provenant du premier terme de l'équation (α), il se trouve un terme semblable, mais affecté d'un signe contraire, provenant du troisième terme de cette équation; et comme la même chose est vraie pour les termes où entrent les dérivées secondes de q ou de r, il s'ensuit que le premier membre de l'équation (α) tout entier se réduit identiquement à zéro. Donc le Théorème est démontré."

§. 26.

114. Considérons encore l'application de la méthode d'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre à la détermination des conditions d'intégrabilité immédiate

d'une expression différentielle contenant une variable indépendante, et des fonctions de cette variable avec leurs dérivées d'ordres quelconques.

Cette question, qui a été, comme on sait, résolue par Euler et par Condorcet, et dont Lexell, Lagrange, Poisson, Sarrus, Bertrand, Binet et d'autres géomètres ont fait l'objet de leurs recherches, présente une application facile et intéressante de la théorie qui nous occupe. La nouvelle méthode de solution peut être comparée, sous le rapport de la simplicité élémentaire, à celle qui a été donnée par Condorcet *) et perfectionnée par Sarrus **); et tandis qu'elle fournit absolument de la même manière les expressions des dérivées partielles du premier ordre de la fonction cherchée par rapport à toutes les variables qui y entrent, elle ramène la détermination de cette fonction à l'intégration d'une différentielle totale. Mais, avec cela, on obtient l'une après l'autre toutes les conditions qui doivent être nécessairement remplies par la fonction donnée pour qu'elle soit la dérivée exacte d'une autre fonction. Si, dans le cas donné, l'existence de cette dernière fonction est démontrée impossible, on s'en aperçoit, en général, avant d'arriver à la condition connue d'Euler, laquelle s'obtient la dernière dans notre méthode. Il est à propos d'observer que cette condition est donnée ici sous une nouvelle forme symbolique, doublement remarquable.

Pour compléter la solution d'après cette méthode, il ne resterait plus qu'à trouver un moyen simple pour démontrer que toutes les conditions nécessaires sont remplies, dès que la condition unique d'Euler est satisfaite. En l'absence d'une telle démonstration, on doit en attendant donner la préférence, pour la solution du problème proposé, aux méthodes moins directes et moins simples du Calcul des variations.

Le procédé indiqué ci-dessus est dû à Boole ***), qui présente ce problème comme exemple de l'application de la méthode

---

*) Dans son Calcul intégral. Voyez aussi **Lacroix**, Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, tome II., pag. 238—249.

) Annales de Mathématiques de **Gergonne, tome XIV. Voyez aussi **Todhunter**, History of the Progress of the Calculus of Variations, p. 523—529.

***) Dans son Mémoire „On simultaneous Differential Equations of the first Order, etc." (Philosophical Transactions, 1862, Part I, p. 453).

donnée par lui pour l'intégration des équations simultanées du premier ordre aux différentielles ordinaires, dans lesquelles le nombre des variables surpasse de plus d'une unité le nombre des équations. Mais on voit, d'après ses recherches, que cette question générale est étroitement liée avec le problème de l'intégration des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. L'Auteur, ne considérant pas ce dernier problème à ce point de vue commun, que Bour a indiqué*), applique les conditions de compatibilité des deux équations linéaires

$$H = A(z) = 0, \quad G = B(z) = 0,$$

exclusivement sous la forme

$$B[A(z)] = A[B(z)],$$

ou, suivant son mode de notation,

$$(AB - BA)z = 0.$$

A la suite de cela, dans l'application au problème considéré, il introduit toute une série de symboles, qui, tout en permettant d'exprimer la solution sous une forme très-condensée, lui ôtent cependant l'avantage de la clarté et de la simplicité désirables.

J'adopterai, en conséquence, le mode d'exposition de Bertrand, qui, dans une de ses leçons professées au Collége de France, en 1863, a remarqué que, dans l'application au problème actuel, il vant mieux faire usage de la condition de compatibilité des équations linéaires sous la forme $(H, G) = 0$, et a fait voir comment on déduit la condition d'Euler dans le cas particulier où l'expression différentielle donnée contient une variable indépendante, une fonction de cette variable et les dérivées de cette fonction jusqu'au second ordre. Je traiterai la solution de la question sous sa forme générale, parce que, dans le cas particulier considéré par Bertrand, on n'aperçoit pas certains côtés de la question qui ne sont pas sans intérêt.

115. En représentant par x la variable indépendante, par y une fonction de cette variable, et par

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

---

*) Dans le Mémoire cité plus haut (art. 90). Ce Mémoire ayant paru au même moment que le travail de Boole, il est probable que celui-ci n'en avait pas eu connaissance.

les n premières dérivées de cette fonction, soit

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

l'expression donnée, et proposons-nous ce problème:

Déterminer, s'il est possible, une fonction V des variables $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, qui, étant différentiée par rapport à x, non-seulement en tant que x y entre explicitement, mais aussi en tant que x entre dans les fonctions $y, y', \ldots, y^{(n)}$, reproduise l'expression F.

Employons la notation $\frac{dV}{dx}$ pour désigner cette dérivée totale; nous aurons

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} y' + \frac{\partial V}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)},$$

et l'équation fondamentale du problème sera

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

Remarquons, en outre, que:

1°. Si la fonction V était déjà connue, l'équation (1) deviendrait identique, la fonction y restant complétement indéterminée. Or F ne contient pas $y^{(n+1)}$; donc le terme $\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)}$, n'ayant aucun terme semblable à lui ni dans le premier, ni dans le second membre de l'équation (1), doit s'annuler de lui-même. On doit donc avoir nécessairement

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

2°. Il est évident que, si la fonction donnée F provient effectivement de la différentiation complète d'une autre fonction V par rapport à x, F doit être de forme linéaire par rapport à $y^{(n)}$, puisque cette forme est celle du premier membre de l'équation (1). Par suite, il faut que l'on ait

$$(a) \quad F = A + B y^{(n)},$$

A et B étant des fonctions de $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$; et, pour que l'équation (1) soit vérifiée identiquement pour toute valeur de y, on devra poser encore la condition

$$\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} = B,$$

B pouvant facilement s'exprimer au moyen de F. En effet, en différentiant partiellement les deux membres de l'égalité (a) par rapport à $y^{(n)}$, il vient

$$B = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}.$$

Par suite, si l'on représente, pour plus de simplicité, par

$$V_x,\quad V_y,\quad V_{(1)},\quad V_{(2)},\ldots,\quad V_{(n-1)},\quad V_{(n)}$$

les dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial y'},\ \frac{\partial V}{\partial y''},\ldots,\ \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}},\ \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}},$$

et que l'on adopte pour les dérivées partielles de F une notation analogue; les trois équations du problème, exprimées au moyen des dérivées partielles de la fonction V, seront

$$(1)\quad H = V_x + V_y y' + V_{(1)} y'' + \ldots + V_{(n-1)} y^{(n)} + V_{(n)} y^{(n+1)} - F = 0,$$

$$(2)\quad G = V_{(n)} = 0,$$

$$(3)\quad H_1 = V_{(n-1)} - F_{(n)} = 0.$$

116. Ayant ainsi trois équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, il faudra, pour les intégrer, appliquer la méthode exposée dans les paragraphes précédents. Pour cela, considérant H, G, H_1 comme des fonctions des $2(n+2)$ variables x, V_x, y, V_y, y', $V_{(1)},\ldots$, $y^{(n)}$, $V_{(n)}$, formons les expressions

$$(H,\ G) = V_{(n-1)} - F_{(n)},$$

$$(G,\ H_1) = \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n)}},$$

$$(H,\ H_1) = V_{(n-2)} + \left(\frac{\partial F_{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)}\right) - F_{(n-1)}.$$

La première se réduit à zéro, en vertu de l'équation $H_1 = 0$. La seconde est identiquement égale à zéro, puisque $F_{(n)} = B$, et que B ne contient pas $y^{(n)}$, d'où il s'ensuit que

$$\frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial B}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

La troisième expression ne s'annule ni identiquement, ni en vertu des équations données; mais elle contient la dérivée partielle $V_{(n-2)}$ de la fonction cherchée. En la posant donc égale à zéro, on ajoutera aux équations données une quatrième équation

$$(H, H_1) = H_2 = 0.$$

Si l'on remarque que, dans cette équation, on a

$$\frac{\partial F_{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y} y' + .. + \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = \frac{dF_{(n)}}{dx},$$

on pourra écrire cette équation sous la forme

$$H_2 = V_{(n-2)} + \frac{dF_{(n)}}{dx} - F_{(n-1)} = 0,$$

ou

$$H_2 = V_{(n-2)} - \omega_{n-2} = 0,$$

en faisant, pour abréger

$$\omega_{n-2} = F_{(n-1)} - \frac{dF_{(n)}}{dx}.$$

117. On trouve ensuite

$$(G, H) = \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial (F_{(n-1)} - \frac{dF_{(n)}}{dx})}{\partial y^{(n)}}.$$

$$(H_1, H_2) = \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n-2)}},$$

$$(H, H_2) = V_{(n-3)} + \left(\frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y} y' + .. + \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} \right) - F_{(n-2)}.$$

La première de ces expressions est identiquement nulle, comme on peut le démontrer, soit en se fondant sur l'égalité (a), soit, ce qui est préférable, par une autre méthode, qui s'appliquera plus tard à d'autres cas analogues, pour lesquels l'emploi de la première méthode présenterait des difficultés. En effet, par le Théorème 1 du §. 17, on a

$$(G, H_2) = [G, (H, H_1)] = -[H, (H_1, G)] - [H_1, (G, H)].$$

Or on a $(G, H_1) = 0$, $(H, G) = H_1$; donc

$$(G, H_2) = (H_1, H_1) = 0.$$

De plus, la valeur de (H_1, H_2) trouvée plus haut est ex-

primée en fonction des seules variables x, y,..., $y^{(n)}$; elle doit donc se réduire identiquement à zéro, sans quoi la solution du problème serait impossible. Ainsi nous supposerons que la fonction F satisfasse à la condition

$$(H_1, H_2) = 0,$$

dont la nécessité s'aperçoit encore plus clairement, si l'on remarque qu'elle conduit à l'égalité

$$\frac{\partial V_{(n-2)}}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V_{(n-1)}}{\partial y^{(n-2)}}.$$

Enfin, la valeur de (H, H_2) peut être égalée à zéro, puisqu'elle renferme la dérivée partielle $V_{(n-3)}$. De cette manière, aux quatre équations précédentes nous en ajouterons une cinquième

$$H_3 = (H, H_2) = V_{(n-3)} + \frac{d\omega_{n-2}}{dx} - F_{(n-2)}$$

$$= V_{(n-3)} - \frac{d^2F_{(n)}}{dx^2} + \frac{dF_{(n-1)}}{dx} - F_{(n-2)} = 0,$$

ou

$$H_3 = V_{(n-3)} - \omega_{n-3} = 0,$$

en posant

$$\omega_{n-3} = F_{(n-2)} - \frac{dF_{(n-1)}}{dx} + \frac{d^2F_{(n)}}{dx^2}.$$

118. On obtient ensuite facilement les expressions

$$(G, H_3) = \frac{\partial \omega_{n-3}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial (F_{(n-2)} - \frac{dF_{(n-1)}}{dx} + \frac{d^2F_{(n)}}{dx^2})}{\partial y^{(n)}},$$

$$(H_1, H_3) = \frac{\partial \omega_{n-3}}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n-3)}},$$

$$(H_2, H_3) = \frac{\partial \omega_{n-3}}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n-3)}},$$

$$(H, H_3) = V_{(n-4)} + \frac{d\omega_{n-3}}{dx} - F_{(n-3)}.$$

La première de ces expressions est nulle en vertu des équations établies précédemment. En effet, le Théorème I du §. 17 donne

$$(G, H_3) = [G, (H, H_2)] = -[H, (H_2, G)] - [H_2, (G, H)];$$

or $(G, H_2) = 0$, $(G, H) = -H_1$; par conséquent

$$(G,\ H_3) = (H_2,\ H_1) = 0.$$

Ensuite les valeurs de $(H_1,\ H_3)$ et de $(H_2,\ H_3)$, s'exprimant au moyen des seules variables $x,\ y,\ldots,\ y^{(n)}$, doivent se réduire identiquement à zéro, si la fonction cherchée V existe; et, en effet, les conditions $(H_1,\ H_3) = 0$, $(H_2,\ H_3) = 0$ n'expriment pas autre chose que les relations nécessaires pour qu'on ait les égalités

$$\frac{\partial V_{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V_{(n-1)}}{\partial y^{(n-3)}},\quad \frac{\partial V_{(n-3)}}{\partial y^{(n-2)}} = \frac{\partial V_{(n-2)}}{\partial y^{(n-3)}}.$$

Enfin, en égalant à zéro, l'expression $(H,\ H_3)$, on obtient une nouvelle équation, qui devient, en remplaçant ω_{n-3} par sa valeur,

$$H_4 = (H,\ H_3) = V_{(n-4)} - F_{(n-3)} + \frac{dF_{(n-2)}}{dx} - \frac{d^2F_{(n-1)}}{dx^2} + \frac{d^3F_{(n)}}{dx^3} = 0.$$

119. On voit maintenant comment on devra continuer à procéder pour la solution du problème qui nous occupe. Si la fonction F satisfait à toutes les conditions nécessaires, lesquelles se réduiront finalement à ce que les valeurs déterminées successivement pour les dérivées partielles satisfassent aux conditions

$$\frac{\partial V_{(n-i)}}{\partial y^{(n-k)}} = \frac{\partial V_{(n-k)}}{\partial y^{(n-i)}};$$

on obtiendra alors, outre les équations précédentes, les équations

$$H_5 = 0,\ldots,\ H_i = 0,\ldots,\ H_n = 0,$$

qui seront généralement de la forme

$$H_i = V_{(n-i)} - F_{(n-i+1)} + \frac{dF_{(n-i+2)}}{dx} - \ldots - (-1)^{i-1}\frac{d^{i-1}F_{(n)}}{dx^{i-1}} = 0,$$

ce qui devient, pour $i = n$,

$$H_n = V_y - F_{(1)} + \frac{dF_{(2)}}{dx} - \ldots - (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}F_{(n)}}{dx^{n-1}} = 0.$$

Pour décider de la compatibilité de la dernière équation avec les précédentes, posons

$$\omega_0 = F_{(1)} - \frac{dF_{(2)}}{dx} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}F_{(n)}}{dx^{n-1}},$$

et formons les expressions

$$(G,\ H_n) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n)}},$$

$$(H_1,\ H_n) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y},$$

$$(H_2,\ H_n) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y},$$

. . . . . .

$$(H,\ H_n) = -F_y + \frac{d\omega_0}{dx}$$

$$= -F_y + \frac{dF_{(1)}}{dx} - \frac{d^2F_{(2)}}{dx^2} + \ldots - (-1)^n \frac{d^nF_{(n)}}{dx^n}.$$

Toutes ces expressions sont des fonctions des seules variables $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, et par suite doivent se réduire identiquement à zéro. Mais l'expression (G, H_n) se réduit déjà à zéro en vertu des conditions dont on a reconnu précédemment la nécessité. On a, en effet, d'après le Théorème I du §. 17,

$$(G,\ H_n) = [G,\ (H,\ H_{n-1})] = -[H,\ (H_{n-1},\ G)] - [H_{n-1},\ (H,\ G)]$$
$$= [H,\ (G,\ H_{n-1})] + (H_1,\ H_{n-1}).$$

Donc (G, H_n) est nul, puisqu'on a $(G, H_{n-1}) = 0$, $(H_1, H_{n-1}) = 0$.

De plus, les conditions

$$(H_1,\ H_n) = 0,\quad (H_2,\ H_n) = 0, \ldots,\quad (H_{n-1},\ H_n) = 0$$

sont nécessaires pour que l'on ait les égalités

$$\frac{\partial V_y}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V_{(n-1)}}{\partial y},\quad \frac{\partial V_y}{\partial y^{(n-2)}} = \frac{\partial V_{(n-2)}}{\partial y}, \ldots,\quad \frac{\partial V_y}{\partial y'} = \frac{\partial V_{(1)}}{\partial y}.$$

120. La série précédente de toutes les conditions nécessaires, que doit remplir la fonction différentielle donnée F, est renfermée dans la condition

$$E = (H,\ H_n) = F_y - \frac{dF_{(1)}}{dx} + \frac{d^2F_{(2)}}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^nF_{(n)}}{dx^n} = 0,$$

trouvée, comme on sait, à l'aide du Calcul des variations par Euler, qui a démontré que cette condition était non-seulement nécessaire, mais encore suffisante *).

*) Bertrand a fait voir (Journal de l'Ecole Polytechnique, XXXVIIIe Cahier, p. 250—251) que Lagrange, Poisson et d'autres géomètres se sont trompés en avançant qu'Euler n'avait pas démontré que sa condition était suffisante.

On a, en vertu de ce qui précède,

$$H_n = (H,\ H_{n-1}),\ H_{n-1} = (H,\ H_{n-2}),\ldots,\ H_1 = (H,\ G).$$

Donc, par des substitutions très-simples, on pourra écrire la condition d'Euler sous la forme

$$[H,\ (H,\ (\ldots,\ (H,\ G)\ldots))] = 0,$$

H et G ayant les valeurs données dans l'art. 115.

En supposant que la fonction F remplisse toutes les conditions nécessaires, on pourra déterminer très-simplement son intégrale V. En effet, les équations

$$G = 0,\quad H_1 = 0,\ldots,\quad H_n = 0$$

fournissent des expressions de toutes les dérivées partielles de la fonction cherchée, à l'exception d'une seule, savoir

$$V_{(n)} = 0,\ V_{(n-1)} = F_{(n)},\ V_{(n-2)} = \omega_{n-2},\ldots,\ V_y = \omega_0.$$

En les substituant dans l'équation $H = 0$, il vient

$$V_x = F - \omega_0 y' - \ldots - \omega_{n-2} y^{(n-1)} - F_{(n)} y^{(n)}.$$

Partant, la fonction V sera déterminée par l'intégration de la différentielle exacte

$$dV = (F - \omega_0 y' - \ldots - \omega_{n-2} y^{(n-1)} - F_{(n)} y^{(n)})\,dx + \omega_0\,dy + \ldots + \omega_{n-2}\,dy^{(n-2)} + F_{(n)}\,dy^{(n-1)}.$$

Dans les applications à des cas particuliers, il est très-commode de disposer les calculs comme l'indique le tableau suivant:

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{cccc} F_{(n)}, & F_{(n-1)}, \ldots, & F_{(1)}, & F_y, \\ -\dfrac{dF_{(n)}}{dx}, \ldots, & -\dfrac{dF_{(2)}}{dx}, & -\dfrac{dF_{(1)}}{dx}, & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}F_{(n)}}{dx^{n-1}}, & (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}F_{(n-1)}}{dx^{n-1}}, & & \\ (-1)^n\dfrac{d^nF_{(n)}}{dx^n}. & & & \\ \hline F_{(n)}, & \omega_{n-2}, \ldots, & \omega_0, & E, \end{array}\right.$$

où l'on peut calculer les unes après les autres les lignes horizontales, en allant de haut en bas, ou les lignes verticales, en allant de gauche à droite. La somme des termes de la dernière

colonne à droite donne la valeur de l'expression E. Si elle est égale à zéro, alors les sommes des termes de chacune des colonnes à précédentes en remontant vers la gauche, seront respectivement les valeurs des dérivées partielles V_y, $V_{(1)}, \ldots, V_{(n-2)}$, $V_{(n-1)}$.

Exemple. Soit

$$F = \varphi(x) + y^2 + (2xy - 1)y' + xy'' + x^2y'''.$$

En formant le tableau (A), on trouve

x^2,	x,	$2xy-1$,	$2y+2xy'$,
	$-2x$,	-1,	$-2y-2xy'$,
		$+2$,	0,
			0

$V_{(2)} = x^2$, $V_{(1)} = -x$, $V_y = 2xy$, $E = 0$.

Par suite,

$$V_x = F - x^2y''' + xy'' - 2xyy' = 2xy'' - y' + y^2 + \varphi(x).$$

Donc

$$dV = [2xy'' - y' + y^2 + \varphi(x)]\,dx + x^2dy'' - xdy' + 2xydy,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$V = x^2y'' - xy' + y^2x + \int \varphi(x)\,dx + \text{const.}$$

121. Quoiqu'il suffise de former la seule expression E, qui entre dans la condition d'Euler, pour juger de l'intégrabilité immédiate de la fonction différentielle donnée F, cependant, comme elle est plus compliquée que les expressions qui entrent dans toutes les autres conditions nécessaires, il est généralement plus commode d'employer ces dernières. Eclaircissons cela par un exemple.

Soit la fonction

$$F = xy'''y^{IV} + (x + yy'')y''' + \sqrt{xy' + y}.$$

Ici la première condition nécessaire, en vertu de laquelle F doit être une fonction linéaire par rapport à la dérivée la plus élevée, est remplie. Examinons si F satisfait à la condition qui vient immédiatement après. Formons, pour cela, les deux premières colonnes du tableau (A); il vient

$$xy''', \qquad xy^{IV} + yy'' + x,$$
$$-y''' - xy^{IV},$$

$$F_{(4)} = xy''', \qquad \omega_2 = -y''' + yy'' + x.$$

La condition nécessaire

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y'''} = \frac{\partial F_{(4)}}{\partial y''} = 0$$

n'est pas remplie évidemment dans le cas actuel. Cela nous fait voir très-simplement que la fonction donnée F n'est pas immédiatement intégrable, tandis que, pour obtenir l'expression E, il aurait fallu un calcul beaucoup plus compliqué.

Remarquons, en terminant, que la méthode précédente pour obtenir la condition d'intégrabilité immédiate, peut s'étendre très-facilement au cas où la fonction différentielle donnée contient plusieurs fonctions indéterminées y, z, u,... de la variable indépendante x, avec leurs dérivées de divers ordres. Mais cette généralisation est si simple que je crois inutile de m'y arrêter.

Chapitre VII.

De l'intégration des systèmes canoniques d'équations simultanées aux différentielles ordinaires du premier ordre.

§. 27.

122. Un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre entre une variable indépendante t et $2n$ fonctions inconnues $x_1, .., x_n, y_1, .., y_n$ de cette variable, peut se mettre, en général, sous la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = A_2, .., \quad \frac{dx_n}{dt} = A_n,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = B_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = B_2, .., \quad \frac{dy_n}{dt} = B_n,$$

$A_1, B_1, ..., A_n, B_n$ étant des fonctions données de la variable indépendante t et des variables dépendantes $x_1, y_1, .., x_n, y_n$.

On appelle système canonique le cas particulier de la

forme générale précédente, dans lequel les coefficients A_1, B_1,.. .., A_n, B_n sont formés avec les dérivées partielles d'une même fonction

$$H = F(t, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n),$$

prises par rapport aux variables dépendantes, en sorte que l'on ait généralement

$$A_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad B_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

i désignant successivement chacun des nombres 1, 2,.., n.

D'après cela, un système canonique d'équations simultanées aura pour forme générale

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_2}, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_n},$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \ldots, \quad \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_n}.$$

Dans le cas particulier où la fonction donnée H est de la forme

$$H = f(x_1, .., x_n, y_1, .., y_n),$$

c'est-à-dire ne contient pas explicitement la variable indépendante t, les équations (l) sont dites de forme **hamiltonienne**.

123. Cette dénomination vient du nom du célèbre géomètre anglais W. R. Hamilton, qui a ramené à la forme en question les équations générales du mouvement d'un système de points matériels soumis à la seule action des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles *). En d'autres termes, un système hamiltonien représente sous la forme la plus simple les équations de tout problème de Dynamique auquel s'applique le principe des forces vives; par conséquent, deux problèmes de cette classe ne se distinguent l'un de l'autre que par le nombre des variables et par la forme de la fonction $H = f$. En se rappelant cette remarque, on comprendra facilement toute l'importance de ce problème: „Trouver une méthode générale d'intégration pour les équations de la forme des équations (l)."

Hamilton a commencé la série des découvertes qui con-

*) Voy. Philosoph. Transact, 1835, P. I: „Second Essay on a General Method in Dynamics. By W. R. **Hamilton**" (pag. 96—98).

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_1}, & \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_2}, \ldots, & \dfrac{dx_n}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_n}, \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}, & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2}, \ldots, & \dfrac{dy_n}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_n}, \end{cases}$$

où l'on suppose

$$H = F(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n),$$

F désignant une fonction donnée de $t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

On appelle intégrale des équations différentielles (1) une équation

$$U = \alpha,$$

dans laquelle α est une constante arbitraire, et U une fonction de $t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, ne renfermant point α, et telle, de plus, que sa dérivée totale par rapport à t se réduise identiquement à zéro, lorsqu'on élimine, au moyen des équations données (1), les dérivées des fonctions $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, prises par rapport à cette variable t.

125. La dérivée totale de la fonction U par rapport à t a pour expression

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dt}.$$

Si l'on y substitue les valeurs de $\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dy_n}{dt}$ tirées des équations (1), on devra avoir identiquement

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial y_1} - \frac{\partial U}{\partial y_1}\frac{\partial H}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\partial H}{\partial y_n} - \frac{\partial U}{\partial y_n}\frac{\partial H}{\partial x_n} = 0,$$

identité qui peut encore s'écrire, au moyen de la notation de Poisson, sous la forme

$$(2)\qquad \frac{\partial U}{\partial t} + (U, H) = 0.$$

Donc l'équation (2) fournit le critérium d'après lequel on peut juger si une fonction donnée U, égalée à une constante arbitraire, représente ou non une intégrale des équations (1). Si l'on substitue, par exemple, H à la place de U dans l'équation (2), on voit que le second terme du premier membre prend la forme (H, H), et par suite se réduit à zéro; il reste alors le terme

$\frac{\partial H}{\partial t}$, qui est aussi égal à zéro, lorsque H ne contient pas t explicitement. C'est ce qui a lieu effectivement pour les équations de la Dynamique de la forme hamiltonienne, dans le cas où l'on peut appliquer le principe des forces vives. Alors

$$H = \text{const.}$$

est une des intégrales des équations (1), et s'appelle l'intégrale des forces vives. Mais il n'en est plus ainsi dans le cas plus général que nous considérons actuellement, et dans lequel on suppose que H contient t explicitement.

126. La solution complète des équations (1) se compose de $2n$ intégrales distinctes, renfermant $2n$ constantes arbitraires. En résolvant les équations intégrales par rapport à ces constantes, on pourra les ramener à la forme

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \ldots, \quad \varphi_n = a_n,$$

$$\psi_1 = b_1, \quad \psi_2 = b_2, \ldots, \quad \psi_n = b_n,$$

$a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ représentant des constantes arbitraires, et $\varphi_1, \psi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_n$ des fonctions de $t, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$, ne renfermant point ces constantes, et satisfaisant chacune à la condition (2).

Démontrons maintenant la proposition qui sert de base à la théorie de l'intégration des équations (1).

Théorème I. Si l'on connaît n intégrales des équations (1),

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \ldots, \quad \varphi_n = a_n, \tag{3}$$

telles que la condition

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m} \right) = 0 \tag{4}$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$ des indices i et k; les n autres intégrales, qu'il faut joindre aux intégrales données (3) pour obtenir le système complet des équations qui contiennent la solution des équations (1), s'obtiendront:

1°. En intégrant la différentielle exacte

$$y_1 dx_1 + \ldots + y_n dx_n - F(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)\, dt,$$

où l'on aura remplacé $y_1, \ldots, y_n$ par leurs valeurs tirées des équations (3);

2°. En égalant à de nouvelles constantes arbitraires $b_1,..,\ b_n$ les dérivées partielles de l'intégrale de la différentielle précédente, prises par rapport à $a_1,..,\ a_n$.

127. Les conditions données (4) font voir, en vertu du Théorème II du §. 17, que les valeurs de $y_1,..,\ y_n$, tirées des équations (3), satisfont aux conditions

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \tag{5}$$

pour toutes les valeurs 1, 2,.., n des indices i et k; par conséquent, l'expression $y_1 dx_1 + .. + y_n dx_n$ est une différentielle exacte par rapport aux variables $x_1,..,\ x_n$. De plus, si l'on désigne par (H) le résultat de la substitution des valeurs de $y_1,..,\ y_n$ dans la fonction $F(t,\ x_1,..,\ x_n,\ y_1,..,\ y_n) = H$, nous allons démontrer que l'expression

$$y_1 dx_1 + .. + y_n dx_n - (H)\, dt \tag{6}$$

est aussi une différentielle exacte, par rapport à $x_1,...,\ x_n,\ t$. Pour cela, il suffit de vérifier que les conditions

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_i} = -\frac{\partial y_i}{\partial t}$$

sont satisfaites pour toutes les valeurs de $i = 1,\ 2,..,\ n$.

Or on a

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + .. + \frac{\partial H}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i},$$

ou, en vertu de l'égalité (5) et des équations données (1),

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_i} = -\frac{dy_i}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial x_1} + .. + \frac{dx_n}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial x_n}.$$

Nous avons supposé, de plus, qu'au moyen des équations (3), y_i est exprimé en fonction de $t,\ x_1,..,\ x_n$; par suite

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + .. + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Substituant cette valeur de $\frac{dy_i}{dt}$ dans l'égalité précédente, il vient, après réduction,

$$\frac{\partial (H)}{\partial x_i} = -\frac{\partial y_i}{\partial t},$$

et cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \ldots, n$; ce qu'il fallait démontrer.

En intégrant, par la méthode connue, la différentielle exacte (6), on détermine son intégrale V en fonction des variables t, $x_1, \ldots, x_n$ et des constantes $a_1, \ldots, a_n$, et en outre, d'une constante qui y entre par simple addition. On aura, par conséquent,

$$(7) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = y_1, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = y_2, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = y_n,$$

et

$$(a) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = -(H).$$

Les n premières de ces équations représentent évidemment les équations (3), résolues par rapport à $y_1, \ldots, y_n$; la dernière est une identité.

128. Passons maintenant à la seconde partie du théorème, et démontrons que les équations

$$(8) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = b_n$$

sont des intégrales des équations (1). Pour cela, il suffira de vérifier, d'après ce qui a été établi tout à l'heure, que les différentielles totales par rapport à t des premiers membres des équations (8) se réduisent à zéro par l'élimination des dérivées $\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$ au moyen des équations (1). En effet, on a

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt},$$

ou, en intervertissant l'ordre des différentiations partielles de la fonction V,

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial t}}{\partial a_i} + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial x_1}}{\partial a_i}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial x_n}}{\partial a_i}\frac{dx_n}{dt}.$$

Ensuite, en ayant égard aux équations (7) et (a), et éliminant, à l'aide des équations (1), les dérivées $\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$, il vient

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = -\frac{\partial(H)}{\partial a_i} + \frac{\partial y_1}{\partial a_i}\frac{\partial H}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_i}\frac{\partial H}{\partial y_n}.$$

Mais, d'après la manière dont nous avons défini la quantité (H), on a

$$\frac{\partial(H)}{\partial a_i} = \frac{\partial H}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial a_i} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial a_i}.$$

Donc le second membre de l'équation précédente se réduit identiquement à zéro, et par suite il en est de même du premier, de sorte qu'on a

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = 0,$$

pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, .., n$. Le théorème est donc démontré.

129. La démonstration précédente conduit à des conclusions importantes, savoir, que:

1°. Le problème de l'intégration des équations (1) est résolu dès que l'on connaît la fonction V, puisqu'alors les équations (7) et (8) fournissent le système complet des $2n$ intégrales des équations données.

2°. La fonction V peut être déterminée immédiatement de la manière suivante. L'équation

$$(a) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + (H) = 0,$$

comme nous l'avons déjà remarqué, doit avoir lieu identiquement. Or son second terme (H) représente le résultat de la substitution dans la fonction $F(t, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n)$ des valeurs de $y_1, .., y_n$ tirées des équations (3), et ces valeurs sont les mêmes que celles que donnent les équations (7). Par conséquent, la fonction V doit changer en identité, c'est-à-dire vérifier l'équation

$$(9) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Comme la fonction V, outre les variables $t, x_1, .., x_n$, doit contenir n constantes arbitraires $a_1, .., a_n$ (sans compter celle qui y entre par simple addition), il s'ensuit de là qu'elle doit être déterminée comme une des intégrales complètes de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (9).

130. Les conclusions précédentes, déduites comme conséquences du Théorème I, ont une telle importance pour la théorie de l'intégration des équations (1), qu'il ne sera pas inutile de les démontrer, ou, pour mieux dire, de les vérifier directement.

Théorème II. Si V représente une des intégrales complètes de l'équation (9) [c'est-à-dire une intégrale renfermant, outre la constante qui y entre par simple addition, n constantes arbitraires $a_1, .., a_n$, de telle manière que ces dernières ne puissent être toutes éliminées qu'en faisant usage de toutes les $n+1$ équations qui donnent les valeurs des dérivées partielles de la fonction V par rapport à $x_1, .., x_n, t$], cette intégrale complète jouira des propriétés de la fonction principale de Hamilton, c'est-à-dire qu'elle donnera le système complet des $2n$ intégrales des équations (1), sous la forme des équations (7) et (8), parce que les équations différentielles (1) sont une conséquence directe de ces intégrales.

En prenant une des équations (8),

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

et la différentiant totalement par rapport à t, on trouve

$$(b) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = 0.$$

Si l'on différentie, d'autre part, l'équation (9) par rapport à a_i, et qu'on ait égard en même temps aux équations (7), il vient

$$(c) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_i} = 0.$$

En faisant successivement, dans les équations (b) et (c), $i = 1, 2, .., n$, on obtiendra deux systèmes d'équations, par la comparaison desquels on voit aisément que les valeurs de $\frac{dx_1}{dt}, .., \frac{dx_n}{dt}$, tirées du premier, sont identiques respectivement avec les valeurs $\frac{\partial F}{\partial y_1}, .., \frac{\partial F}{\partial y_n}$, tirées du second. Par suite, n des équations (1), de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i},$$

sont une conséquence nécessaire des équations intégrales (7) et (8), c'est-à-dire qu'elles sont satisfaites par ces intégrales.

où l'on pose, pour abréger, $\frac{\partial V}{\partial t} = y$, et généralement $\frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i$, on obtient les n équations

$$(10)\qquad \begin{cases} f_1(t, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n) = a_1, \\ f_2(t, x_1, .., x_n, y_2, .., y_n, a_1) = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(t, x_1, .., x_n, y_n, a_1, .., a_{n-1}) = a_n, \end{cases}$$

$a_1, .., a_n$ étant des constantes arbitraires, et les fonctions $f_1, .., f_n$ étant déterminées de manière à satisfaire aux conditions

$$(f, f_i) = 0, \quad \text{et} \quad (f_i, f_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs 1, 2,.., n des indices i et k.

En éliminant les constantes $a_1, .., a_{n-1}$ des premiers membres des équations (10), au moyen de ces équations elles mêmes, on réduira ces équations à la forme

$$(11)\qquad H_1 = a_1, \; H_2 = a_2, .., \; H_n = a_n,$$

$H_1, .., H_n$ étant des fonctions de $t, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n$ ne contenant par la variable y, et telles qu'on ait, en général,

$$H_i = f_i(t, x_1, .., x_n, y_i, .., y_n, f_1, H_2, .., H_{i-1}).$$

En vertu de ce qui a été démontré au §. 21, les premiers membres des équations (11) doivent satisfaire aux conditions

$$(f, H_i) = 0, \quad \text{et} \quad (H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs 1, 2,.., n des indices i et k.

La première série de ces conditions démontre que les équations (11) sont des intégrales des équations (1). En effet,

$$(f, H_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial t}, & \frac{\partial H_i}{\partial t} \\ 1, & 0 \end{vmatrix} + \sum_{m=1}^{m=n} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_m}, & \frac{\partial H_i}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F}{\partial y_m}, & \frac{\partial H_i}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{\frac{\partial H_i}{\partial t} + (H_i, F)\right\} = 0;$$

ce qui démontre, d'après la condition (2), que l'équation $H_i = a_i$ est une intégrale des équations (1).

Les conditions $(H_i, H_k) = 0$ sont celles-là mêmes qui, d'après

le Théorème I (art. 126), doivent être satisfaites par les fonctions $\varphi_1, .., \varphi_n$. Par suite, l'intégrale de l'expression

$$y_1 dx_1 + .. + y_n dx_n - F(t, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n) dt,$$

où $y_1, .., y_n$ doivent être remplacés par leurs valeurs tirées des équations (10), jouit des mêmes propriétés que la fonction V du Théorème I.

134. **Remarque.** Dans la démonstration du Théorème I, nous avons vu que l'expression (6) doit être une différentielle exacte. On peut démontrer de la même manière que l'expression

$$x_1 dy_1 + .. + x_n dy_n + F(t, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n) dt$$

doit être une différentielle exacte, si l'on y remplace $x_1, \ldots, x_n$ par leurs valeurs tirées des équations (3). Il est facile de voir, d'après cela, que, si l'on désigne par W l'intégrale de la différentielle précédente, ou une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial W}{\partial t} - F\left(t, \frac{\partial W}{\partial y_1}, .., \frac{\partial W}{\partial y_n}, y_1, .., y_n\right) = 0, \tag{12}$$

on pourra mettre le système complet des $2n$ intégrales des équations (1) sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial y_1} = x_1, \quad \frac{\partial W}{\partial y_2} = x_2, .., \quad \frac{\partial W}{\partial y_n} = x_n,$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1', \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2', .., \quad \frac{\partial W}{\partial a_n} = b_n'.$$

. . . . . .

§. 28.

135. La Remarque précédente nous offre un exemple de la manière dont le même problème de l'intégration des équations (1) peut être ramené à l'intégration d'équations aux dérivées partielles de formes différentes, (9) ou (12), suivant le choix que l'on a fait des variables indépendantes. Cela nous donne l'occasion d'exposer la méthode tout à fait générale, indiquée par Jacobi (Nova methodus, p. 122, §. 57), pour le changement de variables tant dans une équation aux dérivées partielles du premier ordre, que dans le système d'équations canoniques qui lui correspond; méthode qui fournit des équations transformées du même type que les équations primitives.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre peut être représentée par

$$(A) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, x_1, .., x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, .., \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0,$$

ou, en posant généralement $y_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - F(t, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n).$$

Le système canonique correspondant, dont l'intégration complète dépend de la détermination d'une intégrale complète de l'équation (A), se composera des $2n$ équations

$$(B) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

i désignant successivement chacun des nombres 1, 2, .., n.

L'équation (A) donne l'expression de l'une des dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial t}$ en fonction des autres dérivées partielles $y_1, \ldots, y_n$ et des variables indépendantes $t, x_1, \ldots, x_n$; donc elle est équivalente à l'équation

$$(C) \quad dV = - F(t, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n)dt + y_1 dx_1 + .. + y_n dx_n,$$

et, si nous exprimons l'équation (C) au moyen des nouvelles variables, nous transformerons en même temps l'équation (A), et par suite aussi les équations (B).

136. Conservons la variable t sans changement, et introduisons, au lieu de $x_1, .., x_n$, de nouvelles variables $q_1, .., q_n$. Pour cela, entre les anciennes variables et les nouvelles on devra donner n équations. En supposant l'existence de ces équations, sans toutefois spécialiser leur forme, prenons une fonction entièrement arbitraire U des anciennes variables $t, x_1, .., x_n$, et des nouvelles $q_1, .., q_n$. En faisant subir des accroissements infiniment petits aux variables de l'un des systèmes, celles de l'autre système prendront des accroissements infiniment petits correspondants, et la différentielle totale de la fonction U aura pour expression

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + .. + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + .. + \frac{\partial U}{\partial q_n} dq_n.$$

Si l'on retranche de cette équation l'équation (C), il vient

$$d(U-V)=\left[\frac{\partial U}{\partial t}+F(t,\ x_1,..,\ x_n,\ y_1,...,\ y_n)\right]dt$$
$$+\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}-y_1\right)dx_1+..+\left(\frac{\partial U}{\partial x_n}-y_n\right)dx_n+\frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1+..+\frac{\partial U}{\partial q_n}dq_n.$$

Comme la dépendance entre les anciennes variables et les nouvelles n'est pas encore fixée, déterminons-la de telle manière que l'on ait

$$(D)\qquad \frac{\partial U}{\partial x_1}=y_1=\frac{\partial V}{\partial x_1},...,\ \frac{\partial U}{\partial x_n}=y_n=\frac{\partial V}{\partial x_n}.$$

En désignant, de plus, par W la différence des deux fonctions U et V, nous donnerons à l'équation précédente la forme

$$dW=\left[\frac{\partial U}{\partial t}+F(t,\ x_1,..,\ x_n,\ y_1,...,\ y_n)\right]dt$$
$$+\frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1+...+\frac{\partial U}{\partial q_n}dq_n.$$

Dans le second membre de cette dernière équation, le coefficient de dt représente évidemment la dérivée partielle par rapport à t de la fonction $W=U-V$; voyons comment s'expriment les dérivées partielles de cette fonction par rapport à $q_1,..,\ q_n$.

Pour cela, en différentiant W par rapport à q_i, et considérant $x_1,..,\ x_n$ comme des fonctions de cette variable, on a

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=\frac{\partial(U-V)}{\partial q_i}$$
$$=\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_i}+..+\frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_i}-...-\frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_i}$$
$$=\frac{\partial U}{\partial q_i}+\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}-\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial q_i}+..+\left(\frac{\partial U}{\partial x_n}-\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x_n}{\partial q_i},$$

ou, en vertu des équations (D),

$$(E)\qquad \frac{\partial W}{\partial q_i}=\frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Des équations semblables auront lieu pour toutes les valeurs de $i=1,\ 2,..,\ n$. Donc

$$dW=\left[\frac{\partial U}{\partial t}+F(t,\ x_1,..,\ x_n,\ y_1,...,\ y_n)\right]dt$$
$$+\frac{\partial W}{\partial q_1}dq_1+...+\frac{\partial W}{\partial q_n}dq_n.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à exprimer le coefficient de dt au moyen des dérivées partielles de la fonction W et des variables $q_1,\ldots, q_n$. Pour cela, en ayant égard aux équations (D), nous le ramènerons à la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + F\left(t, x_1,\ldots, x_n, \frac{\partial U}{\partial x_1},\ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}\right),$$

sous laquelle il ne contient que les variables $t, x_1,\ldots, x_n$ et $q_1,\ldots, q_n$. Si ensuite, à l'aide des équations (E), on exprime $x_1,\ldots, x_n$ en fonction de $t, q_1,\ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1},\ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}$, on ramènera le coefficient considéré à la forme demandée. En représentant cette forme par

$$-\varphi\left(t, q_1,\ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1},\ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right),$$

on aura ainsi

$$dW = -\varphi\left(t, q_1,\ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1},\ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) dt + \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial q_n} dq_n.$$

De cette manière, l'équation (C) se trouve exprimée au moyen des nouvelles variables, et comme elle est maintenant équivalente à celle-ci

$$(A') \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi\left(t, q_1,\ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1},\ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = 0,$$

cette dernière équation représente la transformée de l'équation (A). Enfin, si l'on pose généralement $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$, on pourra écrire immédiatement le système canonique correspondant à l'équation (A'), et composé des $2n$ équations

$$(B') \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_i},$$

pour $i = 1, 2,\ldots, n$; et ce système représente le système (B) exprimé au moyen des nouvelles variables.

137. Dès que l'on connaîtra l'intégrale complète de l'une des équations (A) ou (A'), l'intégrale complète de l'autre pourra se déterminer au moyen de la relation

$$W + V = U.$$

En effet, supposons connue l'intégrale complète de l'équation (A'),

$$W = \chi(t, q_1,\ldots, q_n, \alpha_1,\ldots, \alpha_n) + \text{const.},$$

$a_1, .., a_n$ étant des constantes arbitraires. Au moyen de la relation précédente, on aura

$$V = U - \chi - \text{const.},$$

et les variables $q_1, .., q_n$, qui entrent dans les fonctions U et χ, pourront être exprimées en t, $x_1, .., x_n$, au moyen des n équations (E).

Si, au contraire, on connaît l'intégrale complète de l'équation (A),

$$V = \psi(t, x_1, .., x_n, a_1, .., a_n) + \text{const.},$$

on aura alors

$$W = U - \psi - \text{const.},$$

et, dans l'expression de W, les variables $x_1, .., x_n$ pourront être éliminées au moyen des n équations (D).

Si l'on fait, en particulier,

$$U = x_1 q_1 + .. + x_n q_n,$$

on trouvera que les équations (D) et (E) prendront la forme

$$q_i = y_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = x_i.$$

Par conséquent, les équations (C), (A) et (B) se transformeront dans les suivantes,

$$(C_1) \qquad dW = F\left(t, \frac{\partial W}{\partial q_1}, .., \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, .., q_n\right) dt + \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + .. + \frac{\partial W}{\partial q_n} dq_n,$$

$$(A_1) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} - F\left(t, \frac{\partial W}{\partial q_1}, .., \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, .., q_n\right) = 0,$$

$$(B_1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i},$$

pour $i = 1, 2, .., n$.

Les équations (A) et (A_1) ont évidemment entre elles la même corrélation que les équations (9) et (12) du paragraphe précédent; donc la dépendance entre les intégrales des deux premières équations ou entre les intégrales des deux dernières s'exprimera de la manière suivante,

$$W + V = x_1 q_1 + \ldots + x_n q_n = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

§. 29.

138. Les conclusions générales relatives à la théorie de l'intégrations des équations canoniques de la forme générale (1) s'appliquent aussi au cas particulier, qui représente les équations du mouvement dans les questions où le principe des forces vives a lieu, et pour lequel la fonction donnée H ne contient pas t explicitement; c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$H = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n).$$

Les équations différentielles conservent leur type primitif

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$; mais maintenant la variable t n'y entre que par sa différentielle dt. En éliminant celle-ci, on a les $2n - 1$ équations

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial y_n}} = \frac{dy_1}{-\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dy_n}{-\frac{\partial H}{\partial x_n}},$$

entre les seules variables $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$. L'intégration complète de ce système d'équations donnera les expressions de toutes les variables en fonction de l'une d'entre elles, de x_1, par exemple, et de $2n-1$ constantes arbitraires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}$. Si l'on porte ces expressions dans l'équation $\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}$, on obtiendra la dernière intégrale du système (1), la seule qui renfermera t explicitement, au moyen d'une quadrature,

$$t + \alpha_{2n} = \int \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}}.$$

Cela fait voir que le système complet des intégrales des équations (1), résolues par rapport aux constantes arbitraires, peut être représenté par $2n-1$ équations de la forme

$$\alpha_i = \varphi_i,$$

et par une $(2n)^{ième}$ équation de la forme

$$\alpha_{2n} = \varphi_{2n} - t,$$

φ_i et φ_{2n} désignant des fonctions qui ne contiennent pas t explicitement. La méthode générale du §. 27 donne les intégrales des équations (1) précisément sous cette forme, mais par une voie plus simple.

139. D'après la remarque que nous avons faite au commencement du §. 27, en posant

$$H = \text{const.} = h, \tag{2}$$

nous aurons immédiatement une des intégrales ne contenant pas t des équations (1). Supposons qu'avec cela on connaisse encore $n-1$ autres intégrales de ces équations,

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \ldots, \quad \varphi_{n-1} = a_{n-1}, \tag{3}$$

$a_1, \ldots, a_{n-1}$ étant des constantes arbitraires, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, ne contenant pas t explicitement, et satisfaisant aux conditions

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0, \tag{4}$$

pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$ des indices i et k.

Sous ces conditions, il est facile, à l'aide du Théorème I du §. 27, de déterminer les intégrales restantes des équations (1). La démonstration de ce Théorème se trouve même simplifiée. En effet, l'expression

$$y_1 dx_1 + \ldots + y_n dx_n - f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)\, dt,$$

en y substituant les valeurs de $y_1, \ldots, y_n$ tirées des équations (2) et (3), devient une différentielle exacte, puisque les égalités $\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ auront lieu pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$ des indices i et k, en vertu des conditions (4) et de la supposition que les équations (3) représentent des intégrales indépendantes de t des équations (1).

Ensuite, les égalités $\frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{\partial (H)}{\partial x_i}$ [(H) représentant ce que devient f lorsqu'on y substitue les valeurs de $y_1, \ldots, y_n$] sont satisfaites pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \ldots, n$, parce que y_i ne contient pas explicitement t, et que, l'équation (2) étant du nombre de celles qui ont servi à déterminer les valeurs de $y_1, \ldots, y_n$, la substitution de ces valeurs réduit identiquement son premier membre à la constante h.

L'intégrale de la différentielle exacte précédente a pour expression

$$U = V - ht,$$

V désignant l'intégrale de la différentielle exacte

$$y_1 dx_1 + \ldots + y_n dx_n.$$

En vertu du Théorème I du §. 27, les n intégrales cherchées des équations (1) s'obtiendront en posant

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial a_1} = \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \ldots, & \dfrac{\partial U}{\partial a_{n-1}} = \dfrac{\partial V}{\partial a_{n-1}} = b_{n-1} \\ \dfrac{\partial U}{\partial h} = \dfrac{\partial V}{\partial h} - t = g, \end{cases}$$

$b_1, \ldots, b_{n-1}, g$ désignant de nouvelles constantes arbitraires. En effet, si l'on représente par a une des constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_{n-1}, h$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d\dfrac{\partial V}{\partial a}}{dt} &= \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial a}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial a}}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial x_1}}{\partial a} \frac{\partial H}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{\partial a} \frac{\partial H}{\partial y_n} \\ &= \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial a}, \end{aligned}$$

ou enfin

$$\frac{d\dfrac{\partial V}{\partial a}}{dt} = \frac{\partial (H)}{\partial a}.$$

Or l'expression (H) est identiquement égale à h; donc, pour $a = a_1, \ldots, a_{n-1}$, on a

$$\frac{d\dfrac{\partial V}{\partial a}}{dt} = 0,$$

et, pour $a = h$,

$$\frac{d\dfrac{\partial V}{\partial h}}{dt} = 1.$$

Donc on a identiquement

$$\frac{d\dfrac{\partial V}{\partial a}}{dt} = 0$$

pour toutes les valeurs de $a = a_1, \ldots, a_{n-1}, h$.

140. Remarquons que l'égalité $\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ n'est pas détruite, lorsqu'on prend les dérivées partielles de ses deux membres par rapport à a. On aura donc, pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$ des indices i et k,

$$\frac{\partial \frac{\partial y_i}{\partial a}}{\partial x_k} = \frac{\partial \frac{\partial y_k}{\partial a}}{\partial x_i}.$$

Donc le système des intégrales (5) peut s'obtenir sans déterminer la fonction V, et en intégrant une suite de différentielles exactes; et il pourra se mettre sous la forme générale

$$\int \left(\frac{\partial y_1}{\partial a_i} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_i} dx_n \right) = b_i,$$

$$\int \left(\frac{\partial y_1}{\partial h} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial h} dx_n \right) = g + t,$$

en faisant successivement $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Quant à la détermination immédiate de la fonction V, il est clair que les valeurs $y_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, y_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}$ doivent être identiques avec celles que l'on tire des équations (2) et (3); donc la fonction V doit nécessairement changer en identité l'équation

$$f\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = h,$$

et il suffit qu'elle soit déterminée comme intégrale complète de cette équation.

141. La méthode que nous venons d'exposer ne s'applique pas, il est vrai, avec le même avantage à la résolution des différentes questions de Dynamique, de nature plus ou moins compliquée. Ayant seulement en vue d'éclaircir par des exemples particuliers la théorie précédente de l'intégration des équations de forme canonique, je vais traiter une des questions les plus simples, à la solution de laquelle elle s'applique sans aucune difficulté.

Considérons le problème du mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force exprimée en fonction de la distance.

Prenons le plan dans lequel doit s'effectuer le mouvement pour plan des coordonnées rectangulaires x, y, dont l'origine est au centre d'attraction; désignons par r le rayon vecteur du point mobile, et par $\varphi(r)$ la force accélératrice qui agit sur ce point dans la direction du centre d'attraction. En considérant les coordonnées x et y du mobile comme des fonctions du temps t, on a, pour les expressions générales des composantes de la force accélératrice parallèles aux axes coordonnés, $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$. D'un autre côté, ces mêmes composantes, dans le cas actuel, ont pour valeurs respectives $-\frac{x}{r}\varphi(r)$ et $-\frac{y}{r}\varphi(r)$. Donc les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}\varphi(r), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}\varphi(r),$$

en faisant $r^2 = x^2 + y^2$.

Pour obtenir l'intégrale des forces vives, ajoutons les équations (1), après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, ce qui donne

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y}{dt^2} = -\varphi(r)\frac{xdx + ydy}{r},$$

ou

$$\tfrac{1}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -\varphi(r)\,dr,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$(2) \qquad H = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \int\varphi(r)\,dr = \text{const.} = h,$$

x', y' étant les composantes de la vitesse du mobile parallèlement aux axes des x et des y, savoir

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y'.$$

Si l'on remarque maintenant que l'on a

$$\frac{\partial H}{\partial x'} = x', \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial\int\varphi(r)dr}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \varphi(r)\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y'} = y', \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial\int\varphi(r)dr}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \varphi(r)\frac{y}{r},$$

on pourra ramener les équations du mouvement (3) et (1) à la forme canonique ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x'}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y'},$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Comme il n'entre dans ces équations que quatre fonctions inconnues de la variable t, il suffit de connaître, outre l'intégrale (2), une autre intégrale qui ne renferme pas le temps explicitement. Le principe des aires fournit l'intégrale demandée. Si l'on élimine, en effet, entre les équations (1), les termes qui contiennent r, il vient

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\varphi = xy' - yx' = \text{const.} = a. \tag{4}$$

La condition $(H, \varphi) = 0$ doit être évidemment satisfaite, ce qu'il est, du reste, aisé de vérifier directement, puisque

$$(H, \varphi) = -\varphi(r)\frac{x}{r}.y - x'.y' + \varphi(r)\frac{y}{r}.x + y'.x'.$$

Ensuite il faut tirer des équations (2) et (4) les valeurs de x' et de y', qui rendent $x'dx + y'dy$ une différentielle exacte. Pour cela, en éliminant y' de l'équation (2) à l'aide de (4), on obtient une équation du second degré en x',

$$(x^2+y^2)x'^2 + 2ay.x' = 2[h - \int\varphi(r)\,dr]\,x^2 - a^2,$$

d'où, à cause de $x^2+y^2 = r^2$, et en faisant, pour abréger,

$$R = \sqrt{2[h - \int\varphi(r)\,dr]\,r^2 - a^2},$$

on tire

$$x' = \frac{-ay \pm xR}{r^2}.$$

On trouve de même

$$y' = \frac{ax \pm yR}{r^2}.$$

Donc

$$dV = a\,\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \pm \frac{xdx + ydy}{r^2}.R$$

$$= a.d\,\text{arctang}\frac{y}{x} \pm \frac{dr}{r}R,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$V = a \cdot \operatorname{arctang} \frac{y}{x} \pm \int \frac{dr}{r} \cdot R.$$

Maintenant les deux intégrales du problème qui restent à trouver s'exprimeront comme il suit,

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \operatorname{arctang} \frac{y}{x} \mp \int \frac{dr}{rR} = b = \text{const.},$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} - t = \pm \int \frac{r dr}{R} - t = g = \text{const.}$$

La première de ces intégrales donne l'équation de la trajectoire du point mobile; la seconde donne le temps en fonction du rayon vecteur. Les quadratures qui y entrent pourront généralement être déterminées, lorsqu'on donnera la forme de la fonction $\varphi(r)$. En supposant, par exemple, $\varphi(r) = \frac{\mu}{r^2}$, μ étant une constante, on obtiendra des résultats conformes à ceux que les Traités de Mécanique établissent ordinairement par une autre voie.

Remarquons encore que la fonction V représente une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = 2[h - \int \varphi(r)\, dr],$$

que l'on tire de l'équation (2), en y remplaçant x' et y' par leurs valeurs $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$.

§. 30.

142. Pour terminer cette esquisse de la théorie de l'intégration des équations simultanées aux différentielles ordinaires de forme canonique, considérons une propriété très-remarquable de leurs intégrales, qui constitue le **Théorème de Poisson**, et que nous avons déjà établie d'une manière indirecte au §. 18, après avoir indiqué au commencement de ce paragraphe (art. 46) sa haute importance dans la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. La démonstration la plus directe et la plus simple de ce théorème, que nous allons exposer tout à l'heure, montre effectivement qu'il est une conséquence immédiate de l'égalité trinôme qui exprime le Théorème I du §. 17. De là il est facile de voir que l'existence de cette

identité pouvait être conclue en s'appuyant seulement sur le théorème de Poisson.

Reprenons le système canonique de $2n$ équations de la forme

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

en supposant $H = F(t, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, et donnant à l'indice i toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Soient

$$(2) \quad \varphi(t, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \text{const.}, \quad \psi(t, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \text{const.}$$

deux intégrales de ce système, φ et ψ étant des fonctions données. Le théorème de Poisson consiste en ce que l'expression

$$\sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\partial \psi}{\partial y_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \right), \text{ ou } (\varphi, \psi),$$

égalée à une constante arbitraire, est aussi une intégrale des équations (1).

Comme les équations (2) représentent des intégrales de (1), les fonctions φ et ψ, en vertu de ce qui a été démontré au §. 27, doivent vérifier identiquement les conditions

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) = 0.$$

Si l'équation $(\varphi, \psi) = \text{const.}$ et aussi une intégrale des équations (1), la fonction (φ, ψ) devra vérifier identiquement la condition

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} + [(\varphi, \psi), H] = 0.$$

Or, en vertu de la formule (9) du §. 16, on a

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right).$$

En substituant ici les valeurs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (H, \varphi), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H, \psi),$$

il vient

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = [(H, \varphi), \psi] + [\varphi, (H, \psi)].$$

Donc la condition relative à la fonction (φ, ψ) prend la forme de l'équation

En prenant une fonction arbitraire ω des variables $\psi, \psi_1, .., \psi_{m-1}$, on a

$$(\varphi, \omega) = \psi_1 \frac{\partial \omega}{\partial \psi} + \psi_2 \frac{\partial \omega}{\partial \psi_1} + .. + F(\psi, \psi_1, .., \psi_{m-1}) \frac{\partial \omega}{\partial \psi_{m-1}}.$$

Donc, si nous voulons déterminer ω de manière que (φ, ω) soit identiquement égal à 1 ou à 0, on devra intégrer l'équation linéaire

$$\psi_1 \frac{\partial \omega}{\partial \psi} + \psi_2 \frac{\partial \omega}{\partial \psi_1} + .. + F(\psi, \psi_1, .., \psi_{m-1}) \frac{\partial \omega}{\partial \psi_{m-1}} = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ 0 \end{cases}.$$

Donc les intégrales du système d'équations simultanées

$$\frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = \ldots = \frac{d\psi_{m-1}}{F} = \frac{d\omega}{1 (\text{ou } 0)}$$

donnent les valeurs de la fonction ω au moyen desquelles on formera son expression la plus générale, qui sera l'intégrale générale de l'équation linéaire précédente.

La méthode de Bertrand pour l'intégration des équations de la Dynamique de forme hamiltonienne (1), où $H = f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, consiste dans ce qui suit. On déterminera une intégrale des équations (1),

$$\varphi(x_1, y_1, .., x_n, y_n) = \text{const.},$$

différente de l'intégrale des forces vives, et l'on cherchera une autre intégrale

$$\psi(x_1, y_1, .., x_n, y_n) = \text{const.}$$

par la condition que la fonction ψ donne l'identité

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ 1 \end{cases}.$$

145. Comme application, prenons le problème du mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force fonction de la distance.

Sous les mêmes conditions qu'au paragraphe précédent, les équations du mouvement seront

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', & \dfrac{dy}{dt} = y', \\ \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{x}{r}\varphi(r), & \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{y}{r}\varphi(r). \end{cases}$$

Le principe des aires donne l'intégrale

$$f = xy' - yx' = \text{const.} \tag{2}$$

Supposons que

$$\psi(x, y, x', y', t) = \text{const.} \tag{3}$$

soit une seconde intégrale. En exprimant la condition que cette intégrale, combinée avec la première, donne identiquement (ψ, f) égal à zéro ou à l'unité, on a les deux équations linéaires

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}y - \frac{\partial\psi}{\partial x'}y' + \frac{\partial\psi}{\partial y}x + \frac{\partial\psi}{\partial y'}x' = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ 1 \end{cases}. \tag{4}$$

L'intégration de la première de ces équations conduit au système d'équations simultanées

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dx'}{-y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = \frac{d\psi}{0},$$

dont une des intégrales est

$$\psi = c_1,$$

et il est facile de trouver les trois autres

$$x^2 + y^2 = c_2, \quad x'^2 + y'^2 = c_3, \quad xx' + yy' = c_4,$$

c_1, c_2, c_3, c_4 étant des constantes arbitraires.

Par suite, en posant, pour abréger,

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x'^2 + y'^2, \quad w = xx' + yy',$$

on aura, pour la valeur la plus générale de la fonction ψ qui satisfasse à la première équation (4),

$$\psi = \pi(u, v, w), \tag{a}$$

π désignant une fonction arbitraire. Si t devait entrer explicitement dans l'intégrale (3), on poserait alors

$$\psi = t + \pi(u, v, w). \tag{a'}$$

Si l'on prend, pour déterminer ψ, la seconde des équations linéaires (4), on devra intégrer le système des équations

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dx'}{-y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = \frac{d\psi}{1},$$

ou

$$\frac{dx}{d\psi} = -y, \quad \frac{dy}{d\psi} = x, \quad \frac{dx'}{d\psi} = -y', \quad \frac{dy'}{d\psi} = x',$$

dont les intégrales sont exprimées par les équations

$$x = A\cos(\psi+\alpha), \qquad y = A\sin(\psi+\alpha),$$
$$x' = B\cos(\psi+\beta), \qquad y' = B\sin(\psi+\beta),$$

α, β, A, B désignant des constantes arbitraires. De ces équations on tire aisément les suivantes,

$$(b)\quad \begin{cases} x^2+y^2 = C', & x'^2+y'^2 = C'', \\ xx'+yy' = C''', & \operatorname{arctang}\dfrac{y}{x}+\psi = C^{IV}, \end{cases}$$

C', C'', C''', C^{IV} étant des constantes arbitraires. Donc l'expression générale de la fonction ψ satisfaisant à la seconde des équations (4), sera

$$\psi = \operatorname{arctang}\frac{y}{x}+\omega(u,\ v,\ w),$$

ω étant une fonction entièrement arbitraire.

146. Il faut maintenant compléter la détermination des expressions trouvées (a), (a'), (b) de la fonction ψ par la condition que chacune d'elles, étant égalée à une constante arbitraire, représente une intégrale des équations (1). Pour cela, il faut exprimer que les dérivées totales de ces fonctions par rapport à t se réduisent identiquement à zéro, par l'élimination des dérivées de x, y, x', y' prises par rapport à t. En commençant par l'expression (a), on trouve

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{dy'}{dt};$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\pi}{\partial u}.2x+\frac{\partial\pi}{\partial w}.x', \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\pi}{\partial u}.2y+\frac{\partial\pi}{\partial w}.y',$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x'} = \frac{\partial\pi}{\partial v}.2x'+\frac{\partial\pi}{\partial w}.x, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y'} = \frac{\partial\pi}{\partial v}.2y'+\frac{\partial\pi}{\partial w}.y;$$

et, en posant, pour abréger, $-\dfrac{\varphi(r)}{r} = \Phi(u)$, on a, en vertu des équations (1),

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dx'}{dt} = x\,\Phi(u), \quad \frac{dy'}{dt} = y\,\Phi(u).$$

Donc la condition $\dfrac{d\psi}{dt} = 0$ s'exprimera de la manière suivante,

$$2\frac{\partial\pi}{\partial u}(xx'+yy')+2\frac{\partial\pi}{\partial v}(xx'+yy')\Phi(u)$$

$$+\frac{\partial\pi}{\partial w}[x'^2+y'^2+(x^2+y^2)\Phi(u)]=0,$$

ou

$$2\frac{\partial\pi}{\partial u}w+2\frac{\partial\pi}{\partial v}w\Phi(u)+\frac{\partial\pi}{\partial w}[v+u\Phi(u)]=0.$$

Cette équation, linéaire par rapport aux dérivées partielles de π, permet de déterminer la forme de cette fonction conformément au but proposé, au moyen de l'intégration des équations

$$\frac{du}{2w}=\frac{dv}{2w\Phi(u)}=\frac{dw}{v+u\Phi(u)}=\frac{d\pi}{0}.$$

Une des intégrales de ces équations sera $\pi=c_1$; une autre s'obtiendra au moyen de l'équation

$$du=\frac{dv}{\Phi(u)},\quad \text{d'où}\quad v-\int\Phi(u)du=c_2.$$

Enfin, en écrivant les équations données sous la forme

$$\frac{vdu}{v}=\frac{udv}{u\Phi(u)}=\frac{2wdw}{v+u\Phi(u)}=\frac{vdu+udv}{v+u\Phi(u)},$$

on obtient l'équation

$$2wdw=vdu+udv,$$

d'où l'on tire la troisième intégrale

$$w^2-uv=c_3.$$

Donc l'expression de la fonction π doit être

$$\pi=\Pi[v-\int\Phi(u)\,du,\quad uv-w^2],$$

Π désignant une fonction arbitraire; ou, en remplaçant u, v, w et $\Phi(u)$ par leurs valeurs, et remarquant que $du=2rdr$, et que

$$uv-w^2=(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-(xx'+yy')^2=(xy'-yx')^2,$$

$$\psi=\pi=\Pi[x'^2+y'^2+2\int\varphi(r)\,dr,\quad (xy'-yx')^2];$$

c'est-à-dire que l'intégrale des équations (1), $\psi=$const., obtenue de cette manière, représentera une combinaison algébrique arbitraire des équations des forces vives et des aires, laquelle ne peut constituer une nouvelle intégrale.

147. En prenant maintenant la forme (a') pour représenter

immédiatement des données du problème, chacun des suivants ne pouvant être formé qu'après l'intégration complète du système précédent. Cauchy, qui a fait choix d'un autre procédé, et Jacobi, qui s'est occupé de simplifier la méthode de Pfaff, ont démontré l'un et l'autre que, pour obtenir l'intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, il suffit d'intégrer complétement le premier des systèmes d'équations simultanées de la méthode de Pfaff. Considérant la parfaite conformité des conclusions finales des méthodes de Cauchy et de Jacobi, je me bornerai à exposer seulement la première de ces méthodes sous la forme la plus générale.

151. Soient $x_1, .., x_n$, n variables indépendantes; z une fonction inconnue de ces variables;

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \quad \text{pour } i = 1, 2, .., n,$$

les dérivées partielles de cette fonction.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre peut être représentée par

$$F(x_1, .., x_n, z, p_1, .., p_n) = 0. \tag{1}$$

La détermination de la fonction z qui satisfait à l'équation (1) constitue un problème indéterminé de sa nature; et, en effet, l'expression la plus générale de z doit renfermer une fonction arbitraire. Mais Cauchy rend la question tout à fait déterminée, en y ajoutant cette condition complémentaire, que, pour une valeur particulière donnée de l'une des variables indépendantes, soit pour

$$x_n = a,$$

la fonction z et ses dérivées partielles $p_1, .., p_n$ prennent respectivement les valeurs $\zeta, \omega_1, .., \omega_n$; ζ désignant une fonction de $x_1, .., x_{n-1}$ donnée arbitrairement, soit

$$f(x_1, .., x_{n-1});$$

$\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ étant les dérivées partielles de cette fonction, de sorte que, en général,

$$\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \text{pour } i = 1, 2, .., n-1;$$

enfin, ω_n étant la valeur tirée de l'équation

$$F(x_1, .., x_{n-1}, a, \zeta, \omega_1, .., \omega_{n-1}, \omega_n) = 0.$$

152. Pour déterminer la fonction z satisfaisant à toutes ces conditions, Cauchy applique la méthode du changement de variables indépendantes, employée pour la première fois par Ampère pour la résolution du problème actuel, dans le cas particulier de deux variables indépendantes.

Concevons les $n-1$ variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$ exprimées par un même nombre de fonctions distinctes de $n-1$ nouvelles variables $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ et de l'ancienne variable x_n. Par suite de cela, z et p^i deviendront des fonctions de x_n et des ξ_i. En différentiant à ce point de vue, nous aurons les équations

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \ldots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + p_n, \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_i} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \ldots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}. \tag{3}$$

En vertu de l'égalité

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i \partial x_n} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial \xi_i} = 0,$$

on tirera des équations précédentes les relations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} &= \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \right) + \ldots \\ &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_n} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial x_n} \right). \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Ensuite, les expressions de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, z, $p_1, \ldots, p_n$ au moyen des variables $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, x_n sont supposées telles que, en les substituant dans l'équation (1), celle-ci devienne une identité. Donc, en la différentiant par rapport à chacune des variables x_n et ξ_i, il viendra

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \\ &+ \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} \\ &+ \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi_i} + \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = 0. \end{aligned} \right. \tag{5'}$$

Aux équations (9) il faut encore joindre l'équation (1); mais celle-ci peut être remplacée par l'équation (5), qui lui est équivalente, et qui, par la substitution des valeurs de $\frac{\partial x_i}{\partial x_n}$, $\frac{\partial z}{\partial x_n}$, $\frac{\partial p_i}{\partial x_n}$, tirées des équations (9), se ramène aisément à la forme

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_n}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0,$$

ou

$$-\frac{\partial p_n}{\partial x_n} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}, \tag{10}$$

semblable à la dernière des équations (9).

Le système des $2n$ équations (9) et (10) renferme, à proprement parler, des dérivées partielles des $2n$ fonctions cherchées; mais comme les différentiations partielles sont faites par rapport à la seule variable x_n, tandis qu'aucune des autres variables indépendantes $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ n'entre explicitement dans les équations considérées, il s'ensuit que ces équations peuvent être traitées comme un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre. D'après cela, les équations (9) et (10) pourront se mettre sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}} \\ &= \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}}. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Par l'intégration du système des équations (11), on peut en général, comme on sait, trouver des expressions finies et déterminées des fonctions $x_1, \ldots, x_{n-1}, z, p_1, \ldots, p_n$ de la variable x_n, lesquelles, pour la valeur particulière $x_n = a$ de cette variable, prennent respectivement les valeurs $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \zeta, \omega, \ldots, \omega_n$. Supposons que ces expressions soient

$$(12)\quad \begin{cases} z = \varphi \quad (x_n, \xi_1, .., \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, .., \omega_n), \\ x_1 = \varphi_1 \quad (x_n, \xi_1, .., \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, .., \omega_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = \varphi_{n-1} (x_n, \xi_1, .., \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, .., \omega_n), \\ p_1 = \psi_1 \quad (x_n, \xi_1, .., \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, .., \omega_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n = \psi_n \quad (x_n, \xi_1, .., \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, .., \omega_n). \end{cases}$$

En substituant dans les n premières équations (12) les valeurs

$$\zeta = f(\xi_1, .., \xi_{n-1}),\ \omega_1 = \frac{\partial f(\xi_1, .., \xi_{n-1})}{\partial \xi_1}, .., \ \omega_{n-1} = \frac{\partial f(\xi_1, .., \xi_{n-1})}{\partial \xi_{n-1}},$$

ainsi que l'expression de ω_n tirée de l'équation

$$F(\xi_1, .., \xi_{n-1}, a, \zeta, \omega_1, .., \omega_n) = 0,$$

on obtiendra n équations entre les variables primitives $z, x_1, .., x_n$ et les variables auxiliaires $\xi_1, .., \xi_{n-1}$; par conséquent, si la forme de la fonction f est donnée, on pourra éliminer les variables auxiliaires, et l'on parviendra ainsi à une équation d'où l'on tirera une valeur de z en fonction de $x_1, .., x_n$, qui satisfera à toutes les conditions proposées, c'est-à-dire que l'on aura l'intégrale cherchée du problème. Si la forme de la fonction f reste indéterminée, alors l'élimination des quantités $\xi_1, .., \xi_{n-1}$ est généralement impossible; cependant le système des n premières équations (12) peut être considéré comme équivalent à l'intégrale générale de l'équation (1).

Lorsque la fonction f est indéterminée, l'élimination de $\xi_1, .., \xi_{n-1}$ n'est possible que dans le seul cas particulier où les n premières équations (12) ne contiennent pas les quantités $\omega_1, .., \omega_n$. Alors, en les résolvant par rapport à $\zeta, \xi_1, .., \xi_{n-1}$, on trouve des valeurs de la forme

$$\zeta = \pi(x_1, .., x_n, z),\ \xi_1 = \pi_1(x_1, .., x_n, z), .., \ \xi_{n-1} = \pi_{n-1}(x_1, .., x_n, z).$$

En les substituant dans l'équation

$$\zeta = f(\xi_1, .., \xi_{n-1}),$$

on obtient l'intégrale générale sous la forme

$$\pi = f(\pi_1, .., \pi_{n-1}).$$

De cette forme de l'intégrale générale il est aisé de conclure que l'équation proposée (1) doit être linéaire par rapport à

$$(14) \qquad -\int_a^{x_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} dx_n ;$$

ne prenne pas une valeur indéterminée ou infinie; et que, d'un autre côté, on peut toujours attribuer à la fonction arbitraire $\zeta = f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ une forme telle que l'un de ces deux cas ait lieu.

A l'occasion de cette remarque, Serret a entrepris l'examen de ces cas exceptionnels, et a démontré *) que, si l'intégrale (14) n'a pas une valeur finie et déterminée pour la forme assignée à la fonction $f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, il arrive alors, en même temps, que les équations (12) sont impropres à fournir la solution générale du problème. Cette solution s'obtient, dans ce cas, au moyen de l'intégrale complète, c'est-à-dire de l'intégrale qui renferme autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes dans l'équation donnée. Je crois inutile, d'ailleurs, d'exposer en détail les recherches de Serret, d'autant qu'elles ont été reproduites, d'après les articles des Comptes rendus, avec beaucoup d'explications et d'exemples, dans la Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral de **Lacroix**, 6e édition augmentée de Notes par MM. **Hermite** et **Serret**, (Note II, T. II, p. 237—282) **).

*) Comptes rendus; t. LIII, séances des 7 et 28 octobre 1861.

) Voyez encore **Serret, Cours de Calcul différentiel et intégral, t. II, p. 624—649, et le Mémoire du même Auteur inséré dans les Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure, t. III (Note du trad.).

Table des matières.

Page.

Introduction 278

Chapitre I. — Des différentes formes d'intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre 281

§. 1. Intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre 281

§. 2. Intégrale singulière 282

§. 3. Théorème de Jacobi sur le caractère d'indépendance des fonctions 284

§. 4. Intégrales générales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre 287

§. 5. Les systèmes précédents renferment toutes les solutions possibles d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre 288

§. 6. Cas où la solution est donnée sous forme implicite 290

Chapitre II. — Des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre 292

§. 7. Formation d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre par l'élimination d'une fonction arbitraire . . 292

§. 8. Méthode d'intégration de Lagrange 295

§. 9. Dépendance mutuelle entre le problème de l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, et celui de l'intégration d'un système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires 297

Chapitre III. — Des équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre 304

§. 10. L'intégration d'une équation aux dérivées partielles se ramène à la recherche des conditions d'intégrablité d'une différentielle totale du premier ordre 304

§. 11. Expression des conditions d'intégrabilité par des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre 305

§. 12. Application au cas de deux variables indépendantes 308

§. 13. Réduction du cas général à l'intégration de plusieurs systèmes d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre 313

Page.

§. 14. Réduction de l'équation au cas où la fonction cherchée n'entre que par ses dérivées 314

§. 15. Transformation des systèmes d'équations linéaires simultanées correspondants 317

Chapitre IV. — Théorèmes sur lesquels est fondée la nouvelle méthode de Jacobi 320

§. 16. Propriétés des fonctions alternées (φ, ψ) 320

§. 17. Quatre théorèmes fondamentaux 324

Chapitre V. — Intégration des systèmes d'équations simultanées qui se présentent dans la méthode de Jacobi 335

§. 18. Intégration dans le cas où l'on n'a pas réduit le nombre des variables 335

§. 19. Simplifications du calcul. Applications à des exemples particuliers 345

§. 20. Réduction des équations au nombre minimum de variables . 358

§. 21. Intégration des équations réduites 367

§. 22. Application à un exemple particulier 385

Chapitre VI. — Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre 393

§. 23. Conditions d'intégrabilité d'un système d'équations simultanées. Exemples d'intégration 393

§. 24. Cas des équations simultanées linéaires 408

§. 25. Autres démonstrations du Théorème I du §. 17. 413

§. 26. Conditions d'intégrabilité d'une différentielle d'ordre quelconque à une seule variable indépendante 417

Chapitre VII. — Sur l'intégration des systèmes canoniques d'équations simultanées aux différentielles ordinaires du premier ordre . 428

§. 27. Propriétés des intégrales d'un système canonique. Théorèmes de Hamilton et de Jacobi 428

§. 28. Changement de variables dans un système canonique . . . 441

§. 29. Intégration d'un système canonique de la forme hamiltonienne 446

§. 30. Théorème de Poisson. Méthode d'intégration de Bertrand, fondée sur les cas où ce théorème est en défaut 452

Chapitre VIII. — Méthode de Cauchy pour l'intégration de l'équation générale aux dérivées partielles du premier ordre 463

§. 31. 463

Fin.

XXI.

Die harmonischen Polarcurven.

Von

Herrn Professor *C. A. Bretschneider*
in Gotha.

(Figuren s. Taf. XI.)

Bedarf der Lehrer der Mathematik bei dem Unterrichte in der analytischen Geometrie zweckmässiger Beispiele, um den Schüler in Untersuchung von Curven zu üben, so sieht er sich, wenn er nicht die bis zum Ueberdruss gebrauchten Kegelschnitte dazu verwenden will, vergebens nach literarischen Hülfsmitteln um. Die Lehrbücher der analytischen Geometrie beschränken sich natürlich darauf, die Regeln zu entwickeln, nach denen man aus der Gleichung der krummen Linie die Ausdrücke für ihre Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale u. s. w. findet, und erläutern dieselben höchstens durch ein Paar einfache Beispiele. Der Versuch, die der Curve eigenthümlichen geometrischen Eigenschaften aufzufinden, wird nirgends gemacht, so wichtig eine solche Untersuchung in besonderen Fällen auch sein kann. Monographieen über specielle Curven sind in der deutschen mathematischen Literatur kaum einige vorhanden, und auch von diesen folgt die Mehrzahl ganz dem Vorgange der allgemeinen Lehrbücher, indem ihre Verfasser genug gethan zu haben meinen, wenn sie die allgemeinen Theoreme der höheren Curvenlehre für den gewählten einzelnen Fall specialisiren.

Unter diesen Umständen schon seit lange genöthigt, mich um höhere Curven zu bemühen, die eine ausgiebigere geometrische Behandlung gestatten, bin ich unter anderen auch auf die beiden nachfolgenden gekommen, die ich harmonische Polarcurven

genannt habe. Da sie in der That eine ganz leidliche Ausbeute an bemerkenswerthen geometrischen Eigenschaften darbieten, so dürfte die genauere Darstellung des Gegenstandes im „Archive" nicht ganz werthlos erscheinen, und zwar um so weniger, als dabei recht brauchbare Uebungsbeispiele für die Behandlung kubischer und biquadratischer Gleichungen erhalten werden, ein Feld, auf welchem gleichfalls noch gar kein Ueberfluss herrscht.

§. 1.

In einer Ebene (Fig. 1. u. 2.) seien gegeben das Centrum A eines ebenen Strahlbüschels und ein fester Punkt B ausserhalb desselben. Durch einen beliebigen Punkt C des Strahles AB lege man die Gerade $C'CC''$ senkrecht auf AB; so wird jeder Strahl des Büschels z. B. AA'' das Loth $C'C''$ in einem Punkte L schneiden. Trägt man sodann auf diesem Strahle vom Schnittpunkte L aus nach beiden Seiten hin eine Strecke $LY = LY'$ ab, welche dem Abstande des Punktes L vom festen Punkte B gleich ist; so ist der geometrische Ort der einander zugeordneten Punkte Y und Y' eine krumme Linie, welche harmonische Polarcurve genannt werden soll.

Da die angegebene Construktion oberhalb wie unterhalb AA' in gleicher Weise ausgeführt werden kann, so besteht die Curve aus zwei congruenten Theilen, welche auf entgegengesetzten Seiten des Strahles AA' liegen. Eben so leuchtet ein, dass die Curve nicht nur durch die Punkte A und B hindurchgehen, sondern mit AA' noch einen dritten Punkt B' gemein haben muss, der auf ihr von C aus in dem Abstande $CB' = CB$ gelegen ist. Da hiernach $LB = LB'$ wird, so ist es gänzlich einerlei, ob der Fusspunkt C des Lothes $C'C''$ ausserhalb oder innerhalb der Strecke AB gewählt wird.

Umgekehrt dagegen ist es nicht völlig einerlei, ob das Strahlcentrum A innerhalb oder ausserhalb der Strecke BC liegt, weshalb die Untersuchung für beide Fälle getrennt zu führen ist. Liegt A ausserhalb BC, wie in Fig. 1., so mag die Curve eine harmonische Polarcurve der ersten Art genannt werden; im entgegengesetzten Falle, wenn A zwischen B und C liegt, Fig. 2., heisse sie eine Polarcurve der zweiten Art.

§. 2.

Der Kürze halber sollen für beide Curvenarten folgende Benennungen eingeführt werden. Das Strahlcentrum A heisse der

Pol der Curve, die Strahlenabschnitte $AY = R$ und $AY' = R_1$ zugeordnete Polstrahlen, die Strecke YY' die Polsehne, das Loth CC'' die Richtlinie und CL die Centraldistanz der Polstrahlen oder Polsehne. Macht man ferner $CA' = CA$, so werde

$$AA' = 2.AC = 2(a+b) \quad \text{die erste Achse}$$
$$BB' = 2.BC = 2b \quad \text{die zweite Achse}$$
$$AB = a \quad \text{die Nebenachse}$$

der Curve genannt. Demgemäss sind die Kreise welche um AA', BB', AB als Durchmesser beschrieben werden, beziehungsweise als erster, zweiter Achsenkreis und Nebenkreis zu bezeichnen. Endlich mag B der erste, B' der zweite Hauptscheitel der Curve heissen.

Man nehme C zum Nullpunkt der Coordinaten, die Richtlinie CC'' zur Ordinatenachse, AA' zur Abscissenachse und bezeichne speciell diejenige Seite der letzteren als die positive, auf welcher der Pol A liegt. Im Punkte A' werde auf AA' das Loth $A'A''$ errichtet, so wird jeder Strahl AL auch dieses Loth in einem Punkte A'' schneiden, und man hat alsbald folgende Sätze:

a) in jeder harmonischen Polarcurve sind die Abscissen je zweier zugeordneter Punkte Y und Y' gleich gross, aber entgegengesetzt; $CX = CX'$;

b) in jeder harmonischen Polarcurve werden sämmtliche Polsehnen von der Richtlinie halbirt; $LY = LY'$;

c) in jeder harmonischen Polarcurve wird der Abschnitt AA'' eines Polstrahles zwischen dem Pole A und dem Schnittpunkte A'' mit dem Lothe $A'A''$ durch die Richtlinie halbirt; $LA = LA''$;

d) in jeder harmonischen Polarcurve ist der Abstand des einen zweier conjugirter Punkte von einem der beiden Punkte A und A'' gleich dem des andern conjugirten Punktes von dem zweiten der Punkte A und A'';

$$AY = Y'A''; \quad AY' = YA''.$$

§. 3.

Bezeichnet man für die Polarcurve der ersten Art (Fig. 1.)

$$CX = u; \quad XY = y; \quad X_1'Y' = y_1;$$

so wird

$$AX:AX' = y:y_1 = a+b-u:a+b+u. \qquad (1)$$

Wird aus Y die $YN \parallel AC$ gezogen, so ist:

$$LN = \tfrac{1}{2}(y_1-y), \quad CL = \tfrac{1}{2}(y_1+y)$$

$$BC^2 + CL^2 = BL^2 = LY^2 = CX^2 + LN^2 \text{ d. h.}$$

$$4b^2 + (y_1+y)^2 = 4u^2 + (y_1-y)^2$$

oder:

$$yy_1 = (u+b)(u-b) = XB.XB' = X'B.X'B'. \qquad (2)$$

Diese Gleichung mit (1) verbunden liefert:

$$y^2 = (u^2-b^2)\frac{a+b-u}{a+b+u}. \qquad (3)$$

In ganz analoger Weise folgt für die Polarcurve der zweiten Art (Fig. 2.)

$$AX:AX' = y:y_1 = u-(b-a):u+(b-a)$$

$$4b^2 + (y_1-y)^2 = 4u^2 + (y_1+y)^2$$

$$yy_1 = (b+u)(b-u) = XB.X'B = X'B.X'B'.$$

$$y^2 = (b^2-u^2)\frac{u-(b-a)}{u+(b-a)} \qquad (4)$$

Die Gleichung der Polarcurve erster Art geht demnach sofort in die der Curve zweiter Art über, wenn anstatt a der Werth $-a$ eingesetzt, d. h. die Nebenachse negativ gesetzt wird. Sollen dagegen die Gesetze (1) und (2) auf die Curven zweiter Art übertragen werden, so genügt es nicht allein, dass $-a$ statt a geschrieben wird; es muss auch $-y_1$ anstatt y_1 genommen werden. — Betrachtet man in den allgemeinen Gleichungen (3) und (4) die Abscisse u als wesentlich positiv, so ist alsbald

$$y_1^2 = (u^2-b^2)\frac{a+b+u}{a+b-u}$$

$$y_1^2 = (b^2-u^2)\frac{u+(b-a)}{u-(b-a)}. \qquad (5)$$

Man hat demnach folgende allgemeine Gesetze:

a) in jeder harmonischen Polarcurve ist das Rechteck aus den Ordinaten zweier conjugirter Punkte gleichflächig

dem Rechtecke aus den Abständen des Fusspunktes einer dieser Ordinaten von den Scheiteln der Curve; (2).

b) in jeder harmonischen Polarcurve verhalten sich die Ordinaten zugeordneter Punkte wie deren Abstände vom Pol; (1).

c) in jeder harmonischen Polarcurve verhält sich das Quadrat der Ordinate zu dem Rechtecke aus den Abständen derselben von den beiden Scheiteln, wie ihr Abstand vom Pol zum Abstand der zugeordneten Ordinate vom Pol; (3).

§. 4.

Für jede von beiden Arten der Polarcurven ergiebt sich, dass für $u = +b$ und $u = -b$ die Ordinate $y = 0$ wird; dagegen ist für $u = CA$ (d. h. $u = a + b$ oder $u = b - a$) zwar $y = 0$, aber für den entgegengesetzten Werth $u = CA'$ wird $y = \infty$.

Demnach besteht jede harmonische Polarcurve aus zwei getrennten Theilen, nämlich einem über der Nebenachse liegenden geschlossenen Oval und einem durch den zweiten Scheitel B' gehenden unendlichen Aste, der das im Gegenpunkte A' des Poles A stehende Loth $A'A''$ zur Asymptote hat. Für diesen Ast ist zu bemerken, dass er bei den Curven erster Art dem Ovale die convexe Seite, bei den Curven zweiter Art die concave Seite zuwendet.

In jeder von beiden Curvenarten liegen daher die Fusspunkte der Ordinaten gänzlich innerhalb der Strecken AB und $A'B'$.

§. 5.

Da stets $LB = LB' = LY = LY'$ sein muss, so liegen in jeder harmonischen Polarcurve je zwei zugeordnete Punkte mit den beiden Scheiteln auf dem Umfange eines und desselben Kreises, der die Polsehne YY' zum Durchmesser hat. Denkt man sich die unendliche Menge der Kreise gegeben, die sämmtlich die zweite Achse BB' zur Sehne haben, (sie mag kurz die Kreiseschaar BB' heissen), so ist die Richtlinie $C'C''$ der Centralort und die Gerade AA' der Ort der gleichen Potenzen für die Schaar.

Es ist demnach für jede harmonische Polarcurve das Rechteck aus je zwei zugeordneten Polstrahlen constant, nämlich gleich

dem Rechtecke aus den Abständen des Poles von den Scheiteln der Curve; $AY.AY' = AB.AB'$.

Wird in der Curve erster Art aus dem Pole A (Fig. 1.) eine Tangente $AE = t$ an einen der Kreise aus der Schaar BB' gezogen, so ist die Länge t für jeden andern Kreis der Schaar die nämliche; mithin t^2 die gemeinschaftliche äussere Potenz der Kreiseschaar, und es ist

in den harmonischen Polarcurven erster Art die äussere Potenz t^2 der über der zweiten Achse stehenden Kreiseschaar gleich dem Rechtecke aus je zwei zugeordneten Polstrahlen; also:

$$t^2 = a(a+2b) = (a+b)^2 - b^2 = RR_1.$$

Wird in der Polarcurve zweiter Art durch den Pol A ein Loth (Fig. 2.) senkrecht auf die Polsehne YY' errichtet, welches den um letztern beschriebenen Kreis der Schaar BB' in den Punkten E und F schneidet; so ist $AE = t$ für jeden andern Kreis der Schaar unveränderlich, mithin t^2 die gemeinschaftliche innere Potenz der Kreiseschaar; daher ist

in den harmonischen Polarcurven der zweiten Art die innere Potenz t^2 der über der zweiten Achse stehenden Kreiseschaar gleich dem Rechtecke je zweier zugeordneter Polstrahlen; also:

$$t^2 = a(2b-a) = b^2 - (b-a)^2 = RR_1.$$

Umgekehrt: Beschreibt man über der Polsehne einer Curve der ersten Art, als Durchmesser, einen Kreis, und aus dem Pol A mit der Grösse t als Halbmesser einen zweiten Kreis, so sind die Schnittpunkte E und F der beiderseitigen Umfänge die Berührungspunkte der vom Pol aus nach dem ersten Kreise gezogenen Tangenten; und:

beschreibt man über der Polsehne einer Curve der zweiten Art, als Durchmesser, einen Kreis und aus dem Pole A mit dem Halbmesser t einen zweiten Kreis, so sind die Schnittpunkte E und F der beiderseitigen Umfänge die Endpunkte eines Durchmessers des zweiten Kreises.

§. 6.

Für zugeordnete Polstrahlen der Curven erster Art hat man die Werthe:

$$R^2 = t^2 . \frac{a+b-u}{a+b+u} \qquad R_1^2 = t^2 . \frac{a+b+u}{a+b-u}$$

$$\tfrac{1}{2}(R_1 + R) = \frac{t(a+b)}{\sqrt{(a+b)^2-u^2}}$$

$$\tfrac{1}{2}(R_1 - R) = \frac{tu}{\sqrt{(a+b)^2-u^2}}.$$

In der Curve der zweiten Art dagegen wird erhalten:

$$R^2 = t^2 . \frac{u-(b-a)}{u+(b-a)} \qquad R_1^2 = t^2 . \frac{u+(b-a)}{u-(b-a)}$$

$$\tfrac{1}{2}(R_1 + R) = \frac{tu}{\sqrt{u^2-(b-a)^2}}$$

$$\tfrac{1}{2}(R_1 - R) = \frac{t(b-a)}{\sqrt{u^2-(b-a)^2}}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich für die Curve erster Art (Fig. 1.):

$$CL = \tfrac{1}{2}(y_1 + y) = 2\sqrt{u^2-b^2} . \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2-u^2}}$$

$$NL = \tfrac{1}{2}(y_1 - y) = 2\sqrt{u^2-b^2} . \frac{u}{\sqrt{(a+b)^2-u^2}}$$

und für die Curve zweiter Art (Fig. 2.):

$$CL = \tfrac{1}{2}(y_1 - y) = 2\sqrt{b^2-u^2} . \frac{b-a}{\sqrt{u^2-(b-a)^2}}$$

$$NL = \tfrac{1}{2}(y_1 + y) = 2\sqrt{b^2-u^2} . \frac{u}{\sqrt{u^2-(b-a)^2}}.$$

§. 7.

Betrachtet man in Fig. 1. A als äusseren harmonischen Pol des Kreises um YY', so ist EF die zu A gehörige Polare, die den Strahl AL in W senkrecht schneidet, und die Achse AA' in dem Punkte D trifft. Es bilden demnach sowohl A, Y, W, Y' als auch A, B, D, B' eine harmonische Quaternion, woraus alsbald folgt, dass der Punkt D für alle Kreise der Schaar BB' der nämliche bleiben muss. Errichtete man in A Lothe auf AC und AL, so wären diese die Polaren für die Kreise BB' und YY' in Bezug auf D und W als innere Pole.

Wird dagegen in Fig. 2. A als innerer harmonischer Pol des Kreises YY' betrachtet, und man legt an die Endpunkte der Sehne EF Berührende, so schneiden sich diese in einem Punkte W des verlängerten Polstrahles AL, und die in W auf AL errichtete Senkrechte WD ist dann für den Kreis YY' die Polare des Poles A. Es sind demnach W, Y, A, Y', ingleichen D, B, A, B' gleichfalls harmonische Quaternionen, folglich auch D ein für alle Kreise der Schaar BB' unveränderlicher Punkt.

Aus diesen Betrachtungen lässt sich nun unmittelbar Nachfolgendes ableiten.

a) Sucht man zu den Scheiteln B und B' einer Polarcurve und dem Pole A den dem letzteren zugeordneten vierten harmonischen Punkt D, so soll letzterer kurz der Gegenpol, und der um die Strecke AD als Durchmesser construirte Kreis der Polkreis der Curve genannt werden.

b) Jeder Polstrahl AL der Curve wird vom Polkreise in einem Punkte W geschnitten, der mit den zugeordneten Punkten Y und Y' und dem Pole A den letzterem zugeordneten vierten harmonischen Punkt bildet. Er heisse deshalb kurz der vierte Punkt des Polstrahles AL oder der Polsehne YY'.

c) Umgekehrt liegt in der Curve der ersten wie der zweiten Art der vierte Punkt jeder Polsehne auf dem Umfange eines festen Kreises, nämlich des Polkreises.

d) Sämmtliche zu A, als gemeinschaftlichem harmonischen Pol gehörige, Polaren der Kreiseschaar BB' bilden einen ebenen Strahlbüschel der den Gegenpol D zum Centrum hat.

e) Sämmtliche den Gegenpol D, als gemeinschaftlichem harmonischen Pole der Kreiseschaar BB' zugehörige, Polaren AL bilden einen ebenen Strahlbüschel, der A zum Centrum hat.

f) Betrachtet man die Punkte W auf dem Umfange des Polkreises als harmonische Pole der Kreiseschaar BB', so bilden die zugehörigen Polaren jederzeit einen Strahlbüschel, und dessen Centrum ist der Pol A, wenn jeder Punkt W bei den Curven erster Art innerhalb, bei denen zweiter Art ausserhalb des ihm zugehörigen Kreises liegt. Dagegen ist der Gegenpol D das Centrum

des Strahlbüschels, wenn W bei den Curven erster Art ausserhalb, bei denen zweiter Art innerhalb des ihm zugehörigen Kreises gelegen ist.

Diese Eigenschaften sind es, welche Veranlassung gegeben haben, die fraglichen krummen Linien harmonische Polarcurven zu benennen.

§. 8.

Sind auf einer Geraden (Fig. 3.) vier harmonische Punkte in der Reihenfolge A, B, D, B' gegeben, und man betrachtet B und B' als Scheitel zweier harmonischer Polarcurven von denen die eine A zum Pole hat, also erster Art ist, während die andere D zum Pole hat, und somit zweiter Art ist; — so sollen diese Curven conjugirt genannt werden. Ihre beiderseitigen Ovale berühren sich im ersten Scheitel B und ihre und ihre unendlichen Aeste im zweiten Scheitel B'. Die zweite Achse $BB' = 2b$ ist demnach beiden Curven gemeinschaftlich, während die Nebenachsen und somit auch die ersten Achsen wesentlich verschieden sind.

Man bezeichne für die Curve erster Art wie bisher, die Nebenachse mit a und die Potenz mit t^2, hingegen für die Curve der zweiten Art die Nebsnachse $BD = c$ und die zugehörige Potenz mit t_1^2, so hat man alsbald folgende Gleichungen:

$$t^2 = a(a+2b) \qquad t_1^2 = c(2b-c)$$

$$t = \frac{bt_1}{b-c} \qquad t_1 = \frac{bt}{a+b}$$

$$AB = a = \frac{bc}{b-c} \qquad BD = c = \frac{ab}{a+b}$$

$$AD = \frac{t^2}{a+b} = \frac{t_1^2}{b-c}$$

$$AC = a+b = \frac{b^2}{b-c} \qquad DC = b-c = \frac{b^2}{a+b}$$

$$AB' = a+2b = \frac{b(2b-c)}{b-c} \qquad DB' = 2b-c = \frac{b(a+2b)}{a+b}.$$

Die weitere Untersuchung der in Rede stehenden Curven hängt fast ganz von dem gegenseitigen Zusammenhange eines conjugirten Curvenpaares ab.

§. 9.

Zieht man in dem Sehnenviereck $BYY'B'$ (Fig. 1. u. 2.) die Diagonalen BY' und $B'Y$, die sich in einem Punkte O schneiden, und verlängert sodann die Gegenseiten BY und $B'Y'$, bis sie sich in einem Punkte O' schneiden; — so muss, in Folge der bekannten Eigenschaften jedes geradlinigen Viereckes, die Gerade OO' durch die Punkte W und D hindurchgehen. Demnach bilden W, O, D, O' eine harmonische Quaternion, und AW, AO, AD, AO' sind Harmonikalen. Beschreibt man ferner um OO' als Durchmesser einen Kreis, so muss derselbe, da $Y'BO' = YB'O' = 90^0$ ist, auch durch beide Scheitel B und B' hindurchgehen, ist also ein Kreis aus der Schaar BB'. Daraus folgt aber unmittelbar, dass O und O' zugehörige Punkte der conjugirten Curve und OO' eine Polsehne der letzteren ist. Man kann demnach allgemein Folgendes aussprechen:

a) Jede zwei zugeordnete Punkte einer harmonischen Polarcurve bilden mit den beiden Scheiteln der letzteren die Spitzen eines Sehnenviereckes, in welchem die Polsehne zugleich Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist.

b) Für die Polarcurve der ersten Art ist dieses Viereck stets ein hohles, für die der zweiten Art ein überschlagenes. Von den drei Schnittpunkten je zweier seiner Gegenseiten ist derjenige, dem die Polsehne angehört, der Pol A der Curve selbst; die beiden anderen Punkte dagegen, O und O', gehören der conjugirten Curve an, und von ihnen liegt der Schnittpunkt O der beiden Diagonalen des Vierecks auf dem Oval, der Schnittpunkt O' des zweiten Paares Gegenseiten hingegen auf dem unendlichen Aste dieser Curve.

§. 10.

Da von den vier Harmonikalen BA, BY, BW, BY' die zweite und vierte, und eben so unter $B'A$, $B'Y$, $B'W$, $B'Y'$ die zweite und vierte auf einander senkrecht stehen, so muss der Strahl BY den Winkel ABW und $B'Y$ den Winkel $A'BW$ halbiren. — Ganz in gleicher Weise stehen von den Harmonikalen WA, WB, WD, WB' die beiden WA und WD aufeinander senkrecht. In der Polarcurve erster Art halbirt mithin WO den Winkel BWB' und WA den Winkel BWW'; während in der Curve zweiter Art der Winkel BWB' von WA und Winkel BWW' von WD halbirt wird. Daraus folgt:

a) in jeder Polarcurve halbiren die von einem beliebigen Scheitel aus nach zwei zugeordneten Punkten gelegten Strahlen die beiden Winkel, welche die von dem nämlichen Scheitel nach dem vierten Punkte W gezogene Gerade mit der Achse der Curve bildet;

b) in jeder Polarcurve halbiren die von dem vierten Punkte W eines Polstrahles nach dem Pol und Gegenpol gezogenen Geraden die beiden Winkel, welche die von demselben Punkt W aus nach beiden Scheiteln gezogenen Geraden mit einander bilden.

Mit Hülfe der Sätze dieses und des vorangehenden Paragraphen können noch eine ganze Reihe von harmonischen Quaternionen und Harmonikalen an den Polarcurven beider Arten nachgewiesen werden, was indessen der Kürze halber hier übergangen werden mag.

§. 11.

Für die Zahlenwerthe der im vorangehenden Paragraphen behandelten Strecken erhält man in den Polarcurven der ersten Art:

$$BY^2 = 2a.\frac{u(u-b)}{a+b+u} \qquad B'Y^2 = 2(a+2b)\frac{u(u+b)}{a+b+u}$$

$$BY'^2 = 2a.\frac{u(u+b)}{a+b-u} \qquad B'Y'^2 = 2(a+2b)\frac{u(u-b}{a+b-u}$$

$$BW = \frac{au}{a+b} \qquad B'W = \frac{au}{a+b}\cdot\frac{a}{a+2b}$$

$$BO = \frac{b}{a+b}\sqrt{\frac{2au(a+b-u)}{u+b}}$$

$$B'O = \frac{b}{a+b}\sqrt{\frac{2(a+2b)u(a+b+u)}{u+b}}$$

$$YO = \frac{tu}{a+b}\sqrt{\frac{2au}{(u+b)(a+b+u)}}$$

$$Y'O = \frac{tu}{a+b}\sqrt{\frac{2(a+2b)u}{(a+b)(a+b-u)}}.$$

Die analogen Ausdrücke für die Curven zweiter Art sind ganz ähnlich gebaut, mögen aber zur Ersparung des Raumes hier wegbleiben, da sie, eben so wie die vorstehenden, aus den be-

kannten Eigenschaften des Sehnenvierecks unmittelbar abgeleitet werden können.

§. 12.

Nimmt man in einer Polarcurve (Fig. 4.) zwei Polstrahlen, AL und AM, so bilden die auf beiden liegenden Paare zugeordneter Punkte Y, Y', Z, Z' gleichfalls die Spitzen eines Sehnenvierecks; die in letzterem einander gegenüberliegenden Polsehnen YY' und ZZ' schneiden sich, ähnlich wie in der Construktion des §. 8., im Pole A der Curve, während der Schnittpunkt O' der beiden andern Gegenseiten ZY und $Z'Y'$, ingleichen der Schnittpunkt O der Diagonalen des Vierecks auf einer Geraden liegen, welche durch die vierten Punkte W und V der beiden Polstrahlen bestimmt ist. Es bilden demnach auch hier V, O, W, O' eine harmonische Quaternion. Werden die §. 8. und 9. erörterten harmonischen Eigenschaften der Polarcurven weiter untersucht, so folgt, dass für den, dem Viereck $YZZ'Y'$ umgeschriebenen Kreis, A der Pol und VW die zugehörige Polare, zugleich aber auch OO' der Durchmesser eines zur Schaar BB' gehörigen Kreises sein muss. Letzteres kann aber auch direkt auf nachfolgende Art bewiesen werden.

Man ziehe BV und BW; lässt sich dann zeigen, dass BO den Winkel VBW halbirt, so muss OO' ein Durchmesser des Kreises $BOB'O'$ sein. Werden die Abscissen der Punkte Y und Z mit u und u_1 bezeichnet, so ist nach §. 10.:

$$BW : BV = u : u_1$$

ferner ist:

$$VO : ZO = \sin VZO : \sin AVW$$
$$WO : YO = \sin OYW : \sin AWV.$$

Da nun der Winkel $VZO = OYW$ ist, so wird

$$\frac{VO}{WO} : \frac{ZO}{YO} = 1 : \frac{\sin AVW}{\sin AWV} = \frac{AV}{AW} : 1.$$

Nach einer bekannten Eigenschaft des Sehnenvierecks ist aber

$$ZO : YO = ZZ' : YY'$$

und damit erhält man, wenn aus §. 6. und 10. die entsprechenden Werthe eingesetzt werden,

$$\frac{VO}{WO} = \frac{ZZ' . AV}{YY' . AW} = \frac{u_1}{u} = \frac{BV}{BW}.$$

Es ist also in der That der Winkel $VBW = 2(YAZ)$ durch BO halbirt, mithin OO' der Durchmesser des Kreises $BOB'O'$.

Wie nun die vorstehenden Sätze nach Fig. 4. für Polarcurven der ersten Art bewiesen sind, so lassen sich dieselben auch für Curven zweiter Art als gültig nachweisen, was hier füglich übergangen werden kann.

§. 13.

Rückt der Strahl AM (Fig. 4.) unendlich nahe an den Strahl AL, so wird der Winkel ZAY unendlich klein, mithin Winkel $Y'YO' = YY'O'$; die Geraden YO' und $Y'O'$ verwandeln sich in die Tangenten der Polarcurve an den Punkten Y und Y', während die Gerade VOW in die Tangente des Polkreises AD im Punkte W übergeht. In jeder Polarcurve sind daher die an zugeordnete Punkte gelegten Tangenten YO' und $Y'O'$ einander gleich und schneiden sich in einem Punkte, durch welchen auch die in den vierten Punkt W gelegte Tangente des Polkreises hindurchgeht.

Man construirt daher die Tangenten zugeordneter Punkte einer Polarcurve (Fig. 5.), indem man den Punkt O' als Durchschnittspunkt zweier Lothe bestimmt, von denen das eine LO' im Mittelpunkte L der Polarsehne YY' auf letzterer, das andere WO' in dem vierten Punkte W der Polsehne auf dem Halbmesser GW des Polkreises senkrecht steht.

Eine andere Construktion ergiebt sich daraus, dass nach §. 9. der Winkel $YLB = WLB = WB'B$, mithin $BWLB'$ die Spitzen eines Sehnenviereckes sind, dessen Centrum N auf der Richtlinie CL liegen muss. Halbirt man daher einen der beiden Strahlen BW oder $B'W$, und errichtet im Halbirungspunkte auf ihn ein Loth, so liefert dies das Centrum N des fraglichen Kreises, somit aber auch den Durchmesser WNO', von dessen anderem Endpunkte O' aus die Tangenten $O'Y$ und OY' gezogen werden können.

Die Werthe der hier in Betracht kommenden Liniengrössen, können zwar durch die bereits entwickelten Formeln mittelst der Abscisse u des Punktes Y ohne Schwierigkeit gefunden werden; allein die Ausdrücke werden so weitläufig, dass es besser ist, dazu andere Hülfsmittel zu verwenden.

§. 14.

Um die Polargleichung unserer Curven zu finden, nehme man den Pol A zum Nullpunkt, und bezeichne den Winkel LAC eines Polstrahles mit dem nach dem Centrum C gerichteten Theile der Abscissenlinie durch ω; so erhält man sofort für die Curve erster Art:

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{u^2-b^2}}{t} \qquad \cos\omega = \frac{\sqrt{(a+b)^2-u^2}}{t}$$

$$t^2\sin 2\omega = 2\sqrt{(u^2-b^2)(a+b+u)(a+b-u)}$$

$$t^2\cos 2\omega = 3t^2 - 2(u^2-b^2)$$

$$y = R\sin\omega \qquad a+b-u = R\cos\omega$$

$$u = (a+b) - R\cos\omega \qquad a+b+u = 2(a+b) - R\cos\omega$$

und daraus als Gleichung der Curve:

$$0 = R^2\cos\omega - 2(a+b)R + t^2\cos\omega$$

also:

$$R\cos\omega = (a+b) - \sqrt{(a+b)^2 - t^2\cos^2\omega} = (a+b) - \sqrt{t^2\sin^2\omega + b^2}$$

$$R_1\cos\omega = (a+b) + \sqrt{(a+b)^2 - t^2\cos^2\omega} = (a+b) + \sqrt{t^2\sin^2\omega + b^2}$$

$$(R_1+R)\cos\omega = 2(a+b)$$

Formeln, aus deren geeigneter Discussion sich die wesentlichen Eigenschaften der fraglichen Curve ohne Mühe ableiten lassen. Die entsprechenden Ausdrücke für die Curven zweiter Art können hiernach leicht gefunden werden.

§. 15.

Statt den Pol A zum Nullpunkt zu nehmen, kann man auch einen der Scheitel dazu wählen. Nennt man $BY = r$, $BY' = r_2$ und die Winkel $YBA = \varphi$, $YB'A = \psi$, so hat man für die Curven erster Art alsbald:

$$0 = r^2\cos\varphi + r(2b - a\cos 2\varphi) - 2ab\cos\varphi$$

$$r = \frac{u\cos 2\varphi - 2b \pm \sqrt{(a+2b)^2 - a^2\sin^2 2\varphi}}{2\cos\varphi} \qquad \text{(a)}$$

$$0 = r_2^2\cos\psi - r_2(2b + (a+2b)\cos 2\psi) + 2b(a+2b)\cos\psi$$

$$r_2 = \frac{2b + (a+2b)\cos 2\psi \pm \sqrt{a^2 - (a+2b)^2 \sin^2 2\psi}}{2\cos\psi} \qquad \text{(b)}$$

Die Gleichungen (a) zeigen, dass für jeden Winkel φ zwei Werthe des Leitstrahles r vorhanden sind, von denen der eine nothwendig positiv, der andere negativ ist, beide aber für alle Werthe von φ reell bleiben.

Betrachtet man dagegen die Gleichungen (b) so zeigt sich, dass die Werthe der Leitstrahlen r_2 aus dem zweiten Scheitel B' stets einerlei Vorzeichen besitzen, dass es hier aber möglich ist, dass der irrationale Theil des Wurzelwerthes Null oder selbst imaginär werden kann. Wird $\psi = 0$, so sind beide Werthe von r_2 positiv, der grössere gleich $(a+2b)$, der kleinere gleich $2b$. Wächst dann ψ, so nimmt der grössere Werth von r_2 ab, der kleinere zu, und dies dauert so lange, bis $a = (a+2b)\sin 2\psi$ wird, in welchem Falle r_2 zur Tangente an das Oval der Curve wird. Bezeichnet man diesen speciellen Werth von ψ einstweilen mit ψ', so wird r_2 imaginär, wenn ψ von ψ' bis $90^0 - \psi'$ wächst. Von diesem Werthe bis zu $90^0 + \psi'$ bleibt r_2 wiederum reell, verwandelt sich für $\psi = 90^0 + \psi'$ in die Tangente an den unendlichen Ast der Curve und wird für grössere Werthe von ψ abermals imaginär, um erst bei $\psi = 180^0 - \psi'$ wieder reell zu werden.

§. 16.

Für die Winkel φ und ψ hat man sofort:

$$u - b = r\cos\varphi \qquad u + b = r_2\cos\psi$$

und erhält, wenn man statt r und r_2 ihre Werthe aus §. 11. einsetzt:

$$\cos 2\varphi = \frac{u^2 - b(a+b)}{au} \qquad \cos 2\psi = \frac{u^2 + b(a+b)}{(a+2b)u}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{(u-b)(a+b+u)}{2au} \qquad \cos^2\psi = \frac{(u+b)(a+b+u)}{2(a+2b)u}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{(u+b)(a+b-u)}{2au} \qquad \sin^2\psi = \frac{(u-b)(a+b-u)}{2(a+2b)u}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{t^2 \sin 2\omega}{2au} \qquad \sin 2\psi = \frac{t^2 \sin 2\omega}{2(a+2b)u}$$

$$\sin(\varphi-\psi)=\frac{b\cos\omega}{u} \qquad \cos(\varphi-\psi)=\frac{(a+b)\sin\omega}{u}$$

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi=\frac{a+b-u}{a+b+u} \qquad \operatorname{tg}\varphi\cot\psi=\frac{u+b}{u-b}.$$

Uebrigens ist sofort aus Fig. 1. klar, dass $\varphi+\psi=90^0-\omega$ sein muss. Für den speciellen Werth ψ' erhält man nunmehr:

$$\sin 2\psi'=\frac{a}{a+2b} \qquad \cos 2\psi'=\frac{2\sqrt{b(a+b)}}{a+2b}$$

$$\sin\psi'=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{2(a+2b)}} \qquad \cos\psi'=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}{\sqrt{2(a+2b)}}$$

Die zu dem Berührungspunkte an der Ovale gehörige Abscisse x' und Ordinate y' sind:

$$x'=\sqrt{b(a+b)} \qquad y'=\sqrt{b}(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})=x'-b$$

während für die Ordinate y_1' des Berührungspunktes an dem unendlichen Aste der Werth

$$y_1'=\sqrt{b}(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})=x'+b$$

gefunden wird. Es ist aber in diesem Falle das Dreieck $B'YX\cong B'Y'X'$, und das Dreieck $B'YY'$ rechtwinklig-gleichschenklig; der zu ψ' gehörige Winkel φ' wird gleich 45^0, die Polstrahlen:

$$R'^2=t^2\operatorname{tg}\psi' \qquad R_1'^2=t^2\cot\psi'$$

und der Polwinkel ω' durch die Gleichungen:

$$\sin\omega'=\sqrt{\frac{b}{a+2b}} \qquad \cos\omega'=\sqrt{\frac{a+b}{a+2b}}$$

bestimmt.

§. 17.

In den beiden vorangehenden Paragraphen ist die Untersuchung ausschliesslich für Polarcurven erster Art geführt worden. Es leuchtet von selbst ein, dass ganz gleiche Resultate für die Polarcurven zweiter Art stattfinden müssen. Nennt man (Fig. 2.) die Winkel $YAB=\omega$, $YBC=\varphi$ und $YB'C=\psi$, so ist:

$$\varphi-\psi=90^0-\omega$$

$$r^2 = BY^2 = 2a\frac{u(b-u)}{u+b-a} \qquad r_2^2 = B'Y^2 = 2(2b-a)\frac{u(b+u)}{u+b-a}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{(b-u)(u+b-a)}{2au} \qquad \cos^2\psi = \frac{(b+u)(u+b-a)}{2(2b-a)u}$$

$$0 = r^2\cos\varphi - r(2b + a\cos 2\varphi) + 2ab\cos\varphi$$

$$r = \frac{a\cos 2\varphi + 2b \pm \sqrt{(2b-a)^2 - a^2\sin^2 2\varphi}}{2\cos\varphi}$$

$$0 = r_2^2\cos\psi - r_2(2b + (2b-a)\cos 2\psi) + 2b(2b-a)\cos\psi$$

$$r^2 = \frac{2b + (2b-a)\cos 2\psi \pm \sqrt{a^2 - (2b-a)^2\sin^2 2\psi}}{2\cos\psi}.$$

Für den Specialwerth von ψ', der durch die Gleichung:

$$\frac{a}{2b-a} = \sin 2\psi'$$

bestimmt wird, ergiebt sich:

$$\sin\psi' = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{b-a}}{\sqrt{2(2b-a)}}; \quad \cos\psi' = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{b-a}}{\sqrt{2(2b-a)}}.$$

Die zu diesem Punkte der Curve gehörigen Coordinaten sind

$$u' = \sqrt{b(b-a)} \qquad y' = b - u' \qquad y_1' = b + u'$$

woraus abermals folgt, dass der zu ψ' gehörige Winkel φ' gleich 45^0 werden muss; u. s. w.

§. 18.

Betrachtet man (Fig. 3.) zwei conjugirte Polarcurven, so wird für $\psi < 45^0$ der zugehörige Strahl $B'OY$ die Curve der ersten Art in Y, und die der zweiten in O treffen. Werden nun die Coordinaten des Punktes Y wie bisher mit u und y_1 dagegen die des Punktes O mit $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnet, so erhält man aus den Formeln des §. 11. und 16. sofort:

$$B'O.\cos\psi = b + \mathfrak{u} = \frac{b(a+b+u)}{a+b}$$

daher:

$$u : \mathfrak{u} = a + b : b$$

eine höchst einfache Proportion, mit deren Hülfe jeder Ausdruck für die Polarcurven der einen Art sofort in den entsprechenden

der ihr conjugirten Curve umgesetzt werden kann. Für die conjugirte Curve der zweiten Art hat man in den für sie entwickelten Formeln c statt a (vergl. §. 8.) zu setzen, um sie unmittelbar mit den für die Curve erster Art gefundenen Ausdrücken verbinden zu können. Eben so ist in den Formeln der zweiten Curvenart $90^0 - \varphi$ anstatt φ und $90^0 - \omega$ anstatt ω zu setzen, um diese Winkelgrössen sofort auf die entsprechenden der conjugirten Curve erster Art zurückzuführen, während ψ für beide Curven dieselbe Grösse bleibt.

Wie jeder aus dem zweiten Scheitel B' gezogene Strahl $B'Y$ beide Curven in entsprechenden Punkten Y und O trifft, so wird auch die aus B' an die eine der Curven gezogene Berührende die andere Curve gleichfalls berühren müssen. Denn es ist für jede von beiden Curven nach §. 16. und 17.:

$$\sin 2\psi' = \frac{a}{a+2b} = \frac{c}{2b-c}.$$

Beschreibt man aus dem Centrum C den ersten und zweiten Achsenkreis und zieht in angemessener Lage einen Halbmesser CM, der den ersten Kreis in M, den zweiten in N schneidet, so treffen die aus M und N auf die Achse AA' gefällten Lothe MI und NZ die Ovale der conjugirten Curven stets in zwei Punkten Y und O, die zu einem und demselben Winkel ψ gehören.

Die vom zweiten Scheitel B' aus an die unendlichen Aeste der conjugirten Curven gelegten Tangenten bilden gleichfalls eine gerade Linie, jedoch so, dass die Berührungspunkte auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels B' liegen. Wird also der eine Curvenast auf der positiven Seite berührt, so berührt die Tangente den conjugirten Ast auf der negativen Seite.

§. 19.

Nennt man den Winkel $MCA = \eta$, (Fig. 3.), analog wie bei der Ellipse, die excentrische Anomalie, so bietet derselbe ein höchst bequemes Mittel dar, den grössten Theil der an den Polarcurven vorkommenden Grössen auf möglichst bequeme Weise auszudrücken. Es ist z. B.:

$$\sin\eta = \frac{\sqrt{(a+b)^2 - u^2}}{a+b} = \frac{\sqrt{b^2 - u^2}}{b}$$

$$\cos\eta = \frac{u}{a+b} = \frac{u}{b}$$

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\eta = \frac{a+b-u}{a+b} = \frac{b-u}{b}$$

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}\eta = \frac{a+b+u}{a+b} = \frac{b+u}{b}$$

$$(a+b)\sin\eta = t\cos\omega$$

$$b\sin\eta = t_1\cos\omega$$

u. s. w. Die Substitution dieser Werthe in die früher gefundenen Formeln befreit die meisten derselben von den in ihnen enthaltenen Wurzelgrössen und gestattet dadurch eine leichtere Bearbeitung derselben. Indessen kann dies hier der Kürze halber nicht weiter ausgeführt werden.

§. 20.

Kehren wir jetzt zu der in §. 13. besprochenen Construktion der Tangente an den zugeordneten Punkten Y und Y' zurück, so kommt es vornehmlich auf die Bestimmung des Punktes O' und die Länge der Tangente $YO' = Y'O'$ an. Die Construktion (Fig. 5.) bezieht sich auf die Polarcurve erster Art, und es ist:

$$WO' = \frac{2u^2}{(a+b)\sin 2\omega} \qquad LO' = \frac{u^2}{(a+b)\sin\omega}.$$

Zieht man aus L die Gerade $LV \parallel BB'$ und fällt von O' aus auf sie das Loth $O'V$, so ist $LV = CS$ die Abscisse und SO' die Ordinate des Punktes O', folglich, da Winkel $WO'L = LO'V = \omega$ ist:

$$CS = \frac{u^2}{a+b}; \qquad VO' = \frac{u^2}{a+b}\cot\omega; \qquad VO'.VS = u^2;$$

$$SO' = \frac{b^2(a+b)^2 - u^4}{t^2(a+b)\sin\omega\cos\omega} = \frac{b^2 - CS^2}{\sqrt{(CS-b+c)(a+b-CS)}}.$$

Fällt man aus W das Loth WS' auf BB', so ist $CS' = CS$ und

$$CS - b + c = CS_1' - CD = DS',$$

$$a+b-CS = AC - CS' = AS',$$

mithin $(CS-b+c)(a+b-CS) = S'W^2$, also

$$SO' = \frac{b^2 - CS'^2}{WS'} = \frac{BS'.B'S'}{WS'}.$$

Endlich wird aus $YO'^2 = LO'^2 + LY^2$ erhalten:

$$YO'^2 = \frac{4u^2[(a+b)(a+b+t)-u^2][u^2-(a+b)(a+b-t)]}{t^2(a+b)^2\sin^2 2\omega}$$

$$= \frac{4u^2(a+b+t-CS')(t-a-b+CS')}{t^2\sin^2 2\omega}$$

$$= \frac{4u^2(t^2-AS'^2)}{t^2\sin^2 2\omega}.$$

Beschreibt man aus dem Pol A mit t als Halbmesser einen Kreis, und verlängert das Loth $S'W$ bis es den Umfang dieses Kreises in Z schneidet, so ist:

$$YO' = Y'O' = \frac{2u.S'Z}{t\sin 2\omega}.$$

Bezeichnet man endlich den Winkel YTA, den die Tangente YO' mit der Abscissenachse AB' im Punkte T bildet, mit α, so ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{u\cot\omega-(a+b)\operatorname{tg}\omega}{a+b+u}$$

$$= \frac{u[(a+b)^2-u^2]-(a+b)(u^2-b^2)}{(a+b+u)\sqrt{(u^2-b^2)[(a+b)^2-u^2]}}$$

ein Ausdruck, aus dem die Lage der Berührenden für jeden beliebigen Punkt der Curve abgeleitet werden kann.

§. 21.

Eine specielle Frage entsteht hierbei, wenn die Tangente der Achse AA' parallel, d. h. $\alpha = 0^0$ werden soll, wodurch zugleich die Frage nach der grössten Ordinate beantwortet wird, die das Oval der Curve erhalten kann. Setzt man zu dem Ende den Zähler des Ausdruckes für $\operatorname{tg}\alpha$ gleich Null, so wird:

$$0 = u^3+u^2(a+b)-u(a+b)^2-b^2(a+b)$$

oder wenn man $u:(a+b) = v$ setzt:

$$0 = v^3+v^2-v-\left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$

erhalten. Diese Gleichung formt sich augenblicklich um in:

$$0 = (3v+1)^3-3(3v+1).4+\frac{11(a+b)^2-27b^2}{(a+b)^2}$$

oder:

$$0 = (3v+1)^3 - 3(3v+1)A + B.$$

Nun ist:

$$B^2 - 4A^3 = -\frac{27}{(a+b)^4}[a(a+4b)^2 + 4a^2(a+b)^2]$$

eine entschieden negative Grösse; die Gleichung hat also drei reelle Wurzeln. Man setze daher

$$\frac{B}{2A\sqrt{A}} = \frac{11(a+b)^2 - 27b^2}{16(a+b)^2} = \cos 3\mu,$$

oder, was für eine numerische Rechnung bequemer sein würde,

$$\cos\tfrac{1}{2}\mu = \frac{t}{a+b}\sqrt{\frac{27}{32}},$$

so sind die drei Wurzeln der Gleichung:

$$3v_1 = -1 - 4\cos\mu$$
$$3v_2 = -1 + 4\cos(60^0 - \mu)$$
$$3v_3 = -1 + 4\cos(60^0 + \mu)$$

von denen nur eine positiv sein kann, die beiden anderen negativ sein müssen. Da nun v wesentlich positiv ist, so ergiebt sich, dass nur v_2 gebraucht werden kann. Denn setzt man $\cos(60^0+\mu) = \frac{1}{4}$, so wird

$$\cos\mu = \frac{3\sqrt{5}+1}{8}; \quad \sin\mu = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8};$$

$$\cos(60^0 - \mu) = \frac{3\sqrt{5}-1}{8}; \quad \cos 3\mu = \frac{11}{16}.$$

Nun ist aber offenbar im vorliegenden Falle $\cos 3\mu < \frac{11}{16}$ also nur v_2 zulässig. Bezeichnet man die zu diesem besonderen Punkt der Curve gehörige Abscisse, Ordinate und Polwinkel mit $u_0 y_0 \omega_0$, so wird:

$$\operatorname{tg}^2\omega_0 = \tfrac{1}{4}(-1 + 4\cos(60^0 - \mu))$$

$$u_0 = \frac{a+b}{3}(-1 + 4\cos(60^0 - \mu))$$

$$y_0 = \frac{8}{3\sqrt{3}}(a+b)\sin^2(30^0 - \tfrac{1}{2}\mu)\sqrt{4\cos(60^0 - \mu) - 1}.$$

§. 22.

Bisher hat die Untersuchung der Polarcurven geführt werden können, ohne dass man irgend ein Theorem nöthig gehabt hätte, welches über den mathematischen Cursus eines Realgymnasiums hinausginge. Will man aber die Elemente der Differenzialrechnung verwenden, so kann man leicht auch noch den Wendepunkt und den Krümmungshalbmesser der Curve bestimmen. Es soll dies im Folgenden noch für Polarcurven erster Art entwickelt werden. Man erhält aus der Gleichung unserer Linie:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{u(a+b+u)(a+b-u)-(u^2-b^2)(a+b)}{(a+b+u)\sqrt{(u^2-b^2)(a+b+u)(a+b-u)}},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = t^2 . \frac{u^4-2u^3(a+b)+2u(a+b)b^2-b^2(a+b)^2}{(u^2-b^2)(a+b+u)^2(a+b-u)\sqrt{(u^2-b^2)[(a+b)^2-u^2]}}.$$

Die Abscisse des Wendepunktes wird also aus der Gleichung

$$0 = u^4-2u^3(a+b)+2u(a+b)b^2-b^2(a+b)^2 = f(u)$$

erhalten werden, welche nothwendig wenigstens eine reelle positive und eine reelle negative Wurzel besitzen muss. Die letzte ist zugleich die einzige negative Wurzel, die existirt, da $f(-u)$ nur einen Zeichenwechsel enthält.

Es ist aber $f(b) = -b^2t^2$ und $f(a+b) = -(a+b)^2t^2$ dagegen $f2(a+b) = +3b^2(a+b)^2$; die positiven Wurzeln der Gleichung müssen demnach sämmtlich grösser sein als $(a+b)$, sind also für die Curve unbrauchbar. Dagegen ist $f(-b) = -b^2t^2$ und $f(-a-b) = +(a+b)^2t^2$; d. h. die negative Wurzel der Gleichung wird stets einer negativen Abscisse der Curve entsprechen, mithin der unendliche Ast derselben jedenfalls Wendepunkte besitzen.

Um die Wurzeln der Gleichung zu finden, bringe man letztere auf die canonische Form:

$$0 = 2u^4-4u^3(a+b)+4u(a+b)b^2-2(a+b)^2b^2;$$

dann ergiebt sich durch Fortschaffung des zweiten Gliedes, wenn der Kürze halber $2u-a-b = v$ geschrieben wird:

$$0 = v^4-6v^2(a+b)^2-4v.2(a+b)(a^2+ab-b^2)-3(a+b)^4.$$

Dieser Ausdruck nach der Cartesischen Methode gleich:

$$0 = (v^2+2mv+p)(v^2-2mv+q)$$

gesetzt, liefert zur Bestimmung von $p+q=z$ die Gleichung:

$$0 = z^3 + 6z^2(a+b)^2 + 12z(a+b)^4 + 8[9(a+b)^6 - 8(a+b)^2(a^2+2ab-b^2)]$$

oder, da die drei ersten Glieder dem vollständigen Kubus einer zweitheiligen Grösse angehören:

$$[z + 2(a+b)^2]^3 = -256(a+b)^2 b^2 t^2$$

$$z = -2(a+b)^2 - 4\sqrt[3]{4(a+b)^2 b^2 t^2}$$

indem es sich von selbst versteht, dass nur die reelle Wurzel dieser reinen kubischen Gleichung zulässig ist. Setzt man zur Abkürzung

$$4(a+b)^2 b^2 t^2 = k^6$$

so ergiebt sich nunmehr:

$$p = -(a+b)^2 - 2k^2 + 2\sqrt{(a+b)^4 + (a+b)^2 k^2 + k^4}$$

$$q = -(a+b)^2 - 2k^2 - 2\sqrt{(a+b)^4 + (a+b)^2 k^2 + k^4}$$

$$m = \sqrt{(a+b)^2 - k^2}.$$

Dass m stets reell sein muss folgt daraus, dass

$$2\sqrt{bt} < b + t$$
$$4bt < b^2 + t^2 + 2bt \text{ d. h.}$$
$$2bt < (a+b)^2$$

also:

$$4b^2t^2 < (a+b)^4$$

und:

$$k^6 < (a+b)^6$$

daher:

$$k^2 < (a+b)^2$$

sein wird. Mit den für m, p, q gefundenen Werthen erhält man nun nach einigen einfachen Reduktionen:

$$v_{1,2} = -\sqrt{(a+b)^2 - k^2} \pm \sqrt{2(a+b)^2 + k^2 - \sqrt{[2(a+b)^2 + k^2]^2 + 3k^4}}$$

$$v_{3,4} = +\sqrt{(a+b)^2 - k^2} \pm \sqrt{2(a+b)^2 + k^2 + \sqrt{[2(a+b)^2 + k^2]^2 + 3k^4}}$$

und es folgt daraus unmittelbar, dass die Werthe v_1 und v_2 complex und nur v_3 und v_4 reell werden. Demnach ist die Abscisse $u_{,,}$ des gesuchten Wendepunktes:

$$u_{,,} = a + b + \sqrt{(a+b)^2 - k^2} - \sqrt{2(a+b)^2 + k^2 + \sqrt{[2(a+b)^2 + k^2]^2 + 3k^4}}$$

Rückblick.

Am Schlusse dieses 50sten Theils geziemt es sich wohl für mich, den Blick zurückzuwerfen und der Vorsehung zu danken, dass Sie mich dieses Werk ohne alle Unterbrechung in stetiger Folge bis zu diesem Punkte fortführen liess. Dann aber gebührt mein Dank allen meinen geehrten Herren Mitarbeitern für die mir von ihnen zu Theil gewordene grosse, von mir dankbarlichst anerkannte Unterstützung, ohne welche meine eigene Kraft viel zu schwach gewesen sein würde. Endlich danke ich dem ganzen mathematischen Publikum bis in die entferntesten Theile der Erde für die dem Werke geschenkte ununterbrochene, mit dem Weiterschreiten desselben fortwährend gesteigerte Theilnahme, durch welche allein sein Bestand gesichert werden konnte und fernerhin gesichert werden kann.

Mit ungeschwächter geistiger und körperlicher Kraft gehe ich im Vertrauen auf Gott getrost an die Herausgabe des ersten Theils des zweiten halben Hundert von Bänden, welcher diesem Jubiläumsbande auf dem Fusse folgen wird, indem ich meine Herren Mitarbeiter und das gesammte Publikum um die Fortdauer ihrer bisher so regen Theilnahme dringend und inständigst bitte. Eine wesentliche Abänderung der ursprünglichen Anlage des Werkes zu treffen habe ich keine Veranlassung gefunden; hoffentlich aber wird spätestens mit dem 52sten Theile dasselbe vor dem Publikum in einer schöneren und eleganteren Ausstattung auftreten, welche ihm — wie eigentlich beabsichtigt war — schon mit dem 51sten Theile zu geben, leider die Kürze der Zeit nicht gestattete.

Greifswald im October 1869.

Der Herausgeber.

Literarischer Bericht

CLXXXXVII.

Ericsson.

Im Februar 1869 starb in Richland im Staate New-York der weltberühmte Ingenieur Ericsson, der Erfinder der calorischen Maschine und des Monitors, angeblich an der Wasserscheu in Folge eines vor mehreren Monaten erhaltenen Hundsbisses.

Er wurde 1803 in Wärmeland, der Eisenregion Schwedens, geboren; sein Vater war Bergwerksbesitzer, und der junge Ericsson zeichnete sich schon im zehnten Jahre so durch sein mechanisches Genie aus, dass Graf Platen ihn in das Ingenieurcorps brachte und er im zwölften Jahre Inspector am grossen Schiffscanal Schwedens wurde, wo er 600 Mann zu commandiren hatte. Im siebenzehnten Jahre trat er in die Armee und erhielt den Auftrag, den Norden Schwedens zu vermessen. Im Jahre 1826 besuchte er England, um Studien in der Mechanik zu machen, und 1829 erhielt er den von der Liverpool- und Manchester-Eisenbahngesellschaft ausgesetzten Preis für die beste Locomotive; die von ihm construirte machte 50 englische Meilen in der Stunde.

Schon früher machte er Versuche, durch welche er nachzuweisen gedachte, dass auch erhitzte und comprimirte Luft als bewegende Kraft gebraucht werden könne. Es gelang ihm endlich, eine Maschine dieser Art herzustellen, welche einer Dampfmaschine von 10 Pferdekraft gleichkam. Im Jahre 1833 legte Ericsson der wissenschaftlichen Welt Englands seine Erfindung — die calorische Maschine, bei welcher das bewegende Medium erhitzte atmosphärische Luft ist — vor. Die Erfindung erregte grosses Aufsehen, doch verzögerte die ungünstige Meinung, welche

einzelne hervorragende Fachmänner von derselben hegten, ihren Erfolg ausserordentlich.

Der nie rastende Erfindungsgeist Ericsson's warf sich jetzt auf Schrauben-Propellers. Trotz dem Erfolg seines Modellschiffs von nur 40 Fuss Länge, das 10 Meilen in der Stunde machte und Schooner von 140 Fuss Länge die Themse hinaufschleppte, fand die Erfindung keine Anerkennung bei den Ingenieuren, und die englische Admiralität zeigte sich gleichgültig dagegen. Er wandte sich nach Amerika; Francis B. Ogden, amerikanischer Consul zu Liverpool, und Commodore Robert L. Stockton empfahlen seinen Schrauben-Apparat der Regierung der Vereinigten Staaten, 1839 kam er nach New-York und 1841 baute er den Kriegsdampfer „Princeton", der von Kennern als ein vorzüglich construirtes Kriegsschiff gepriesen wurde. Die Regierung der Vereinigten Staaten aber hat ihm niemals seine darauf verwendeten Kosten und seine Zeit und Mühe vergütet. Inzwischen suchte er seine calorische Maschine zu vervollkommnen und brachte sie 1853 auf dem grossen Schiff „Ericsson" von 2000 Tonnen an. Es zeigte sich jedoch, dass die Maschine nicht kräftig genug war für ein solches Seeschiff.

Die Erfindungen, welche Ericsson im Laufe der Zeit an allen möglichen Arten von Maschinen machte, sind sehr zahlreich und bedeutend. Am wichtigsten und grossartigsten ist aber seine Erfindung des „Monitor", mit welchem er in dem Moment auf dem Kriegsschauplatze erschien, wo die Rebellen mit ihrem Panzerungethüm „Merrimac" zum Vorschein kamen. Mit dieser Erfindung gab er dem ganzen Kriegsschiffsbau eine neue Wendung. Die alten hölzernen Schiffe kamen in Misscredit und alle Seemächte der Welt construirten Panzerschiffe nach dem Muster des „Monitor." Wäre Ericsson nicht schon ohnedies berühmt, die Erfindung des „Monitor" allein würde seinen Namen auf alle Zeiten vererben. In den letzten Jahren beschäftigte er sich mit Construction einer Maschine, wobei die Concentration der Sonnenhitze die bewegende Kraft sein sollte.

Einer der grössten Männer des neunzehnten Jahrhunderts ist in Ericsson dahingeschieden. Geniale und hochwichtige Erfindungen erinnern die Völker der Erde täglich an ihn; ebenso bewunderungswürdig ist sein Fleiss und seine Ausdauer; er hinterlässt der Wissenschaft und dem Erfindungsgeist grosse Ideen zu weiterer Forschung und Ausführung.

(*Baltimore Wecker.*)

Geschichte der Mathematik und Physik.

Programm des Herzogl. Gymnasium Ernestinum zu Gotha. — Beiträge zur Geschichte der Griechischen Geometrie. Von Professor C. A. Bretschneider. Gotha. 1869. 4°.

In dem zweiten Theile seiner „Geschichte der abendländischen Philosophie, 1858" hat Röth — wie der Herr Verfasser sagt — unwiderleglich nachgewiesen, dass die Mathematik nicht Griechischen, sondern Aegyptischen Ursprungs ist und in einer von den Aegyptern bereits fest ausgebildeten Form nach Griechenland übertragen ward. Schon seit mehreren Jahren mit den Vorarbeiten zu einer ausführlichen Geschichte der Griechischen Geometrie und Geometer beschäftigt, ist der Herr Verfasser der vorliegenden werthvollen Programmen-Abhandlung durch ein sorgsames Studium der einschlagenden Quellen zu einer Reihe von Resultaten gelangt, durch welche die Arbeiten von Röth — und auch von Montucla — theils bestätigt und näher begründet, theils auch in Einzelnheiten berichtigt und ergänzt werden. Ein Theil der Resultate dieser verdienstlichen Arbeiten sind in der vorliegenden Abhandlung niedergelegt und verdienen der Beachtung der Mathematiker recht sehr empfohlen zu werden. Die Schrift besteht aus den folgenden Hauptabschnitten: I. Ueber den Charakter der Aegyptischen Geometrie. II. Euphorbos und Theodoros, die angeblich ältesten Griechischen Geometer. III. Pythagoras, der Begründer der Lehre von der Isoperimetrie. IV. Die „reductio ad absurdum" als geometrisches Beweismittel. V. Die von Thales bewirkte Höhenmessung der Pyramiden.

Arithmetik.

Journal des Collegiums für Lebens-Versicherungs-Wissenschaft zu Berlin. Erster Band. I. Heft. Erster Band. II. Heft. Berlin. W. Weber. 1868 und 1869. 8°.

Wir halten dieses neue Journal, welches sich die Förderung der auf dem Titel genannten wichtigen socialen Wissenschaft zur besonderen Aufgabe gemacht hat, für ein verdienstliches Unternehmen und machen unsere Leser auf dasselbe aufmerksam. — Folgende Aufsätze sind hier hervorzuheben: Ein Satz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vortrag von W. Lazarus. S. 1.

— Ueber die verallgemeinerte Ableitung der Formeln für Berechnung der Lebens-Versicherungs-Prämien. Vortrag von Dr. A. Zillmer. S. 21. — Ueber die Ermittelung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Lebens-Versicherungs-Anstalten. Von W. Lazarus. S. 49. (Dieser Aufsatz behandelt seinen sehr wichtigen Gegenstand in sehr vollständiger und lehrreicher Weise und verdient denen, die sich für diese Dinge interessiren, zu besonderer Beachtung empfohlen zu werden.)

Wir wünschen dem Unternehmen ununterbrochenen Fortgang.

Geometrie.

Lehrbuch zur Einführung in die organische Geometrie. Von Heinrich Gretschel. Mit 95 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig. Quandt und Händel. 1868. 8°.

Dieses Lehrbuch der sogenannten „neueren" Geometrie, welche der Herr Verfasser lieber „organische" Geometrie *) benannt wissen will, scheint uns seinem Zwecke in vorzüglicher Weise zu entsprechen und verdient allen Denen, welche sich diesen Studien widmen wollen, recht sehr empfohlen zu werden. Dasselbe geht mehrfach weiter, als verschiedene der sonst gangbaren und beliebten Schriften über diesen Gegenstand, indem es u. A. nicht bloss ebene Systeme, sondern auch Systeme im Raume in den Kreis seiner Betrachtungen zieht, sich sehr ausführlich über die Theorie der Kegelschnitte und die Flächen der zweiten Ordnung verbreitet, und auch die Raumcurven dritter Ordnung

---

*) Wir wollen über die Zweckmässigkeit dieser Benennung mit dem von uns hochgeachteten Herrn Verfasser nicht rechten, wollen jedoch bemerken, dass man bisher die Benennung „Organische Geometrie" in einem anderen und eingeschränkteren Sinne zu verstehen gewohnt gewesen ist, indem unter einer organischen Beschreibung einer Curve gewöhnlich deren Beschreibung durch einen stetigen Zug verstanden wird und dem auch der Inhalt des berühmten Werkes von Maclaurin: „Geometria organica sen descriptio linearum curvarum universalis. Londini. 1720." im Ganzen entspricht. Man sehe auch das jetzt seltene Werk: „Francisci à Schooten de organica conicarum sectionum in plano descriptione, tractatus Geometris, Opticis, praesertim vero Gnomonicis et Mechanicis utilis. Lugd. Batavor. Ex Officina Elzeviriorum. 1646."

und Klasse gebührend berücksichtigt. Ganz besonders hat uns in diesem Buche, ausser der Reichhaltigkeit des Inhalts, die Darstellung angesprochen und befriedigt, bei welcher sich der Herr Verfasser der grössten Deutlichkeit und der möglichsten Kürze und Einfachheit in der anerkennenswerthesten und rühmlichsten Weise befleissigt hat, was die Lectüre dieses Werkes zu einer überaus angenehmen macht, ganz im Gegensatze zu gewissen anderen neueren — hier nicht näher zu bezeichnenden — Schriften dieser Art, die man, vor dem bei dem ersten Blick in dieselben darin sich kundgebenden ungeheueren Schwulst der Entwickelung und Darstellung zurückschreckend, sehr bald ganz ungelesen bei Seite legt und nicht leicht wieder zur Hand nimmt, welche Erfahrung gewiss Andere mit uns mehrfach zu machen Gelegenheit gehabt haben werden. Der Herr Verfasser hat daher auch im Interesse der Einfachheit der Darstellung ganz recht gethan, dass er sich der Rechnung nicht gänzlich enthalten hat, und dass durchgängig von dem sogenannten Princip der Zeichen Gebrauch gemacht worden ist, versteht sich von selbst. Der Hauptinhalt ist folgender: Einleitung. — I. Von den Doppelverhältnissen. — II. Collineation von Punktreihen, Strahlen- und Ebenenbüscheln. — III. Von den Erzeugnissen collinearer Punktreihen und Strahlenbüschel in einer Ebene. — IV. Mehrere Curven zweiter Ordnung in derselben Ebene. — V. Von der Collineation ebener Systeme. — VI. Von der Reciprocität ebener Systeme. — VII. Von den Erzeugnissen zweier collinearer Punktreihen in verschiedenen Ebenen und zweier collinearer Ebenenbüschel, so wie von den Flächen zweiter Ordnung im Allgemeinen. — VIII. Von den Raumcurven dritter Ordnung und Classe.

Beiträge zur Lehre der universellen Summirung von Strecken, d. i. ihrer Aneinanderfügung mittels Parallelverschiebung. Von Dr. Wilhelm Matzka, k. k. ord. Professor der Mathematik an der Prager k. k. Universität. Mit einer Figurentafel. (Aus den Abhandlungen der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. VI. Serie. 2. Band.). Prag. 1868. 4°.*)

Ein Jeder kennt die verdienstliche Schrift des Herrn Verfassers: „Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra u. s. w. Prag. 1850. 4°.“ zu welcher die vorliegende Abhand-

*) In Ermangelung einer anderen passenderen Rubrik hat diese Schrift hier ihre Stelle erhalten.

lung in gewisser Beziehung steht. In derselben hat aber — was hier besonders hervorzuheben ist — der Herr Verfasser sich von einem willkührlichen Hineintragen des Imaginären ganz frei gehalten, was im Allgemeinen mit unseren eigenen Ansichten über diesen Gegenstand, welche zu veröffentlichen wir bis jetzt leider immer noch nicht im Stande gewesen sind, vollkommen im Einklange steht. Am meisten schliessen sich diese Ansichten dem „Calcul des quantités géométriques" von Cauchy an, die in der ausgezeichneten Schrift: „Geometrisk Kalkyl eller geometriska quantiteters räknelagar af G. Dillner. (Aftryck ur Upsala Kongl. Vetenskaps-Societets Årsskriff.). Upsala. C. A. Leffler. 1860. 8°." eine weitere sehr zu beachtende Entwickelung gefunden haben. — Das Sortiren und strenge Auseinanderhalten der durch gewisse Rücksichten von einander unterschiedenen Messeinheiten, wenngleich sonst von einer und derselben Art, ist — nach dem Herrn Verfasser — **das einzig richtige Princip solchen Rechnens**, und dürfte noch nicht mit gebührlichem Nachdruck hervorgehoben worden sein, welches Letztere zu leisten der Herr Verfasser als den Hauptzweck seiner vorliegenden Abhandlung bezeichnet. — Wir gestehen, dass wir dieselbe mit besonderem Interesse und mit grossem Vortheil für unsere eigene weitere Belehrung und fernere Klärung unserer Ansichten gelesen haben, und empfehlen dieselbe daher auch den Lesern des Archivs aus vollkommenster Ueberzeugung zu sorgfältiger Beachtung. Die im Ganzen einfache Darstellung, die Strenge und Präcision derselben, die grosse nirgends eine sich hier nur zu leicht einschleichende Dunkelheit lassende Deutlichkeit haben uns sehr angesprochen, und machen die Schrift auch für alle diejenigen, welche erst in das Studium dieser Gegenstände eintreten, recht sehr empfehlenswerth. Auch hat der Herr Verfasser an Anwendungen der reinen Theorie, z. B. auf Coordinatenverwandlung u. dergl., selbst auch auf Mechanik, u. s. w., es keineswegs fehlen lassen, wodurch die Deutlichkeit natürlich noch wesentlich erhöht wird. Die grosse Beschränktheit des Raumes erlaubt uns hier nur noch die Angabe der Hauptabschnitte: Einleitung. — Erste Abtheilung. Vorbegriffe. Grundlehren. — Zweite Abtheilung. Universelles Addiren und Subtrahiren von Strecken. Zusammenfügung und Zerfällung deselben. — Dritte Abtheilung. Zurückleitung zusammenhängender in einer Ebene liegender Strecken auf ein Paar ebenfalls darin enthaltener fester Axen. — Vierte Abtheilung. Zurückleitung von Strecken und Streckengefügen auf drei feste Axen im Raume.

Möge der Schrift die verdiente Beachtung zu Theil werden!

Praktische Geometrie.

Lehrbuch der praktischen Geometrie. Von Dr. G. Chr. K. Hunäus, Professor an der polytechnischen Schule zu Hannover. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 211 Holzschnitten. Hannover. C. Rümpler. 1868. 8°.

Die erste Auflage dieses Lehrbuchs ist im Jahre 1848 (Hannover. Helwig'sche Hof-Buchhandlung) erschienen. Wir stehen nicht an, die vorliegende neue Auflage für ein ganz neues Werk zu erklären, da dieselbe nach unserer Meinung mit der älteren Auflage nur noch eine sehr geringe Aehnlichkeit hat, wenn auch die Anordnung im Grossen und Ganzen beibehalten worden ist. Jedenfalls ist den Lesern hier ein Werk geboten, welches seinen Gegenstand unter sorgfältiger Berücksichtigung aller neueren Fortschritte mit grosser Vollständigkeit, Gründlichkeit, ungemeiner Deutlichkeit und Anschaulichkeit, und mit grossem praktischen Takt, ohne Voraussetzung einer zu grossen Masse theoretischer mathematischer Kenntnisse, behandelt, und daher praktischen Geometern mit aller Zuversicht sehr empfohlen zu werden verdient, ein Werk, welches in seiner neueren Gestalt gewiss auch wesentlich beitragen wird, bessere Methoden für die Feldmesserarbeiten einzuführen, und einer rationellen Behandlung der praktischen Geometrie immer mehr Eingang und Geltung zu verschaffen, so dass wir das Erscheinen dieses trefflichen Werkes nur mit besonderer Freude haben begrüssen können, und dem Herrn Verfasser zu dessen Vollendung wahrhaft Glück wünschen. Die grösste Sorgfalt ist in der anerkennungswerthesten Weise der Beschreibung, der Gebrauchsanweisung, der Correction u. s. w. der Instrumente gewidmet, wobei, was besonders zu loben ist, alle Instrumente sorgfältig in ihre einzelnen Theile zerlegt, und diese letzteren einzeln beschrieben und in ihrer Bedeutung sorgfältig charakterisirt worden sind. Die in sehr grosser Anzahl beigefügten Holzschnitte, in vollständig ausgeführten Zeichnungen, befriedigen — so wie auch die ganze übrige äussere Ausstattung — die höchsten Anforderungen, und können selbst den besten Werken dieser Art des Auslandes als Muster dienen. Auch den Ausgleichungsrechnungen ist besondere Aufmerksamkeit gewidmet, in dieser Beziehung jedoch ein weises Maass gehalten worden, was besondere Anerkennung verdient, da gerade hierin nach unserer Meinung oft viel zu weit gegangen wird, indem der theilweise erforderliche ungeheuere Aufwand von Rechnung wohl

schwerlich immer mit dem, was man dadurch erreicht, im gehörigen Einklange und Verhältniss steht, welche Ansicht weiter zu begründen hier natürlich nicht der Ort sein kann, wenn wir auch nicht unterlassen wollen, uns auf hier jetzt nicht weiter zu bezeichnende Länder nicht deutscher Zunge zu berufen, wo man von diesen Rechnungen meistens nur einen sehr mässigen Gebrauch macht, ohne dieselben ganz bei Seite zu setzen. Der Raum erlaubt uns hier nur noch die folgende Angabe der Hauptabschnitte: Einleitung. (Die Maasse der Geodäsie.). — Erstes Buch. Die niedere Geodäsie. I. Die Hülfsmittel zu den Aufnahmen oder die Messinstrumente und Hülfsapparate. II. Die geometrischen Aufnahmen mittelst der in der ersten Abtheilung beschriebenen Mess-Apparate. III. Die graphische Darstellung der geometrischen Aufnahmen. Das Kartieren. — Zweites Buch. Grundzüge der höheren Geodäsie, oder die Aufnahme und Kartierung solcher grösseren Erdstrecken, wobei die Erdoberfläche nicht mehr als eben angesehen werden darf.

Wir wünschen dem in seiner Art ausgezeichneten Buche die weiteste Verbreitung.

Lehrbuch der praktischen Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der Theodolithmessungen, so wie der Instructionen für das schweizerische Geometerkonkordat und die Grossherzogthümer Hessen und Baden. Von J. J. Rebstein, Professor der Mathematik und des technischen Zeichnens an der thurgauischen Kantonsschule. Mit 194 Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln. Frauenfeld. J. Huber. 1868. 8°.

In würdigster, ja eleganter äusserer Ausstattung liegt uns hier ein Buch vor, welches die praktische Geometrie etwa in der Ausdehnung behandelt, in welcher deren Kenntniss Behufs der Katastervermessungen erforderlich ist, und daher die geodätischen Methoden einer höheren Gattung nicht in seinen Kreis gezogen hat. Jedenfalls verdient dasselbe aber in der angedeuteten Beziehung alle Empfehlung, namentlich rücksichtlich seiner praktischen Haltung, basirt natürlich auf eine gründliche, über die mathematischen Elementar-Kenntnisse jedoch nicht hinausgehende Theorie. Besondere Anerkennung verdient es nach unserer Meinung, dass der Herr Verfasser ausser den trigonometrischen Messungsmethoden auch der polygonometrischen oder Coordinatenmethode vorzugsweise Geltung zu verschaffen gesucht hat, einer Methode, die von den gewöhnlichen praktischen Geometern bei

Weitem noch nicht genug in Anwendung gebracht wird. Auch die in dem Werke genommene Beziehung auf Länder, wo die Katastrirung schon längst einen Hauptbestandtheil der Staatsverwaltung ausgemacht hat, ist von besonderem Interesse, und die ausführlich mitgetheilten betreffenden Formulare sind als Muster für ähnliche Arbeiten in anderen Ländern mit allem Danke aufzunehmen. Indem wir das Werkchen allen praktischen Geometern zu sorgfältiger Beachtung empfehlen, wollen wir nun nur noch die Ueberschriften der Hauptabschnitte angeben: Erster Theil. Die Lehre von den Instrumenten (auch das Polarplanimeter von Amsler und das Planimeter von Wetli). — Zweiter Theil. Die Lehre von den Messungen. I. Horizontalmessungen. (A. Trigonometrische Methode. B. Polygonometrische Methode. C. Die Linearkonstruktionsmethode. Berechnung und Theilung der Flächen). — II. Höhenmessungen. (A. Das trigonometrische Höhenmessen. B. Das Nivelliren. C. Darstellung der Bodenconfiguration.). — In einem Nachtrage zu §. 66. giebt der Herr Verfasser ein Graphisches Ausgleichungsverfahren bei der Dreiecksberechnung, welches von den Trigonometern des Grossherzogthums Baden angewandt wird und sich trefflich bewährt haben soll, und auf das wir daher hier die Geometer besonders aufmerksam zu machen nicht unterlassen wollen. — Den Schluss des Buches bildet der fünfzehnte Abschnitt: „Ueber die Vermessung von Liegenschaften, Erstellung und Fortführung des Katasters und der Pläne", welcher natürlich durchaus praktischer, fast technischer Natur ist, aber auch der mitgetheilten Formulare wegen u. s. w. recht sehr zur Beachtung empfohlen zu werden verdient.

Physik.

Die Physik für Unter-Realschulen. Von Prof. Dr. F. J. Pisko in Wien. Siebente sehr verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 492 Figuren. Brünn. C. Winiker. 1869. 8°.

Die Physik für Ober-Gymnasien. Von Prof. Dr. F. J. Pisko in Wien. Zweite umgearbeitete Auflage. Mit 416 im Texte aufgenommenen Holzschnitten. Brünn. C. Winiker. 1869. 8°.

Die fünfte Aaflage des ersten, die erste Auflage des zweiten dieser beiden sehr empfehlenswerthen Lehrbücher sind im Literar.

Ber. Nr. CLX. S. 6. angezeigt und näher charakterisirt worden; was dort gesagt worden ist, gilt in erhöhetem Maasse von diesen neuen Auflagen, und namentlich macht das für Ober-Gymnasien bestimmte Lehrbuch — wie schon früher bemerkt worden ist — u. A. auch einen sehr günstigen Eindruck durch die sehr verständige, nicht zu weit gehende, aber für den Zweck des Buches doch völlig hinreichende Anwendung der Mathematik, überall da, wo dieselbe wissenschaftlich geboten war oder als Förderungsmittel der geistigen Bildung der Schüler dienen konnte, wobei übrigens das Experiment keineswegs vernachlässigt, sondern überall, wo es diese Stellung beanspruchen konnte, in den Vordergrund gestellt worden ist, mit ausführlicher Beschreibung, Erläuterung und Abbildung der erforderlichen Instrumente und Apparate. Namentlich das grössere Werk ist in mehreren Partieen völlig umgestaltet worden, und hat alle wichtigen Fortschritte der Physik mit anerkennungswerther Vollständigkeit in sich aufgenommen, und der Herr Verfasser ist offenbar mit dem rühmlichsten Eifer und Fleisse bemüht gewesen, alle Lehren — bei möglichster Präcision und Kürze — durch eine, vollständige Deutlichkeit erstrebende Darstellung den Schülern so nahe wie möglich zu führen, weshalb das Buch neben seinem Hauptzwecke als Lehrbuch auch zum Selbststudium wohl empfohlen werden darf. Auch dadurch zeichnen sich diese neuen Auflagen vor den älteren aus, dass in consequenter Weise überall historische Notizen aufgenommen, wenigstens die Namen der Entdecker, Erfinder u. s. w. durchgängig genannt worden sind. Indem wir uns schliesslich zu noch näherer Charakterisirung auf unsere oben genannte Anzeige der früheren Auflagen beziehen, wünschen wir, dass diese beiden Lehrbücher — namentlich das grössere — die so sehr verdiente Beachtung immer mehr finden mögen. Auf Lehranstalten, wo namentlich dieses letztere Buch in seinem ganzen Umfange dem physikalischen Unterrichte zu Grunde gelegt werden kann, muss dieser Unterricht sehr gut bestellt sein, und die Schüler werden aus demselben — abgesehen von ihrer dadurch gewiss wesentlich geförderten allgemeinen geistigen Bildung, deren Erstrebung auf Schulen natürlich die Hauptsache ist — einen reichen Schatz ihnen sehr nützlicher physikalischer Kenntnisse in's Leben mit hinüber nehmen.

Lehrbuch der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen. Im Auftrage der Königlichen Kommission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Würtemberg ausgearbeitet von Dr. Ludwig Blum, Professor an der Kgl. Realanstalt in Stuttgart.

Zweite vermehrte Auflage. Leipzig und Heidelberg. C. F. Winter'sche Verlagshandlung. 1868. 8°. Stuttgart. A. Oetinger.

Die erste Auflage dieses seinem Zwecke nach unserer Ueberzeugung in ausgezeichneter Weise entsprechenden, und von dem sehr guten Zustande der Lehranstalten, für welche es bestimmt ist, jedenfalls ein sehr vortheilhaftes Zeugniss ablegenden Lehrbuchs ist im Literar. Ber. Nr. CXXX. S. 5. von Herrn Dr. Böklen angezeigt worden. Die dort gerühmten Eigenschaften kommen natürlich auch dieser zweiten Auflage in gleichem Maasse zu, und den neueren Fortschritten der Physik und Mechanik ist in derselben überall zweckentsprechende Rechnung getragen, so dass wir diese neue Auflage jedenfalls für den Gebrauch als Lehrbuch allen gewerblichen Fortbildungsschulen recht sehr empfehlen können. Wenn auch eigentliche mathematische Entwickelungen und theoretische Beweise natürlich keine, oder nur in sehr geringem Maasse, Anwendung gefunden haben, so hat sich der Herr Verfasser doch mit Recht nicht gescheuet, die gewöhnlichen mathematischen Begriffe als bekannt vorauszusetzen, und sich mathematischer Bezeichnungen da zu bedienen, wo es die Kürze und Präcision des Ausdrucks erforderte; diese Kenntnisse werden sich bei dem gegenwärtigen guten Zustande des mathematischen Elementarunterrichts gewiss immer als bekannt voraussetzen lassen. — Wenn alle unsere Gewerbtreibenden die in diesem ausgezeichneten Buche niedergelegten Lehren der Physik und Mechanik ihr volles Eigenthum nennen dürfen: dann wird für ihre Bedürfnisse in dieser Beziehung jedenfalls vortrefflich gesorgt sein.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von Dr. C. Jelinek und Dr. J. Hann. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXXIV. S. 20.).

Von dieser ungemein interessanten und der jungen meteorologischen Wissenschaft jedenfalls einen sehr grossen Nutzen bringenden Zeitschrift, durch deren Herausgabe die Herren Jelinek und Hann, — so wie auch die österreichische Gesellschaft für Meteorologie überhaupt — sich ein nicht genug anzuerkennendes Verdienst erwerben, liegt uns wieder eine grössere Anzahl von Nummern vor, deren wesentlichsten Inhalt wir im Folgenden anzeigen wollen, indem wir zugleich unsere Freude über den regelmässigen, raschen und ungehinderten Fortgang dieses trefflichen Unternehmens aussprechen. Natürlich können wir uns hier auf die Anzeige der in allen Nummern in grosser Anzahl enthaltenen

kleineren Mittheilungen und der Literatur-Berichte nicht einlassen, sondern müssen uns auf die Angabe der grösseren Abhandlungen beschränken, ohne dass man darin eine Verkennung des grossen Werthes jener kleineren Mittheilungen finden darf.

Zunächst liegen uns vor Band III. Nr. 21. bis Nr. 24. (Schluss von Band III.), aus welchen Nummern wir die folgenden grösseren Aufsätze hervorheben: Ueber die Witterungsverhältnisse und Niederschläge vom 11. September bis 10. October 1868. Von J. Hann. — Die Perioden der Dürre in Wien. Von C. Fritsch. — Ueber die Verwerthung des meteorologischen Materials zur Untersuchung der Stürme. Von C. Jelinek (sehr lehrreich). — Ein Beitrag zur täglichen Periode der Gewitter. Von C. Fritsch. — Der Scirocco der Südalpen. Von J. Hann. — Viele werthvolle Mittheilungen über die Sternschnuppen der November-Periode. — Carlo Matteucci. Eine biographische Skizze von A. de la Rive. — Weitere Mittheilungen über Sternschnuppen der November-Periode.

Band IV. Nr. 1 bis Nr. 8. Ueber den Wald und den Einfluss desselben auf das Klima. Von E. Becquerel. (Von grossem allgemeinen Interesse. Die Abhandlung läuft durch vier Nummern.). — Ein neuer Verdunstungsmesser. Von v. Lamont. — Ueber die richtige Lage und die Theorie des Calmengürtels auf den Continenten. Von A. Mühry. — Kälte in den Neuenglandstaaten und denkwürdiger Wettersturz (Passatwechsel) in Nordamerika im Januar 1866. Von J. Hann. — Ueber den Sturm vom 6. und 7. December 1868. Von H. W. Dove. — Ueber atmosphärische Elektricität. Von Dellmann. — Aus den Literatur-Berichten heben wir noch hervor: „Documenti e studi sul clima d'Italia raccolti e pubblicati da una commissione governativa sotto la direzione di Carlo Matteucci. — Sul Clima di Vigevano d. G. V. Schiaparelli. Milano 1868.“ und freuen uns, dass in dieser Arbeit des berühmten Directors der Mailänder Sternwarte über das Klima von Vigevano die erste von einer Reihe von Arbeiten über das Klima Italiens vorliegt, welche dem kräftigen Impulse der italienischen Regierung ihre Entstehung zu danken haben. Möge durch den bedauernswerthen Tod Matteucci's dieses wichtige Unternehmen keine Unterbrechung erleiden! — Ferner heben wir hervor: Meteorologische Schriften von Carlo Matteucci. Von Dr. Carlo Marangoni.

Am 1. October 1868 zählte die österreichische Gesellschaft für Meteorologie 314 Mitglieder, woraus das grosse Interesse er-

hellet, welches man dort an meteorologischen Arbeiten nimmt; des Weiteren wegen verweisen wir auf den interessanten Jahresbericht für 1868 in Band III. Nr. 23. S. 588.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1868. Januar—Juni. Prag. 1868. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXXIV. S. 23.).

Dr. Celakovsky: Ueber die allgemeine Entwickelungsgeschichte des Pflanzenreichs (gehört nicht unbedingt hierher, ist aber von allgemeinem Interesse). S. 51. — Prof. Studnicka: Ueber die Anwendung der Hesse'schen Determinanten in der Theorie der Maxima und Minima von Functionen mehrerer unabhängigen Variablen. S. 67. — Dr. Wilhelm Gintl: Ueber die Anwendung des Principes der Aräometrie bei der quantitativen chemischen Analyse. S. 94. — Prof. Gustav Schmidt: Ueber astronomische Uhren, welche die Stellung der Sonne und des Mondes im Thierkreise ersichtlich machen sollen, wie eine solche z. B. an dem alten jetzt restaurirten Wahrzeichen am Altstädter Rathhaus in Prag angebracht ist. S. 103.

Tidskrift för Matematik och Fysik, tillegnad den svenska Elementar-Undervisningen, utgifven af D: R. Göran Dillner, Adjunkt i Matematik vid Upsala Akademi (Hufvudredaktör); D: R. Frans Wilhelm Hultman, Lektor vid Stockholms Elementar-Läroverk; D: R. T. Robert Thalén, Adjunkt i Fysik vid Upsala Akademi. Upsala, W. Schultz' Boktryckeri. 1868. 8°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXXIV. S. 20.).

Von dieser sehr verdienstlichen Zeitschrift liegen uns als Fortsetzungen vor: Häftet 6. November 1868. — Häftet 1. Januari 1869. Häftet 2. Mars 1869.

Die Einrichtung ist im Allgemeinen ganz dieselbe geblieben wie in den früheren Heften, und namentlich enthalten die vorliegenden neuen Hefte wieder eine grosse Anzahl von interessanten Aufgaben und einzelnen Sätzen, die wir allen Lehrern der Mathematik zur sorgfältigsten Beachtung empfehlen müssen, so wie denn dieselben überhaupt in dieser vorzugsweise dem mathematischen und phy-

im Archiv zurückzukommen hoffen, besteht aus folgenden Abtheilungen: 1. Zum goldenen Schnitt. 2. Zum Lehrsatz des Hippokrates. 3. Zum Lehrsatz des Ptolemäus.

Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Von Dr. Rudolf Wolf, Professor in Zürich. Vierte, umgearbeitete und erweiterte, mit vierundzwanzig Tabellen und vielen Holzschnitten ausgestattete Auflage. Zürich. F. Schulthess. 1869. 8°.

Dieses weit verbreitete, sehr zweckmässig eingerichtete Taschenbuch ist so bekannt, dass es genügen wird, das Erscheinen dieser vierten Auflage anzuzeigen und dieselbe den Lesern des Archivs zur Beachtung zu empfehlen. Die 24 Zahlentafeln bieten in aller Kürze ein sehr dankenswerthes Hülfsmittel bei vielen Rechnungen, so wie auch für Physik und Mechanik, Geodäsie, Astronomie und Geschichte der Mathematik und Physik dar.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1865. Nr. 580—602. Mit 1 Tafel. Bern. Huber & Comp. 1866. 8°.

Wir holen die wegen Mangel an Raum leider verspätete Anzeige dieser schon vor längerer Zeit erschienenen Nummern jetzt nach, weil sich in derselben mehrere in den Kreis des Archivs gehörende werthvolle Aufsätze befinden, nämlich die folgenden: **Friedrich Geiser:** Ueber eine geometrische Verwandtschaft des zweiten Grades. S. 97. — **R. Lauterburg:** Bericht zu den Pegelbeobachtungen der Aare in Bern und Thun, vom 1. Mai 1864 bis 1. Mai 1865 (mit einer Tafel). S. 79. — **A. Nil:** Besteigung des Piks von Ternate und Tidore im Sommer 1865. S. 131. — **Perty:** 1) Ueber Secchi's in Rom Abbildung des grossen Sonnenfleckens vom Februar 1865. S. 74. — 2) Ueber das neue Marine-Doppelfernrohr von Herrn Sigmund Merz in München. S. 139. — **H. Wild:** 1) Bericht der meteorologischen Centralstation in Bern vom Jahre 1864. S. 37. — 2) Nachrichten von der Sternwarte in Bern aus den Jahren 1863—64. I. Astronomische Beobachtungen. S. 64. II. Magnetische Beobachtungen. S. 65.

Literarischer Bericht

CLXXXXVIII.

Jean-Baptiste Brasseur.

Eine sehr ausführliche, von Herrn Liagre verfasste Lebensskizze des vorgenannten trefflichen Belgischen Mathematikers und sehr ausgezeichneten Lehrers der Universität zu Lüttich enthält das „Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1869." Die Mittheilung dieser ausgezeichneten Lebensskizze verstattet jedoch der Raum dieser Nummer des Literarischen Berichtes nicht, und dieselbe muss daher einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben. Da sich aber die Zeit dieser Mittheilung jetzt noch gar nicht bestimmen lässt, und es mir Herzenssache ist, dem trefflichen Manne auch in diesen Blättern ein kleines Denkmal zu setzen: so beschränke ich mich für jetzt — indem ich, weitere Mittheilungen mir vorbehaltend, bemerke, dass Brasseur am 24sten Juni 1802 zu Esch-sur-l'Alzette geboren war, — mit der Mittheilung des folgenden

Discours prononcé par M. Spring, au nom de l'Académie*), lors des funérailles de M. J.-B. Brasseur, membre de l'Académie, décédé à Liége, le 13 Mai 1868.

MESSIEURS.

„Permettez qu'au nom de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique, je vous retienne encore quelques instants dans cette enceinte.

*) de Bruxelles.

J'aurais voulu que les derniers adieux de la Compagnie fussent prononcés par une voix plus compétente que la mienne; j'aurais désiré surtout d'être exempté de l'amertume de devoir mesurer mes paroles dans un moment où mon coeur est oppressé. Car s'il n'est personne d'entre vous, Messieurs, qui n'ait chéri cette âme loyale et sincère, respecté cette vie simple et dévouée, admiré cet esprit lucide et pénétrant, je suis du nombre de ceux que, d'ancienne date, Brasseur avait honoré de son amitié et qui sentent que dans ce cercueil repose une partie d'eux-mêmes — *et meam partem abstulit.*

Jean-Baptiste Brasseur fut attaché à l'Académie, avec le titre de correspondant, le 17 décembre 1847, et élu membre de la section des sciences mathématiques et physiques, le 14 décembre 1855. Il y représentait dignement les branches sur lesquelles portait son enseignement à l'Université de Liége. D'une assiduité exemplaire aux séances, il enrichit nos Mémoires de travaux qui se sont acquis une place considérable dans l'estime des savants et contribueront encore, après sa mort, à l'illustration du nom scientifique belge.

Le hasard, auquel je rends hommage, a fait que les deux membres du corps enseignant appelés par les devoirs de leur charge à prendre la parole au nom de l'Université, l'honorable recteur et le savant doyen de la Faculté des sciences, appartiennent à la spécialité scientifique du confrère dont nous déplorons la perte. Je pourrais donc me dispenser de rien ajouter aux éloges qu'ils lui décernent en pleine connaissance de cause. Je dirai néanmoins que Brasseur possédait au plus haut degré les qualités qui constituent le géomètre: la méthode, la rigueur, la clarté et une profondeur peu communes. Ces qualités se rencontrent surtout dans ses admirables *Précis de géométrie descriptive et de mécanique appliquée.*

Il ne se contentait jamais de connaissances superficielles, ni de vérités convenues. Lisant peu, il s'attachait à quelques auteurs principaux dont il s'assimilait les idées et qu'l parvenait, pour ainsi dire, à savoir par coeur. Ayant en outre élargi considérablement le domaine de la science et créé de nouvelles méthodes de recherches, il porta la clarté et la précision dans les parties les plus abstraites et les plus difficiles. Sa modestie, admirablement naturelle et vraie, lui faisait dire que chaque fois qu'il n'avait pas été bien compris, soit dans ses écrits, soit dans son enseignement, cela avait été de sa faute, c'est-à-dire que quelque chose avait manqué à l'exposition de l'idée: il la retournait

alors sur toutes ses faces jusqu'à ce qu'il lui eût rendu cette transparence qui la faisait saisir de tous.

C'est ainsi que, dès 1829, il était parvenu, seul parmi tous les analystes, assure-t-on, à dégager de toute obscurité les principes du *calcul différentiel et intégral.* Les découvertes qu'il a faites en géométrie supérieure et la préparation de ses cours l'ont empêché de publier cette vue à laquelle il voulait d'abord donner de grands développements. Il avait fini par communiquer son travail à celui de ses élèves qu'il distinguait entre tous comme donnant les plus belles promesses d'avenir. Il m'avait entretenu plusieurs fois du projet qu'il nourrissait de confier à ce jeune mathématicien la publication de cet important ouvrage. Il est à espérer que ce désir se réalisera bientôt.

Le peu d'empressement que Brasseur mettait à publier lui-même ses travaux l'a frustré peut-être de l'honneur de la priorité qu'il aurait pu revendiquer dans la découverte de maint théorème de géométrie supérieure; c'est ainsi qu'il avait démontré, sept ans avant la publication du premier ouvrage de Steiner, un grand nombre des propriétés nouvelles qui y sont exposées. Il est l'auteur d'une nouvelle méthode de démonstration, publiée d'abord dans plusieurs notices et mémoires particuliers et résumée ensuite dans son *Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue* (MÉM. DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, tome XXIX). En 1840, il avait montré le premier que les projections cotées peuvent servir de moyen de démonstration, et l'avait appliqué, avec beaucoup d'élégance, aux surfaces gauches. Selon l'appréciation d'hommes compétents, les travaux géométriques de Brasseur lui assurent un rang, comme inventeur, à côté des Poncelet, des Steiner et des Chasles.

Messieurs, l'honorable chef de l'Université vous a parlé de l'homme en même temps que du savant et du professeur. Ceux qui ont vécu dans son intimité attesteront qu'il n'y a là rien d'immérité. Homme essentiellement bon, loyal, modéré, sensé et dévoué, il se montrait tel à l'Académie, où il comptait autant d'amis sincères que de confrères. C'est que partout où un honnête homme met son esprit, il y met son coeur."

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Achtzehnter Jahrgang. 1868.

So wie alle seine Vorgänger (m. vergl. den Literar. Bericht Nr. CLXXXXII. S. 14.) liefert auch dieser Jahrgang des Almanachs — in wesentlich nicht veränderter allgemeiner Einrichtung — ein höchst erfreuliches Bild von der weit verbreiteten fruchtreichen Thätigkeit der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, und bleibt immer ein sehr wichtiger Beitrag zur mathematischen und physikalischen Literatur. Derselbe enthält kurze necrologische Notizen über M. Faraday und Sir D. Brewster (S. 213 und S. 216.), und einen zwar kürzeren, aber sehr interessanten, den Lesern des Archivs recht sehr zur Beachtung zu empfehlenden Vortrag des Herrn Viktor von Lang, wirkl. Mitgl. der k. Akademie: Ueber unsere Kenntnisse von den optischen Eigenschaften der Krystalle. S. 223 bis S. 238., welcher in der feierlichen Sitzung der k. Akademie am 30. Mai 1868 gehalten wurde.

Verzeichniss sämmtlicher von der kais. Akademie der Wissenschaften seit ihrer Gründung bis letzten October 1868 veröffentlichten Druckschriften. Wien. Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn. 1869. 8°.

Mit diesem 300 Seiten starken sehr vollständigen, mit der grössten Genauigkeit und Sorgfalt angefertigten Inhaltsverzeichnisse aller ihrer in dem oben genannten Zeitraume erschienenen Schriften hat die kais. Akademie der Wissenschaften der gesammten Literatur ein höchst wichtiges und angenehmes Geschenk gemacht, welches mit dem grössten Danke aufzunehmen ist, wobei zugleich noch besonders hervorgehoben werden muss, dass bei allen einzelnen Schriften deren Preise in Fl. und Kr., so wie in Thlr. und Ngr., genau angegeben worden sind. Die einzelnen Schriften sind in der 2ten und 3ten Abtheilung und im Anhange sehr zweckmässig nach ihren Verfassern geordnet, und zerfallen in die folgenden Abtheilungen:

I. Abtheilung: Periodische Werke beider Classen der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. S. 1—35.

II. Abtheilung: Werke einzelner Autoren und kleinere Schriften. S. 37—41.

III. Abtheilung: Separat-Abdrücke aus dem Archiv, dem Notizenblatte, den Denkschriften, Sitzungsberichten und der feierlichen Sitzung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, sowie aus den durch die Akademie herausgegebenen Jahrbüchern der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, nebst Beilagen zu den Sitzungsberichten. S. 42—296.

Anhang: Wissenschaftliche Publicationen der Novara-Expedition. S. 297—300.

Ueberblickt man aber dieses 300 Seiten starke Inhaltsverzeichniss, so muss man in der That staunen über die weit ausgebreitete und höchst fruchtbare Thätigkeit der kais. Akademie in der verhältnissmässig nur kurzen Zeit ihres Bestehens, und kann nur die Richtigkeit Dessen von Neuem erkennen, was von uns schon früher bei anderer Gelegenheit bemerkt worden ist: dass nämlich die kais. Akademie der ihr durch ihren erhabenen Stifter gestellten Aufgabe: die höchste wissenschaftliche Behörde des Landes zu sein, in der schönsten, einflussreichsten und fruchtbringendsten Weise entsprochen hat. Jeder, der es mit den Fortschritten der Wissenschaften redlich meint, und nicht in engherziger Weise besonderen Systemen huldigt, kann nur aus innerstem Herzen wünschen, dass es auch fernerhin bis in die spätesten Zeiten der kais. Akademie vergönnt sein möge, ihrem wichtigen schönen Zwecke in einer so fruchtreichen und wahrhaft grossartigen Weise wie bisher zu entsprechen.

Tables générales et analytiques du Recueil des Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 2me Série. Tome I a XX. (1857 à 1866). Bruxelles. Hayez. 1867.

Wir verfehlen nicht auch dieses ein gutes Stück mathematischer und physikalischer Literatur enthaltende, 187 Seiten umfassende, von der weit verzweigten Thätigkeit der Königl. Belgischen Akademie der Wissenschaften das schönste und rühmlichste Zeugniss ablegende Inhaltsverzeichniss hier anzuzeigen, indem wir bemerken, dass dasselbe besteht aus der „Table des matières" pag. 1. bis pag. 96. und der „Table des auteurs" pag. 97. bis pag. 187.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 1868. 4°. (Vergl. Liter. Ber. Nr. CLXXXXVI. S. 5.).

Tomo I. Novembre 1868. Sulla Epistola di Pietro Peregrino di Maricourt, e sopra alcuni trovati e teorie magnetiche del secolo XIII. Memoria seconda del P. D. Timoteo Bertelli Barnabita. (Continuazione). p. 343.

Tomo I. Dicembre 1868. Sulla Epistola di Pietro Peregrino di Maricourt, e sopra alcuni trovati e teorie magnetiche del secolo XIII. Memoria seconda del P. D. Timoteo Bertelli Barnabita. p. 379. — Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 421. (Auf diese S. 421 bis S. 449 umfassenden, mit sehr kleiner Schrift gedruckten „Annunzi" müssen wir unsere Leser ganz vorzüglich aufmerksam machen. Dieselben liefern ein so vollständiges Verzeichniss der fast in allen Ländern auf dem Gebiete der Mathematik und Physik erschienenen neuen Schriften, die ausführlichsten Inhaltsanzeigen aller betreffenden Zeitschriften, der Memoiren der verschiedenen gelehrten Gesellschaften u. s. w. u. s. w., wie etwas nur einigermassen diesem Verzeichniss nahe Kommendes in keinem Lande existirt. Wir können nur unsere lebhafteste Bewunderung dem Fleisse und der Sorgfalt zollen, womit dieses Verzeichniss auf Grundlage der reichsten zu Gebote stehenden Literatur zusammengestellt worden ist, und erkennen in demselben das wichtigste jetzt existirende, für jeden Mathematiker und Physiker ganz unentbehrliche Hülfsmittel zur Kenntniss der neueren mathematischen und physikalischen Literatur fast aller Länder mit Freuden an.).

Mit dem gleichfalls bereits erschienenen „Indice degli articoli" liegt hiemit nun in sehr schöner äusserer Ausstattung der erste Theil eines periodischen Werkes vollständig vor uns, durch welches, wenn es so regelmässig und ununterbrochen fortschreitet wie bisher, die Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften mehr gefördert werden wird als durch irgend ein früheres Werk. Wir können daher dessen berühmtem Herrn Herausgeber nur Glück wünschen zu der Vollendung dieses ersten Theils, und im Namen der Wissenschaft ihm den lebhaftesten Dank aussprechen für die Sorgfalt, den Eifer und die jedenfalls sehr grossen Opfer, womit er sich dieser sehr wichtigen Publication hingiebt; möge die göttliche Vorsehung ihm Kraft schenken, das herrliche Werk, was zugleich seinem Vaterlande zur grössten Ehre gereicht, bis zu den spätesten Zeiten fortzuführen!

Möge man hieraus nun aber auch entnehmen, wie gross unsere Freude ist, jetzt auch schon anzeigen zu können:

Tomo II. Gennaio 1869. La vie et les travaux du Baron Cauchy, membre de l'Académie des sciences; par C. A. Valson, Professeur à la Faculté des sciences de Grenoble; avec une préface de M. Hermite, membre de l'Académie des sciences. Tome I. Partie historique. pag. XXIV e 290. — Tome II. Partie scientifique. pag. XXIII e 178. — Paris. Gauthier Villars, imprimeur-libraire etc. Quai des Augustins. 55. 1868. 8°. — B. Boncompagni.

Die Herren C. A. Valson und Hermite haben sich jedenfalls ein nicht genug anzuerkennendes Verdienst erworben durch die Herausgabe dieses grossen zweibändigen, für die neuere Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften ungemein wichtigen Werks — auf welches wir in dem „Archiv" noch besonders zurückzukommen hoffen — über das Leben und die wissenschaftlichen Verdienste eines der grössten Mathematiker aller Zeiten, welchem doch eigentlich die ganze neuere Mathematik und mathematische Physik hauptsächlich ihre gegenwärtige Gestalt verdanken. Aber auch Herrn B. Boncompagni ist der grösste und wärmste Dank auszusprechen, dass er sich der sehr ausführlichen Anzeige dieses wichtigen Werkes in seinem „Bullettino" unterzogen hat, von welcher die erste Abtheilung hier vorliegt, und deren Fortsetzung wir mit dem grössten Verlangen entgegen sehen. Jeder, dem das grosse Werk des Herrn Valson selbst nicht zugänglich ist, wird hier mit dem grössten Interesse und der wärmsten Theilnahme die Lebensbeschreibung des grossen Mathematikers lesen, die Herr Boncompagni von pag. 6. an zu liefern angefangen hat, in welcher er mit Recht, neben Cauchy's grossen wissenschaftlichen Verdiensten, die vielen herrlichen Eigenschaften des Herzens, des Gemüths und des Charakters, durch welche derselbe bekanntlich so sehr ausgezeichnet war, namentlich seine tiefe, aus dem innersten Herzen stammende Religiosität, und die in wahrer Ueberzeugung wurzelnde Treue, mit welcher er bis zu seinem letzten Athemzuge seiner Kirche anhing, hervorzuheben nicht unterlassen hat. Von welcher Freude müssen die Herzen der beiden Töchter Cauchy's, die ihn überlebt haben, von denen die eine mit dem Vicomte Felix de l'Escalopier, die andere mit dem Comte Alfred de Saint-Pol vermählt ist, bewegt werden, wenn sie diese Lebensbeschreibung ihres grossen Vaters lesen!!

Arithmetik.

Untersuchungen über eine Gleichung des ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Eine zur Erlangung des Magistergrades verfasste und Einer Hochverordneten physico-mathematischen Facultät der Kaiserl. Universität vorgelegte Abhandlung von Karl Weihrauch. Dorpat. Druck von E. Mattiesen. 1869. 4°.

Diese 43 Seiten umfassende akademische Schrift behandelt den auf ihrem Titel genannten Gegenstand mit sehr grosser Ausführlichkeit und in grosser Allgemeinheit mehrfach nach neuen Gesichtspunkten, und verdient recht sehr, zu sorgfältiger Beachtung empfohlen zu werden. Nach einer kurzen Einleitung besteht dieselbe aus zwei Theilen, nämlich: I. Theil. Untersuchung der Formen, in denen die Auflösungen enthalten sind. — II. Theil. Anzahl der Auflösungen. — Ein jeder sich für diesen Gegenstand der Algebra Interessirender wird aus dieser Schrift mannigfache Belehrung und Anregung schöpfen, weshalb wir dieselbe nochmals zu recht sehr verdienter Beachtung empfehlen.

Physik.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von Dr. C. Jelinek und J. Hann. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXVII. S. 11.). Band IV. Nr. 9 bis Nr. 11.

Neumayr's Project einer wissenschaftlichen Durchforschung Australiens. Vortrag von Prof. v. Vivenot. S. 209. — Ueber die richtige Lage und die Theorie des Calmengürtels auf den Continenten. Von A. Mühry. (Schluss.). S. 214. — Bemerkungen über das Messen der Wasserverdunstung in freier Luft. Von Prof. v. Lamont. S. 241. (Sehr lehrreich.). — Die Organisation der meteorol. Beobachtungen in Italien. Von Dr. Carlo Marangoni. S. 246. Sehr interessant und ein sehr anziehendes Bild von dem grossen Interesse liefernd, welches man in Italien überhaupt der Förderung der Meteorologie widmet, und von den höchst anerkennungswerthen und verdienstvollen Bemühungen der Herren Professoren Cantoni in Pavia, Clodig in Udine, Govi, Maldini, Schiaparelli u. s. w.; Director des meteo-

rologischen Centralbüreaus in Florenz ist Professor Donati daselbst. — Ueber Staubregen und verwandte Erscheinungen. Von K. Fritsch. S. 252. — Ueber den Einfluss der atmosphärischen Niederschläge auf das Grundwasser. Von Prof. Dr. Woldřich. S. 273. — Auch in diesen Nummern sehr viele interessante kleinere Mittheilungen und Literatur-Berichte. Unter den ersteren machen wir noch aufmerksam auf: Budget des Meteorological Office zu London (Kosten 10,570 Pfd. Sterl.). S. 280. und: Budget der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. (Die hier mitgetheilte Geschichte dieser schönen Anstalt, in welcher natürlich der trefflichen Männer von Baumgartner und C. Kreil besonders gedacht werden musste, ist von grossem Interesse. Kosten 5845 Fl. 40 Kr. + 3400 Fl. + 847 Fl. — Wie viel in Oesterreich für Meteorologie geschieht, ist aus unseren verschiedenen Mittheilungen im Archiv hinlänglich bekannt.).

Statistik.

(Mit Einschluss der sogenannten Politischen Arithmetik u. s. w.)

(Die Statistik nimmt hauptsächlich durch A. Quetelet's höchst verdienstliche Untersuchungen und Arbeiten immer mehr und mehr die Gestalt einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Disciplin oder einer „Socialen Physik" an, und ist nicht mehr wie früher und leider häufig auch jetzt noch, namentlich wenn sie als specielle Statistik einzelner Länder auftritt, ein oft sehr wüstes Conglomerat von Zahlen, welche uns nur damit bekannt machen, wie viel Schneider und Schuster in jeder Stadt sind u. dergl.; dieselbe wird täglich mehr eine besondere Domäne des Mathematikers und Physikers, und bietet für Beide ein besonderes sehr grosses Interesse dar, so dass die bisherigen sogenannten Herren Statistiker, insofern deren wissenschaftliche Bildung nicht auf einer durchaus mathematischen und physikalischen Grundlage ruhet, sich fürderhin von der Behandlung dieser Wissenschaft in sehr bescheidener und respectsvoller Ferne halten müssen. Das „Archiv" erkennt es daher — namentlich auch mit Rücksicht auf die grosse Anzahl fast täglich bei uns eingehender statistischer Schriften — als eine nicht mehr abzuweisende Nothwendigkeit an, unter die bisherigen Rubriken seiner Literarischen Berichte die besondere Rubrik:

Statistik

aufzunehmen, wie von jetzt an geschehen wird. — Natürlich werden vorzugsweise nur solche Schriften Beachtung finden, welche mehr oder weniger eine mathematische Tendenz haben, wenn auch absichtlich — um eine grössere Freiheit zu wahren — nicht die beschränkende Ueber-

versicherungsbank für Deutschland in Gotha. S. 109. (Sehr lehrreicher und der sorgfältigsten Beachtung recht sehr zu empfehlender Aufsatz.) — Petition des Collegiums für Lebens-Versicherungs-Wissenschaft zu Berlin an das Haus der Abgeordneten. Beschlossen in der Sitzung des Collegiums am 6. Februar 1869. S. 142. — Entwurf eines Gesetzes, betreffend den Geschäftsverkehr der Versicherungsanstalten (Beilage zu der vorhergehenden „Petition"). S. 171.

Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona (Presso il R. Istituto Tecnico Superiore de Milano) in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tertolini. 4°. (S. Liter. Ber. Nr. CLXXXXV. S. 16.).

Serie II^a. Tomo II°. Fascicolo 3°. (Dicembre 1868.).

Jordan: Mémoire sur les groupes de mouvements (continuazione). p. 177. — Genocchi: Intorno ad un teorema di Cauchy. p. 216. — Cayley: Addition à la Note sur quelques torses sextiques. p. 219. — Reye: Sopra le curve gobbe di quart' ordine e prima specie. (continuazione e fine). p. 222. — Roberts: Sur l'expression la plus simple de certaines fontions des différences des racines d'une équation du cinquième degré. p. 224. — Beltrami: Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. p. 232. — Genocchi: Intorno ad alcune forme di numeri primi. p. 256.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXXVI. S. 15. Auf dieser Seite ist Z. 9. v. u. statt „Nova" zu setzen „Nuova".)

Marzo e Aprile 1869. Intorno ai sistemi di rette di 2°. grado; per G. Battaglini. p. 65. — Sulla determinazione delle costanti arbitrarie negl' integrali delle equazioni lineari così differenziali che a differenze finite; per N. Trudi. p. 76. — Annunzio Bibliografico. pag. 97. — Sopra un' equazione dell' 8° grado; per G. Yung ed A. Armenante. p. 98. — Nuova dimostrazione del teorema: due curve punteggiate proiettivamente sono dello stesso genere; per E. Bertini. p. 105. —

Nota sopra due teoremi del sig. Mannheim; per E. d'Ovidio. p. 107. — Lettera del prof. Rubini al Redattore. p. 111. — Sulle somme dei divisori dei numeri; per C. Sardi. p. 112. — Correzioni. p. 116. — Sulle progressioni; per N. Jadanza. p. 117.

Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af **Camillo Tychsen.** Anden Raekke. Fjerde Aargang. Kjobenhavn*), Otto Schwartz's Forlag. 1868. 8°.

Wir müssen uns für jetzt begnügen, unsere Leser nur im Allgemeinen auf den vorliegenden Jahrgang dieser dänischen Zeitschrift aufmerksam zu machen, welche vorzugsweise der Förderung des mathematischen Unterrichts gewidmet ist. Dieselbe enthält eine nicht geringe Anzahl sehr werthvoller Aufsätze, wie z. B. einen, beachtenswerthe Bemerkungen über die Anwendung der Hyperbel zur Dreitheilung des Winkels, und die Beschreibung eines hiezu geeigneten Instruments enthaltenden Aufsatz von Herrn Adolph Steen. S. 1.; — ferner die Fortsetzung einer früheren Abhandlung enthaltenden Aufsatz über das trilineare Coordinatensystem von demselben Herrn Verfasser. S. 6.; — einen Aufsatz über die Dreitheilung des Winkels und das eingeschriebene Viereck von Herrn Oberlehrer Broager. S. 113.; — einen Aufsatz über die Integration der linearen Differentialgleichungen der ersten und zweiten Ordnung. S. 163.; — und vieles Andere, was wir der Beschränktheit des Raumes wegen hier nicht Alles namhaft machen können. Ganz vorzüglich reich ist aber auch diese Zeitschrift an meistens sehr instructiven mathematischen Aufgaben, welche wir zu späteren Mittheilungen in unserer Zeitschrift zu benutzen nicht unterlassen werden. Auch die Mittheilung der bei den Abgangsprüfungen auf den verschiedenen dänischen Lehranstalten: Gelehrten-Schulen, Realschulen, Forstlehranstalt, polytechnische Schule, Militärschule u. s. w. vorgelegten mathematischen Aufgaben ist von grossem Interesse, und liefert jedenfalls ein sehr erfreuliches Bild von dem Zustande des mathematischen Unterrichts auf allen diesen Lehranstalten. Auch Literarische Mittheilungen enthält die verdienstliche Zeitschrift, auf welche wir unsere Leser recht sehr aufmerksam zu machen nicht unterlassen, weitere Mittheilungen uns vorbehaltend.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Liter. Ber. Nr. CLXXXVIII. S. 14.).

*) Das für „o" zu setzende durchstrichene „o" ist hier in der Druckerei nicht vorhanden.

36me Année, 2me Sér., T. XXIV. Bolide observée le 11. Juin 1867; communication de M. Ad. Quetelet. p. 18. — Orage remarquable à Gand dans la nuit du 2 au 3 juin 1867; communication de M. Ad. Quetelet. p. 19. — Sur la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées, par M. Felix Plateau. p. 21. — Sur les orages des mois de juin et juillet 1867; communication de M. Ad. Quetelet. p. 114. — Observations des étoiles filantes, faites au mois d'août 1867, à l'Observatoire de Bruxelles; communication de M. Ad. Quetelet. p. 287. — Observations des étoiles filantes faites à Gand du 9 au 12 août 1867; par M. Duprez. p. 289. — Observations des étoiles filantes faites à Louvain du 11 au 12 août 1867: par M. F. Terby. p. 290. — Observations des étoiles filantes faites à Rome du 9 au 10 août 1867; par Mme Scarpellini. (Lettre à M. Ad. Quetelet.). p. 295. — Observations des étoiles filantes, faites du 9 au 12 août 1867, à Montcalieri (près de Turin), par M. F. Denza. (Lettre à M. Ad. Quetelet.). p. 297. — Orages des mois d'août et septembre 1867, annotés à l'Observatoire royal de Bruxelles. p. 300. — Orages observées à Louvain, depuis le 19 juillet, exclusivement, jusqu'au 13 septembre 1867, par M. F. Terby. (Lettre à M. Ad. Quetelet.). p. 301. — Mehrere Beobachtungen von Gewittern und Meteoren in Gembloux von Herrn C. Malaise. p. 304.; in Gent von Herrn A.-C. Neyt. p. 305.; in Brüssel von Herrn Marchal. p. 312. — Observations météorologiques horaires, faites à Modène, pendant le solstice d'été de l'année 1867; par M. Ragona. (Lettre à M. Ad. Quetelet.). p. 306. — Théorie nouvelle du mouvement d'un corps libre; par F. Folie. p. 325. Deuxième Partie: Mouvement d'un corps libre dans toute la suite du temps. Troisième Partie: Théorie du mouvement d'un corps géné. — 2°. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. 3°. Application de la méthode aux problèmes dans lesquels on tient compte du frottement. Die erste Abtheilung dieses Memoires s. m. Bulletins, 2me série, tome XX. n°. 8. — Étoiles filantes du milieu de novembre 1867 et état de l'atmosphère à la même époque; par M. Ad. Quetelet. p. 509. — Observations faites à Louvain sur les étoiles filantes de novembre 1867; par M. F. Terby (Lettre à M. Ad. Quetelet.). p. 510. — Listes des orages observées à Louvain pendant le mois d'octobre 1867; par le même. p. 513. — Observations faites, à Moncalier, des étoiles filantes de novembre 1867, par M. Fr. Denza. (Lettre à M. Ad. Quetelet.). p. 513. — Orages observées, à Malines, en 1866 et 1867, par M. Bernaerts. (Lettre M. Ad. Quetelet.). p. 515. — Note sur le pouvoir dispersif de l'air, par M. Ch. Montigny. p. 523

(In astronomischer Rücksicht bemerkt Herr Montigny — was ich hier hervorheben will — dass das Dispersions-Vermögen der Atmosphäre nicht ohne Einfluss ist auf die Bestimmung der Refraction für Sterne von verschiedener Farbe, die in grossen Zenithdistanzen beobachtet werden; er ändert daher die Bradley'sche Refractionsformel für verschiedenfarbige Strahlen in folgender Weise ab:

Rother Strahl: $r = 60'', 263 . \tan(Z - 3{,}25 . r)$,
Gelber „ $r = 60'', 666 . \tan(Z - 3{,}25 . r)$,
Grüner „ $r = 60'', 855 . \tan(Z - 3{,}25 . r)$,
Blauer „ $r = 61'', 101 . \tan(Z - 3{,}25 . r)$.

G.

37me Année, 2me Série. T. XXV. Sur la loi statistique des tailles humaines, et sur la régularité que suit cette loi dans son développement, à chaque âge; par M. Ad. Quetelet. p. 142. — Sur un mémoire concernant la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque; par M. Ph. Gilbert. Rapport de M. Eug. Catalan. (Die Abhandlung wird in den Memoiren der Akademie gedruckt.). p. 184. — Note sur la publication du tome XVIII des Annales de l'observatoire royal de Bruxelles, par M. Ad. Quetelet. p. 187. — Sur l'ensemble de traveaux entrepris par M. Zantedeschi depuis plus de quarante ans, sur les températures terrestres dans les environs de Venise et de Padoue; note par M. Ad. Quetelet. p. 189. — Sur l'âge et l'état civil des mariés, en Belgique, pendant le dernier quart de siècle (1841 à 1865); par M. Ad. Quetelet. p. 227. — Sur quelques propriétés des trajectoires; par M. Ph. Gilbert. p. 288. — Sur la nature de la grêle et les principales circonstances qui accompagnent ce phénomème atmosphérique; par M. l'abbé A. Lecomte. p. 449. — Note sur la scintillation des étoiles; par M. C. Montigny. p. 631. — Sur la division des angles et l'inscriptibilité des polygones; par M. E. Speelman. p. 665.

37me Année, 2me Série. T. XXVI. Sur les phénomènes périodiques en général; par M, Ad. Quetelet. p. 136. — Discussion des observations d'électricité atmosphérique recueillies à Gand, et comparaison entre ces observations et celles faites en d'autres lieux; par M. F. Duprez. p. 144. — Note sur les surfaces orthogonales; par M. E. Catalan. p. 180. — Détermination de la différence de longitude entre les Observatoires de Leyde et de Bruxelles (aux mois d'août et de septembre 1868). Mittheilung von Herrn Ad. Quetelet. p. 262. — Sur les chutes d'aërolithes en 1868; note de M. Ad. Quetelet. p. 265. —

integrandis et speciatim de derivatis Lammatum a C. J. D: Son Hill. — Planet-Observationer, anställda år 1867 på Lunds Observatorium, reducerade och sammanställda af Axel Möller. — Bestämning af Polhöjden för Lunds Observatorium medelst observationer i första vertikalen af A. V. Bäcklund. Diese Abhandlung ist nicht bloss in praktischer Beziehung, sondern auch wegen der in ihr gegebenen theoretischen Entwickelungen über die angewandte Methode, nämlich über die sehr wichtige Methode der Polhöhen-Bestimmung durch Beobachtungen im ersten Vertikal, von Interesse, und verdient als ein Muster für solche Polhöhen-Bestimmungen empfohlen zu werden.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern, aus dem Jahre 1868. Nr. 654—683. Mit einer Tafel. Bern. Huber & Comp. 1869.

Die sehr verdienstlichen Mittheilungen der genannten hochachtbaren Gesellschaft aus dem Jahre 1865 sind im Literar. Ber. Nr. CLXXXXVI. S. 16. angezeigt worden; die Jahrgänge 1866 und 1867 sind uns leider nicht zugegangen; desto mehr beeilen wir uns, den hierher gehörenden Inhalt des so eben an uns gelangten Jahrgangs 1868 nachstehend anzuzeigen.

Perty: Ueber Georg Forster, Cook's Begleiter auf der Entdeckungsreise von 1772—75. — **Perty**: Die Anwendung des Mikroskopes auf die Erkenntniss der Mineralstruktur. S. 25. — **G. Otth**: Ueber eine intermittirende optische Täuschung. S. 70. — **H. Wild**: Ueber die Lichtabsorption der Luft. S. 113. — **E. Granguillet**: Beitrag zur Aufstellung einer allgemeinen Formel für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen. S. 164. — **Schwarzenbach**: Untersuchungen über die Luft in Schulzimmern. S. 226.

Sorgfältig zu beachtende Berichtigung in den Figurentafeln.

Auf Tafel VI., VII., VIII. ist statt „Nr. VIII. Kudelka: Gesetze der Lichtbrechung" zu setzen: „Nr. X. Kudelka: Gesetze der Lichtbrechung."

Literarischer Bericht
CLXXXXIX.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Sopra Pietro Peregrino di Maricourt e la sua epistola De Magnete. Memoria prima del **P. D. Timoteo Bertelli** Barnabita. Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata Nr. 211 A. 1868. 4°. p. 1 bis p. 32.

Sulla Epistola di Pietro Peregrino di Maricourt e sopra alcune Trovati e Teorie magnetiche del secolo XIII. Memoria seconda del **P. D. Timoteo Bertelli** Barnabita. Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata Nr. 211 A. 1868. 4°. p. 1 bis p. 178.

Diese beiden Schriften sind schon früher in dem Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo I., durch dessen Herausgabe sich bekanntlich der Herr Principe B. Boncompagni in Rom so grosse neue Verdienste erwirbt, erschienen und von uns bereits kurz angezeigt worden. Weil wir aber dieselben für die Geschichte der Physik von sehr grosser und ganz besonderer Wichtigkeit halten, so glauben wir die Physiker darauf aufmerksam machen zu müssen, dass dieselben nun auch in besonderen Abdrücken erschienen sind, und als solche einzeln bezogen werden können. Die erste kleinere Abhandlung verbreitet sich sehr ausführlich über das Leben und die Schriften des Pietro Peregrino di Maricourt; dagegen hat die zweite sehr umfangreiche Abhandlung den folgenden Hauptinhalt: **Parte I.** Epistola di Pietro Peregrino

natürlich mit Ausschluss der geometrischen — nicht fehlen, versteht sich von selbst, und eine sehr dankenswerthe Zugabe bilden noch die allen einzelnen Kapiteln in ziemlicher Anzahl beigefügten, überall sehr zweckmässig ausgewählten Uebungsbeispiele. Das ganze Werk, so weit es bis jetzt vorliegt, besteht aus vier Büchern, nämlich: I. Algebraische Analysis. II. Derivations- oder Differentialrechnug. III. Anwendungen der Differentialrechnung (Taylors und Maclaurins Theorem; Unbestimmte Werthe der Functionen; Maxima und Minima; Functionen mit mehreren Variablen, u. s. w.). IV. Unendliche Functionsformen. (Entwickelung der Functionen in Reihen als Anwendung des Taylors'schen und Maclaurin'schen Satzes; Anwendungen der Sätze von Lagrange und Laplace; Unendliche Producte; Kettenbrüche.).

Das treffliche in vielen Beziehungen sehr ausgezeichnete, die weiteste und sorgfältigste Beachtung verdienende Buch ist in dem Kreise, den es beherrschen will, jedenfalls eine Zierde der schwedischen mathematischen Literatur, und lässt auf jeder Seite die grosse Gründlichkeit erkennen, mit welcher in Schweden auf den höheren Lehranstalten der Unterricht in der Analysis ertheilt wird; es würde auch jeder anderen Literatur zur Zierde gereichen, und ist, wie schon gesagt, ein Muster eines guten Lehrbuchs der Analysis nach dem jetzigen Zustande dieser herrlichen Wissenschaft, welches die neuesten strengen Ansichten in derselben in würdigster Weise vertritt, und lässt sehr wünschen, dass es dem Herrn Verfasser — dem wir hier aufrichtigst und herzlichst die Hand drücken — recht bald möglich sein möge, uns mit der jedenfalls zu erwartenden Fortsetzung dieses sehr beachtenswerthen Werkes — welches mit anerkennungswerther Pietät dem trefflichen C. J. Malmstén, jetzt „Statsrådet" und „Landshöfdingen *) i Skaraborgs Län" in „Mariestad" gewidmet ist — zu erfreuen. G.

Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Abiturienten-Prüfungen an preussischen Gymnasien und Realschulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Resultate zu einem Uebungsbuche vereint von H. C. E. Martus, Oberlehrer an der Königstädtischen Realschule in Berlin. Erster Theil:

*) Landeshauptmann.

Aufgaben. Zweite, vermehrte und durch Einführung des Metermasses neu bearbeitete Auflage. Greifswald, 1869. C. A Koch's Verlag. 8°.

Die erste Auflage dieser ausgezeichneten, zugleich von der Trefflichkeit des mathematischen und physikalischen Unterrichts auf den preussischen höheren Lehranstalten das schönste Zeugniss ablegenden Aufgabensammlung ist im „Literarischen Berichte Nr. CLXX. S. 5." ihrer Entstehung und Einrichtung, so wie ihrem Inhalte nach ausführlich von uns angezeigt worden, auf welche Anzeige wir uns daher hier beziehen können, da die frühere Einrichtung mit Recht bei dieser neuen Auflage im Ganzen und Allgemeinen unverändert gelassen worden ist. Dagegen aber hat der Herr Verfasser doch dieser zweiten Auflage im Einzelnen verschiedene Vorzüge vor der ersten verliehen, worüber wir Folgendes uns zu bemerken erlauben. Um die weite Verbreitung bei der nahe bevorstehenden Einführung des Metermasses dem Buche noch ferner zu bewahren, hat der Herr Verfasser — was allerdings sehr viele, und deshalb mit besonderem Danke anzuerkennende Mühe und Arbeit erforderte — die Aufgaben für das neue Mass eingerichtet, insofern und insoweit dies nöthig war, wenn nämlich die betreffenden Zahlen nicht blosse Verhältnisszahlen sind, und also das Mass willkührlich ist. Ausser dieser mühevollen Veränderung bringt die zweite Auflage 134 neue, sehr gut ausgewählte Aufgaben, und mehrere Abschnitte, welche noch eine zu kleine Zahl von Uebungsbeispielen enthielten, sind erweitert worden, namentlich die Goniometrie, die ebene und sphärische Trigonometrie, das Kapitel über Maxima und Minima, besonders aber der Abschnitt aus der Coordinaten-Geometrie und der aus der Mechanik; eilf Aufgaben der ersten Auflage sind gestrichen worden, so dass die Sammlung nun unter 1500 Nummern 1658 Aufgaben enthält. — Wir wünschen dem Herrn Verfasser Glück zu der nach Vorstehendem nicht ohne grosse Mühe möglich gewesenen Vollendung dieser neuen Auflage seines schönen Buches, und sehen dem Erscheinen des die Resultate enthaltenden zweiten Theiles, wo den mit fünfstelligen Logarithmen gewonnenen Resultaten, wenn dieselben in den letzten Decimalstellen eine auffallende Abweichung von den mit siebenstelligen Tafeln gewonnenen zeigen, das Ergebniss in (runden) Klammern sehr zweckmässig beigefügt werden soll.

Möge das Buch in seiner neuen Gestalt fortfahren, zur immer grösseren Verbesserung und Förderung des in jeder Beziehung so wichtigen mathematischen und physikalischen Unterrichts beizutragen!

Anmerkung. Weil in der oben angeführten Nummer des Literarischen Berichts die Anzeige der ersten Auflage der Kürze wegen unter die Rubrik: Arithmetik gestellt worden war, so ist dies auch hier geschehen, wenn die Anzeige auch eben so gut unter die Rubrik Geometrie, hätte gestellt werden können. Das Buch gehört seiner Natur nach unter verschiedene Rubriken, also allerdings eigentlich unter die Rubrik Vermischte Schriften, wohin wir aber Schriften dieser Art nicht gern bringen, weil sie sich dort leicht der allgemeinen Beachtung entziehen. Wir bemerken dies hier ein für alle Mal für künftige ähnliche Fälle. G.

Astronomie.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. apostolischen Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl v. Littrow, Director der Sternwarte. Dritter Folge fünfzehnter Band. Jahrgang 1865. Wien 1869. 8°. S. Literar. Bericht Nr. CLXXXIII. S. 10.

Dieser neue Band der Annalen der k. k. Sternwarte in Wien, welche in der regelmässigsten und ununterbrochensten Folge erscheinen, enthält nach einer Einleitung des verdienten Directors der Sternwarte: Beobachtungen am Meridiankreise aus den Jahren 1862 und 1863, besorgt von Dr. A. Murmann. — Beobachtungen des Mars in Declination um die Zeit der Opposition 1862. Von A. Murmann. — Zonenbeobachtungen am Mittagsrohre. — Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1864. — Tafeln zur Reduction der Zonenbeobachtungen. — Uebersicht der Zonen. — Wir bemerken noch, dass sich dieser neue Band äusserlich vor seinen Vorgängern durch eine sehr schöne, nichts zu wünschen übrig lassende Ausstattung auszeichnet, und wünschen dem hochverdienten Herausgeber den ferneren ununterbrochenen Fortgang dieser höchst verdienstlichen, der Wissenschaft so nützlichen Publication.

Physik.

Tafeln zur Berechnung und Reduction meteorologischer Beobachtungen von Dr. Ludw. Friedr. Kämtz, weil. Kais. Russ. Staatsrath und Akademiker. Dorpat 1868. 4°. In Commission bei F. K. Köhler in Leipzig.

Herr Professor Dr. A. von Oettingen in Dorpat hat sich durch Herausgabe dieser Tafeln eines der Begründer der neueren wissenschaftlichen Meteorologie ein sehr anerkennungswerthes Verdienst erworben. Dieselben sind grösstentheils schon früher in dem von der Kais. russischen geographischen Gesellschaft zu St. Petersburg herausgegeben, von Kämtz redigirten, mit dem 3ten Theile des 3ten Bandes eingegangenen „Repertorium für Meteorologie", sowie auch in einzelnen Seperatabzügen hieraus, erschienen, und hier zu einem Ganzen vereinigt, wodurch den Meteorologen jedenfalls ein wesentlicher Dienst geleistet worden ist. Jeder Tafel ist eine kurze Einleitung vorausgeschickt, und die Einrichtung ist überall so einfach, dass darüber gar nichts zu sagen nöthig ist. Vorzügliche Beachtung verdient jedenfalls die 89 Seiten umfassende Psychrometertafel, welche vorzugsweise auf Kämtz's eigenen Untersuchungen beruhet, worüber Herr von Oettingen in der Vorrede Folgendes mittheilt: „Kämtz hatte viele Jahre hindurch an der Bestimmung der psychrometrischen Elemente und deren Berechnung gearbeitet, und zahlreiche nach allen bisher bekannt gewordenen Methoden angestellte Versuche mit einander verglichen. Einen Theil seiner eigenen Beobachtungen, sowie die Resultate mehrerer anderer Forscher wurden von ihm in übersichtlicher Fassung verwerthet in den „Bemerkungen über Hygrometrie" einem Aufsatze, den man im 2ten Bande des Repertoriums S. 341—361 findet. Die auf S. 337. aufgestellte Formel ist es, die man in der Einleitung zu den vorliegenden Psychrometertafeln auf S. 49 (Zeile 9) wiederfindet. Die Begründung der anderen, auf Temperaturen unter dem Gefrierpunkte angewandten Formel gab der Verfasser im 3ten Bande des Repertoriums S. 49 bis S. 56, — Indem wir das jedenfalls sehr nützliche Werk allen Meteorologen zur Beachtung recht sehr empfehlen, müssen wir uns hier mit der folgenden allgemeinen Inhaltsangabe begnügen: Taf. I. Vergleichung der verschiedenen Thermometerscalen. S. 1. — Taf. II. Verwandlung der Barometerscalen. S. 11. — Taf. III. Reduction der Barometerstände auf die Temperatur des Thaupunkts. S. 21. — Taf. IV. Tafel zur Erleichterung der Rechnung bei Anwendung periodischer Functionen auf

meteorologische Beobachtungen. S. 35. Enthält die Producte der Zahlen mit den Sinus und Cosinus der Vielfachen des Winkels von 15°, ferner Logarithmen von Sinus und Cosinus von 6 zu 6 Minuten, endlich vierstellige Logarithmen (logarithmisch und antilogarithmisch). —). Taf. V. Psychrometertafeln S. 49.: Einleitung, Tafel für das hunderttheilige Thermometer und Millimeter, Tafel für das Réaumur'sche Thermometer und Pariser Linien, Tafel für das Fahrenheit'sche Thermometer und englische Zoll G.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von C. Jelinek und J. Hann. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXXVIII. S. 8).

Band IV. Nr. 12. Diese Nummer enthält ausser verschiedenen interessanten kleineren Mittheilungen und Literaturberichten die Beschreibung zweier neueren meteorologischen Instrumente von interessanter Einrichtung, auf welche wir unsere Leser aufmerksam machen, nämlich: Ueber das Minimum- und Maximum-Thermometer von Hermann und Pfister in Bern. Von Professor Dr. R. Wolf (in Zürich). S. 305. — Das Tiefen-Thermometer von Henry Johnson. Nach dem Report of the British Association for 1861. S. 309. G.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Vergl. Literarischer Ber. Nr. CLXXXXV. S. 14.

Band LVII. Heft IV. Unferdinger: Ueber die beiden Integrale

$$\int e^{\sin x}\cos(nx-\cos x)dx\,,\quad \int e^{\sin x}\sin(nx-\cos x)\,dx.$$

S. 611. — Derselbe: Ueber den Werth des Ausdrucks

$$\frac{1}{(m+\delta)^2}+\frac{1}{(m+2\delta)^2}+\frac{1}{(m+3\delta)^2}+\cdots+\frac{1}{[m+m(n-1)\delta]^2}$$

für $m=\infty$ und über das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. S. 621. — Derselbe: Die allgemeinen Formeln für die Summe der Winkel eines Polygons. (Mit 1 Tafel.). S. 633. — Niemtschik: Directe Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, [illegible] zu einer Axe senkrechte Schnitte ähnliche Ellipsen sind. (Mit 1 Tafel.). S. 678. — Stefan: Anwendung der Schwingungen

zusammengesetzter Stäbe zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit. S. 697. — Ditscheiner: Ueber die durch planparallele Krystallplatten hervorgerufenen Talbot'schen Interferenzstreifen. (Mit 1 Tafel.). S. 709.

Band LVII. Heft V. Hann: Die Temperatur-Abnahme mit der Höhe als eine Function der Windesrichtung. (Mit 1 Tafel). S. 740.

Band LVIII. Heft I. Loschmidt: Ableitung des Potentiales bewegter elektrischer Massen aus dem Potentiale für den Ruhezustand. (Mit 1 Holzschnitt). S. 7. — Ditscheiner: Ueber eine Anwendung des Spectralapparates zur optischen Untersuchung der Krystalle. (Mit 2 Holzschnitten). S. 15. — Unferdinger: Ueber einige merkwürdige Formeln der sphärischen Trigonometrie. S. 30. — Matzek: Beitrag zur Construction von Berührungsebenen an Rotationsflächen. (Mit 1 Tafel). S. 44. — Derselbe: Construction der Curven bestimmter Beleuchtungsintensität an Rotationsflächen mit Benützung berührender Kugelflächen. (Mit 1 Tafel). S. 49. — Boltzmann: Ueber die Integrale linearer Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten. S. 54. — Weyr: Die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades und confocale Systeme solcher Flächen. S. 60.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akádemie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde, Tweede Reeks. Tweede Deel. Amsterdam. C. G. Van der Post. 1868. 8°.

Den ersten Theil der zweiten Reihe dieser „Verslagen en Mededeelingen" der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Amsterdam haben wir im Literar. Ber. Nr. CLXXXII. S. 15. angezeigt, und freuen uns, jetzt diesen zweiten Theil der zweiten Reihe anzeigen zu können, welcher eben so wie jener erste Theil wieder mehrere in den Kreis des Archivs gehörende sehr werthvolle Abhandlungen enthält, die der sorgfältigsten Beachtung zu empfehlen sind, so wie es überhaupt sehr zu wünschen ist, dass die holländische mathematische und physikalische Literatur — namentlich auch in Deutschland — mehr Beachtung finde, als dies bis jetzt der Fall zu sein scheint. Der hierher gehörende Inhalt dieses zweiten Theils ist der folgende: J. Badon Ghyben: Beschouwing van den regelmatigen 257-hoek. p. 1. (Diese sehr lesens- und beachtenswerthe Abhandlung ist als Fortsetzung der Abhandlung desselben Herrn Verfassers über die regelmässigen

Vielecke in Tweede Reeks. Eerste Deel. p. 293. zu betrachten; m. s. Literar. Ber. Nr. CLXXXII. S. 15.). — J. W. Ermerins: Over de dagelijksche beweging van den Barometer te Groningen, opgemaakt uit de aanwijzingen van de Barograaph van December 1851 tot November 1861. (Met eene Plaat). p. 101. — M. Hoek: Détermination de la vitesse, avec laquelle est entrainée une onde lumineuse traversant un milieu en mouvement (Avec une Planche). p. 189. — M. Hoek: Sur les prismes achromatiques construits avec une seule substance (Avec une Planche). p. 195. (Beide Abhandlungen für Optik sehr beachtenswerth). — F. Kaiser: Ueber einen neuen Apparat zur absoluten Bestimmung von persönlichen Fehlern bei astronomischen Beobachtungen. p. 216. (In vielfacher Beziehung sehr interessant und beachtenswerth bei der grossen Wichtigkeit der Bestimmung der sogenannten persönlichen Gleichungen). — Dr. H. van Blanken (mitgetheilt von Herrn R. van Rees): Eenige opmerkingen over de beweging van Kometen. p. 321. (Beachtenswerthe Bemerkungen zur Theorie der parabolischen Bewegung der Kometen). — J. Badon Ghyben: Over eene bijzondere eigenschap van evenwijdige krachten, wier som nul is. p. 327. (Für die Statik beachtenswerth.). — Dieser Theil enthält endlich auch p. 349. den von uns im Archiv Thl. XLIX. S. 81. mitgetheilten für die Geschichte der Astronomie sehr wichtigen „Rapport".

Literarischer Bericht
CC.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Gérard Mercator oder Gerhard Mercator?

Der berühmte Geograph und Mathematiker Mercator
ein Flamänder oder ein Deutscher?

Von

dem Herausgeber.

Der mit Recht berühmte Geograph und Mathematiker Mercator*), der Erfinder der verbesserten Seekarten oder der sogenannten Karten mit wachsenden Breiten**), hat bis jetzt Jahr-

*) Kaufmann oder Kremer.

**) Die strenge mathematische Theorie dieser Karten und ihrer Anwendung in der Nautik findet man auf der Basis der Lehren der höheren Mathematik — die hier nicht wohl zu umgehen sind, wenn ohne zu grosse Weitläufigkeit den Forderungen wirklicher mathematischer Strenge vollständig entsprochen werden soll — ausführlich entwickelt in meinem Buche: „Loxodromische Trigonometrie. Leipzig. 1849. 8°.“ von welchem der ausgezeichnete französische Hydrograph, Herr Professor Terquem in Dünkirchen, eine mit ausgezeichneten Zusätzen und weiteren Ausführungen versehene französische Uebersetzung unter dem Titel: „Éléments de Trigonométrie loxodromique suivis d'applications à la navigation d'après M. J.-A. Grunert, par M. Terquem. Dunkerque. Typographie Benjamin Kien, rue nationale. 1859. 8°. herausgegeben hat.

Beiläufig bemerke ich hier noch, dass neben Mercator sehr oft noch der Engländer Eduard Wright und dessen Schrift: „Certain Errors in Navigation detected and corrected. London. 1657

hunderte lang immer und ganz unangefochten für einen Flamänder gegolten, und Belgien ist — wie auf Simon Stevin und andere berühmte Männer dieses Landes — mit Recht auch auf diesen trefflichen Gelehrten von jeher ganz besonders stolz gewesen. Nun ist aber so eben die nachstehende Schrift erschienen:

Gerhard Kremer gen. Mercator, der deutsche Geograph. Vortrag von Dr. Breusing, Direktor der Steuermannsschule in Bremen, gehalten zu Duisburg am 30. März 1869. Der Reinertrag ist bestimmt für das in Duisburg projektirte Denkmal Mercators*). Duisburg, 1869. Commissions-Verlag von F. H. Nieten. 8°.

welche nichts Geringeres bezweckt, als den Belgiern ihren berühmten Landsmann zu entführen und als einen Deutschen hinzustellen.

Nun der Unterzeichnete hält wahrlich das deutsche Nationalgefühl hoch wie irgend Einer, und glaubt sich selbst dasselbe beimessen zu dürfen wie wenige Andere! aber in wissenschaftlicher Rücksicht ist er von jeher Kosmopolit gewesen im weitesten Sinne des Worts, und ist es noch; aus diesem Gesichtspunkte muss er aber denn doch offen bekennen, dass er durch die mit einer gewissen gemüthlichen Breite verfasste Schrift des Herrn Breusing, und die darin erzählten — bis jetzt noch nicht durch irgend welche bestimmte literarische Nachweisungen verbürgten — Geschichten noch keineswegs die Ueberzeugung gewonnen hat, dass von Dato an die Geschichte der Mathematik, Geographie und Nautik — ohne jede zu erwartende Widerrede — in ihren Annalen Mercator als einen Deutschen zu verzeichnen haben und wirklich verzeichnen wird, so sehr und so aufrichtig er dies auch im eigenen Interesse wünschen möchte. In solcher gemüthlicher Weise — wie in der vorliegenden Schrift — schreibt man jetzt nicht mehr

---

(nach J. J. Littrow in dessen Chorographie. Wien. 1833. S. 6.) genannt wird, aber gewiss mit Unrecht, wie schon Herr A. Germain, Ingénieur hydrographe de la marine, in seinem ausgezeichneten Werke: „Traité des projections des cartes géographiques. Paris" (ohne Jahreszahl, aber erst ganz neuerlich erschienen) p. 206. bemerkt und nachgewiesen hat.

*) Der Grundstein zu diesem Denkmal — über dessen Errichtung man sich natürlich nur freuen kann, wo es auch stehen mag — soll am 3. August d. J. gelegt werden. In einer besonderen Beilage zu dieser Schrift werden von einem Comité die Deutschen aufgefordert, durch reichliche Beiträge die dereinstige Errichtung des Denkmals zu ermöglichen.

Geschichte der Mathematik u. s. w., wie Jeder weiss, der mit den neueren Leistungen auf diesem Gebiete nur einigermassen bekannt ist, und namentlich von den grossartigen Forschungen und Bestrebungen Boncompagni's auf demselben eine auch nur ganz oberflächliche Kenntniss besitzt *).

Der Unterzeichnete hat — abgesehen von einigen kurzen Bemerkungen am Ende dieses Aufsatzes — keineswegs die Absicht, mit Herrn Breusing sich hier in eine Polemik einzulassen, und lehnt dieselbe auch für die Folge von vorn herein ab, weil dazu diese Blätter keinen Raum haben und nicht bestimmt sind; sehr auffallend aber ist es ihm gewesen, dass Herr Breusing — wenigstens nach dem Ausweis der vorliegenden Schrift — von den beiden folgenden wichtigen, einem Jeden sehr leicht zugänglichen, trefflichen und ausgezeichneten Werken — ob absichtlich oder unabsichtlich, wissen wir nicht — nicht die geringste Notiz genommen zu haben scheint, was jedenfalls nicht gebilligt werden kann und darf:

Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges; par Ad. Quetelet, Directeur de l'observatoire Royal de Bruxelles, etc. etc. Bruxelles, M. Hayez, imprimeur de l'Académie Royale. 1864. 8°.

Sciences mathématiques et physiques chez les Belges, au commencement du XIXe siècle, par Ad. Quetelet, Directeur de l'observatoire Royal de Bruxelles etc. etc. Bruxelles, H. Thiry-van Buggenhoudt, imprimeur-éditeur. 1866. 8°.

Lediglich **im Interesse der historischen Wahrheit und der Gerechtigkeit** halten wir es daher für angemessen und uns dazu gewissermassen verpflichtet, unseren Lesern im Nachstehenden die ausführliche und überaus interessante Darstellung mitzutheilen, welche Herr Ad. Quetelet in dem ersteren der beiden genannten Werke von pag. 110 an in elegantester Sprache über Gérard Mercator gegeben hat, anschliessend zugleich Dasjenige, was über den zu demselben in näherer Beziehung stehen-

*) Gern übrigens wollen wir hierbei in Anschlag zu bringen nicht unterlassen, dass die vorliegende Schrift ein vor einer gemischten Versammlung gehaltener, also mehr populärer Vortrag ist und sein soll; wenn aber dieselbe den Zweck hat, die Reclamirung Mercators als Deutschen historisch zu begründen und zu rechtfertigen: so glaubten wir in der wohlgemeintesten Absicht doch zu einiger Vorsicht mahnen und vor Uebereilung warnen zu müssen!

den berühmten flamändischen Geographen Ludocus Hondius von ihm beigebracht worden ist. Herr Ad. Quetelet sagt:

„A la suite du règne de Charles-Quint, l'étude de la géographie, sur laquelle ce puissant souverain appelait l'attention de ses compatriotes, avait pris un développement remarquable; elle formera à jamais l'un des fleurons les plus brillants de la couronne scientifique de la Belgique. Les différents peuples, aujourd'hui encore, rendent un hommage mérité aux hommes illustres qui firent partie de la grande école dont le prince, dans des temps meilleurs, avait encouragé les premiers travaux.

Parmi ceux qui se distinguèrent le plus, il convient de placer en première ligne les géographes Mercator et Ortelius, dont les noms font honneur à la Belgique. Charles-Quint leur avait, en plus d'une occasion, donné des témoignages de sa haute estime et de l'admiration qu'il professait pour leur talents.

Gérard Mercator était né le 5 mars 1512, à Rupelmonde*), sur les bords de l'Escaut. Il commença ses études à Bois-le-Duc et de là il passa à Louvain, où il cultiva les mathématiques avec tant d'ardeur qu'il oublia, pour le travail, la nourriture et le sommeil. Il eut pour maître Gemma Frisius **), dont il sut mettre à profit les savantes leçons: il s'établit ensuite à Anvers, et fit lui-même plusieurs de ses instruments de mathématiques. Il construisit des sphères et donna tous ses soins au dessin de ses cartes. Il ne se montra pas moins habile dans la construction des objets d'art: on citait même des ouvrages de ciselure travaillés avec soin et qu'il avait exécutés de ses propres mains. Il aimait aussi cet art fameux qui, vers la fin de ses jours, prit tant de puissance sous les pinceaux de Rubens et de l'école célèbre que forma ce grand peintre. Quoique n'habitant plus sa

---

*) *La Biographie de Michaud* écrit avec raison Rupelmonde, qui se trouve entre Anvers et Gand, „et non pas Ruremonde, comme le disent Moréri et les biographes qui l'ont suivi sans examen."

**) Auf p. 83. sagt Herr Quetelet von Gemma Frisius: „Il jouissait d'une grande réputation et il était souvent appelé à la cour de Bruxelles. Il a le merite d'avoir été le maitre de Mercator und auf p. 88: „Gemma ne s'est pas distingué seulement par ses ouvrages, il s'est fait estimer encore par les nombreux élèves qu'il a formés et qui lui ont conservé une reconnaissance qui prouve en faveur de ses talents: nous avons déjà cité en premier lieu le célèbre géographe Gérard Mercator".

patrie vers la fin de sa carriére, Mercator avait pris goût aux mœurs et aux habitudes de ses concitoyens, comme on vit, d'une autre part, le chef de l'école de la peinture flamande payer également son tribut à la science qui avait pris, autour de lui, une extension considérable.

A l'âge de vingt-quatre ans, Mercator s'était marié à Louvain *). Ses premiers soins s'étaient tournés vers la construction de cartes de la terre sainte. Il entreprit aussi, à la demande de plusieurs de ses amis, la description de la Flandre. En 1541, il publia un globe terrestre qui obtint un grand succès; il le reproduisit en 1551, et l'année suivante il publia son ouvrage *De Usu annuli astronomici.*

Peu de temps après, il voulut revoir sa ville natale, qui était peu distante d'Anvers: il s'y transporta avec toute sa famille; mais sans perdre de vue l'objet de ses études et ses travaux habituels. A son retour, il présenta à l'Empereur quelques instruments et des ouvrages de sa composition, qui furent accueillis avec bienveillance.

Quoi de plus touchant, en même temps, que de voir Gérard Mercator qui avait paru, avant Abraham Ortelius, son jeune rival, vouloir procurer à ce dernier l'avantage de réussir comme lui et d'assurer son existence? Il suspendit l'impression de son grand ouvrage qui était terminé, pour ne pas nuire au succès de son jeune ami: tous deux professaient, l'un pour l'autre, la plus tendre amitié. *Mathematicorum sui temporis facile princeps et geographorum nostri seculi coryphaeon*, disait Ortelius, en parlant de son ami, qui ne le traitait pas avec moins d'estime.

C'est en 1554 que Mercator acheva la description de l'Europe, déjà commencée avant son départ de Louvain. Il revit cet ouvrage avec la plus grande activité et le reproduisit avec succès en 1572.

Déjà depuis 1559, par suite des troubles qui régnaient dans les Pays-Bas et des dangers auxquels il avait été exposé, Mer.

---

*) Il s'était marié avec Barbette Schelleken, dont il eut trois fils et trois filles. L'un de ses fils, Bartholomaeus Mercator, naquit á Louvain en 1540, et mourut en 1568, à l'âge de vingt-huit ans. Il écrivit fort jeune encore un ouvrage qui fut imprimé à Cologne, en 1563, sous le titre: *Notae in sphaeram, geographiae, astronomiae rudimenta suggerentes;* in-8°.

cator avait pris le parti de se retirer à Duysbourg, sur les bords du Rhin, et d'y continuer ses travaux dans le calme qui lui était nécessaire *).

---

*) Dans un ouvrage publié récemment sous le titre d'*Archives des arts, sciences et lettres*, par M. Alexandre Pinchart, 2 vol. in 8°, Gand, 1860, on lit quelques détails sur une détention que le célèbre géographe Gérard Mercator aurait subie, et dont on ne trouve aucune mention dans les écrits de cette époque. „Au commencement de cette année (1544)," est-il dit page 27, tome Ier, „le procureur général de Brabant avait été chargé d'aller à Louvain dresser information contre plusieurs personnes soupçonnées d'adhérer aux religions nouvelles de Luther et de Calvin. Presque en même temps Gérard Mercator, qui habitait cette ville, s'en était absenté et s'était rendu dans le pays de Waes. Il fut vraisemblablement dénoncé à l'inquisiteur, car le bailli de ce pays l'arrêta et le conduisit, par ordre de Marie, reine douairière de Hongrie et gouvernante des Pays-Bas, au château de Rupelmonde. Cette ville était le lieu même où notre savant avait vu le jour. A la nouvelle de son emprisonnement, sa femme courtchez Pierre de Corte, curé de l'église Saint-Pierre, sa paroisse, lui raconte ce qui vient d'arriver, et lui dit que son mari était parti de Louvain à propos de la succession d'un de ses oncles. Le curé délivra à l'épouse de Mercator un certificat en règle, attestant qu'il le connaissait pour jouir d'une bonne réputation et mener une vie honorable sous tous les rapports. La pauvre femme crut qu'il suffisait de faire parvenir au bailli de Waes le témoignage de son curé pour obtenir la liberté de son mari. Elle se trompait. Le bailli envoya la pièce à la gouvernante pour avoir son avis. Celle-ci fit aussitôt écrire à Pierre de Corte, pour le réprimander d'avoir donné un semblable certificat en faveur de Mercator, que l'on soupçonnait fort d'être hérétique, et qui avait été arrêté comme tel, ce qui lui paraissait une chose tout à fait singulière; en outre, elle lui intima l'ordre, au nom de l'Empereur, de déclarer les motifs qui l'avaient engagé à agir ainsi, et de dire s'il connaissait à la charge du prisonnier des faits d'où l'on pût induire que Mercator était partisan de quelque secte. Le curé de Saint-Pierre ne se laissa pas intimider par une telle missive: il répondit à la reine Marie qu'il savait que Gérard Mercator s'absentait souvent de chez lui à cause de son genre de travaux, qui nécessitaient de sa part de fréquents déplacements; que, très-peu de temps auparavant, il avait été mandé en Flandre par l'abbé de Saint-Pierre et par le prévôt de Saint-Bavon à Gand, pour lever le plan de certaines terres à propos desquelles il y avait contestation entre eux. Il ajoutait enfin qu'en 1549, lorsque Philippe II était venu aux Pays-Bas, notre géographe s'était rendu chez les évêques de Valence et d'Arras pour différents travaux artistiques. Il semble de plus, par la tournure que prit alors l'affaire, qu'à la réception de cette lettre, le curé de Corte ait averti l'abbé de Sainte-

En 1568 avait paru sa chronologie depuis l'origine du monde. Cet ouvrage considérable se compose de plus de 340 pages in-folio; il renferme l'indication des principaux événements du monde depuis sa création présumée. Un texte assez considérable précède ce travail; on y trouve une série de tableaux marquant, pour les principaux États, la succession des princes et des hommes distingués, des événements astronomiques et tout ce qui peut marquer l'ordre des temps. Cet immense recueil fut publié quelques années avant la réforme grégorienne, qui se fit en octobre 1582. On conçoit l'utilité dont il fut alors et en même temps l'importance qu'il a perdue depuis cette époque. Mercator entreprit ensuite de revoir les tables de Ptolémée et de corriger les fautes nombreuses que renfermait cet ouvrage. Il s'était déjà occupé avec soin du travail spécial qu'il se proposait de publier

---

Gertrude, en sa qualité de conservateur des priviléges de l'université de Louvain, de l'atteinte portée à ses priviléges par l'arrestation de Mercator, qui était suppôt de l'université, c'est-à-dire dépendant de la juridiction qu'exerçait ce corps. L'abbé de Sainte-Gertrude s'adressa immédiatement au bailli de Waes pour le faire relâcher. Le bailli en référa à la gouvernante, qui écrivit à l'abbé pour l'avertir que l'individu dont il réclamait la mise en liberté avait été poursuivi par le procureur général de Brabant, comme fortement suspect de luthéranisme; qu'il s'était enfui de Louvain pour éviter d'être arrêté, et qu'il avait perdu par ce fait le bénéfice des priviléges de l'université; elle lui enjoignait de cesser des poursuites dans ce sens contre le bailli de Waes pour obtenir la restitution du prisonnier, et ajoutait qu'il n'eût à opposer aucun obstacle à la marche de la procédure, s'il ne voulait pas la mettre dans la nécessité de sévir contre lui et de dresser une information à sa charge.

„L'instruction du procès de Mercator fut longue. Adhérer aux idées de la réforme était un crime que l'on punissait alors du bûcher ou de la perte de la tête, après avoir employé mille tortures dans le but d'obtenir un aveu, quand les preuves de culpabilité n'étaient pas suffisantes pour condamner un malheureux, souvent victime d'une infâme dénonciation et d'une vengeance personnelle ..... Mercator fut très-probablement relâché, après quelque temps de séjour encore sous les voûtes humides du château de Rupelmonde."

D'après ces témoignages, il serait difficile de refuser de croire que Gérard Mercator ait été en effet l'objet de poursuites judiciaires; nous pensons toutefois qu'elles furent bien moins graves qu'il ne fut dit. Ce n'est, du reste, qu'à la suite de la mort de Charles-Quint que Mercator, en 1559, prit le parti d'aller vivre à Duysbourg, sur la frontière d'Allemagne, quoiqu'il continuât toujours de publier ses travaux scientifiques à Anvers.

sur la géographie; mais nous avons fait connaître le motif honorable qui l'empêchait de mettre au jour ses propres ouvrages, dans la crainte de nuire au livre que venait de publier son ami Ortelius *).

Il travaillait avec lenteur, mais avec persévérance, à sa grande composition, qui devait renfermer l'ensemble de ses ouvrages; son âge avancé rendait en effet sa marche intellectuelle plus difficile. En 1592, il publia *Harmonie évangélique*, avant le commencement des troubles de la Germanie. Ses idées, à la fin de son existence, s'étaient portées, comme celles du grand Newton, vers les spéculations religieuses. Il est également auteur de quelques autres ouvrages qui se rapportent aux connaissances ascétiques.

Sa femme si douce, si vertueuse, le précéda dans la tombe; elle mourut en 1586, après plus de cinquante années de mariage. On pourra s'étonner de voir cet homme grave et sévère songer encore à un nouvel hymen vers la fin de son existence. Mais ce changement lui devint fatal, car il mourut peu de temps après, à l'âge de plus de quatre-vingt-deux ans **).

„Mercator fit remarquer le premier qu'il fallait étendre les degrés des méridiens d'autant plus qu'on s'éloignait davantage de l'équateur," dit Montucla ***). On lit, d'une autre part, dans l'*Essai sur l'Histoire générale des mathématiques*, par Bossut †): „En bornant toujours l'usage des cartes plates à représenter de petites étendues de terrain, on pouvait éviter l'inconvénient qu'elles ont d'exprimer, par des lignes égales, les degrés des deux cer-

---

*) Voici les principaux ouvrages de Mercator:

Globi terrestris sculptura 1541 et 1551;

De Usu annuli astronomici. Lov., 1552. Gemma, en 1548, avait publié un ouvrage sur le même sujet;

Chronologia, hoc est temporum demonstratio exactissima, a mundi exordio ad ann. 1568. Coloniae, 1569, in-fol.;

Tabulae geographicae ad mentem Ptolemaei restitutae 1578, in-fol.

Harmonia evangelistarum: adv. Carol. Molinaeum, 1592. Duysbourg, in-4°;

Tabulae ac descriptiones geographiae, quas postea Atlantem inscripsit, cui praemisit librum: *De Creatione ac fabricâ mundi*, 1595.

**) Il mourut à Duysbourg, le 2 décembre 1594.

***) Montucla, tome II, page 651.

†) Bossut, tome Ier, page 362.

cles parallèles qui terminent la carte nord et sud et donner la proportion convenable aux expressions de ces degrés. Gérard Mercator, géographe des Pays-Bas, en fit la remarque, qui est d'ailleurs fort simple et fort élémentaire. Édouard Wright, le même dont il reste des observations astronomiques parmi celles de Horoccius, développa l'idée de Mercator, ou plutôt envisagea la question sous un nouveau point de vue. „Ce fut en 1569 que parut la première carte hydrographique dressée suivant la projection à laquelle on a conservé son nom.

Judocus Hondius, qui fut en quelque sorte le continuateur de Mercator, était né en 1546, à Waeken, dans les Flandres; il se distingua de bonne heure par des dispositions extraordinaires pour les arts du dessin. Les troubles de sa patrie le portèrent à se réfugier en Angleterre: plus tard, il alla s'établir à Amsterdam et s'y fit connaître par ses talents pour la construction des cartes géographiques. Il publia, sous le titre d'*Atlas minor*, in-4° oblong, un abrégé qui a été réimprimé souvent; on lui doit encore plusieurs autres ouvrages sur la géographie *). Il mit au jour, en 1597, en langue hollandaise, un traité de la *Construction des globes* où il fit preuve de mérite, et il s'occupa avec un égal succès de l'hydrographie de l'univers. C'est en 1602 qu'il fit paraître à Amsterdam une édition in-folio, plus étendue de l'atlas de Gérard Mercator qui eut plusieurs éditions successives. Il y ajouta différentes cartes qui y manquaient encore, et y introduisit des changements assez notables. L'ouvrage parut sous le titre: *Gerardi Mercatoris Atlas, sive Cosmographicae meditationes de fabricâ mundi et fabricati figurâ.* Foppens le loue peut-être avec excès en le désignant comme *celeberrimis aliarum aetatum, tum in Batavià tum apud Europaeos omnes, cosmographicis aequiparandus.* Montucla dit de notre géographe, dans le tome II, page 335 de son *Histoire des Mathématiques*: „Peirese, voulant faire servir les satellites de Jupiter à la détermination des longitudes, en écrivit à Hondius, géographe *hollandais* de réputation."

Pierre Montanus de Gand, qui passa en Hollande, aida Hon-

*) Il mourut à Amsterdam le 16 février 1611, et laissa trois fils: l'un, dit le *vieux*, naquit à Gand, en 1573, et fut un graveur distingué; l'autre, Henri Hondius, dit le *jeune*, fut supérieur en talent à son frère; on lui doit un grand nombre de gravures et un ouvrage flamand qui fut traduit en français sous le titre d'*Institution en la perspective*, 1625. Le troisième fils, Guillaume Hondius, se distingua également comme graveur.

dius à publier son *Atlas de Mercator*: il fit paraître en 1612 une excellente description de la Belgique, format in-folio. Foppens, page 993, la rapporte à cette année, et Valère André à 1617; mais c'étaient probablement des éditions in-folio différentes.

Dans la préface de leur édition de Mercator, Hondius dit, en parlant de Montanus: *Iis vero gravi ratione ducti descriptiones alias, aliâ methodo satis ut nobis quidem videtur artificiosâ, adjunximus. Eae autem affini meo Petro Montano viro (absit verbo invidia) cum docto et pio, tum in labore indefesso, debentur*: par *affinis meus* entend-il un parent ou simplement un collaborateur?

On trouve, à la page suivante de l'introduction, des vers grecs et latins qui, selon l'usage du temps, sont adressés par leur compatriote, le fameux Daniel Heinsius de Gand, à Pierre Montanus: *In Gerardi Mercatoris Flandri atlantem, labore Petri Montani, diligentiâ et sumptu Judoci Hondii recenter editum.* Cette inscription semblerait faire entendre que la partie scientifique est plutôt due à Montanus et que Hondius remplissait les fonctions d'éditeur *).

Quoi qu'il en soit, l'introduction que Hondius a placée en tête de l'édition de 1602 et qui porte une date postérieure, est écrite d'une manière très-convenable: il a tâché, avec son collaborateur Montanus, de remplir les lacunes qui se présentaient dans le grand ouvrage de Mercator, et spécialement pour l'Espagne et quelques parties de l'Asie, de l'Afrique et de l'Amérique; il le met au-dessus de tous les autres ouvrages connus; il n'en excepte pas même le grand ouvrage d'Ortelius. Mercator ne manque jamais, dit-il, de donner avec la précision désirable les longitudes et les latitudes des lieux qu'il désigne sur ses cartes;

---

*) Voici les mots que l'on trouve dans la préface de l'édition in-4° qui parut en 1627: *Quocirca plurimum laudandi illi sunt, qui in hâc arte desudarunt; inter quos Abrahamus Ortelius, Daniel Cellarius, Anthonius Maginus, Paulus Merula, Petrus Bertius, alique: sed imprimis omnium doctissimus mathematicus Gerardus Mercator; quamvis morte praepeditus geographicum opus suum (cui Atlantis nomen indidit) ad finem perducere non potuit. At Judocus Hondius hunc defectum supplevit, adjectis non solum iis tabulis quae ad operis fastigium desiderari videbantur, sed etiam accuratis eorum descriptionibus, opera et studio Petri Montani elaboratis.*

notions qui se trouvent généralement négligées sur toutes les cartes de cette époque *).

Dans une autre préface, en tête de la partie qui concerne l'Afrique et l'Asie, page 33, Hondius s'exprime encore avec les mêmes éloges à l'égard des travaux qu'il présente au public: *Ne tamen illi injuriam fecisse videamur*, dit il, *ipsius intactas reliquimus, nostrasque vel subjunximus, vel suis particularibus tabulis a nobis delineatis praeposuimus; ut ita et illius honori et lectoris utilitati esset consultum, cui non ingratum nostrum laborem speramus fore.* Il y a de la délicatesse dans la manière de procéder de Hondius et de l'estime pour son illustre compatriote.

Jede Polemik — wie schon gesagt — ablehnend, schliessen wir mit den folgenden kurzen Bemerkungen.

Die in der vorliegenden Schrift erzählten Geschichten sind bis jetzt fast nirgends literarisch verbürgt. — Worauf der Herr Verfasser besonderen Werth legt, und eigentlich das Einzige oder wenigstens Vorzüglichste, was zum Beweise der Richtigkeit seiner Ansichten dienen könnte, sind die auf S. 5. mitgetheilten eigenen Worte Mercators: „Obwohl ich in Flandern **geboren** bin, so sind doch die Herzoge von Jülich meine angestammten Herren, denn unter ihrem Schutze bin ich im Jülicher Lande und von Jülichschen Eltern **erzeugt** und erzogen". Aber — ganz abgesehen von der jedenfalls absichtlich gesuchten und herbeigezogenen, in der That etwas komisch sich ausnehmenden Entgegensetzung der Worte **geboren** und **erzeugt** — erkennt doch wohl Jeder auf den ersten Blick,

---

*) En tandem promissus Atlas prodit integer: opus felicissimè quidem a doctistimo V. G. Mercatore inchoatum, a nobis autem nunc, Deo juvante, ad finem perductum. Nos enim omnem adhibuimus diligentiam, ut reliqua omnia quae ad fastigium huic operi imponendum desiderabantur, quam accuratissimè adjungerentur. Flagitabat enim operis hujus dignitas, ut non solum Europam integram (cui deerat Hispania) daremus: sed etiam reliquas orbis partes, Africam scilicet, Asiam et Americam ad Europam adjungeremus. Difficillimum sane nobis fuit in tantâ tabularum Hispaniae penuriâ quidquam boni et certi in vulgus edere ..... quamobrem licet Gerardus Mercator vir doctissimus etiamnum superstes esset, neque sibi, neque aliis simili modo hic satisfacere posset, nos certè pro virili in hisce partibus describendis, probatissimos quosque auctores sequuti, nostrum laborem geographiae candidatis non ingratum fore speramus. Potuisset Mercator haec felicius fateor. Quis enim hujus accuratas descriptiones, diligentiam, curam et judicium imitabitur? Quam nitidè, quam eleganter, quam accuratè, quam ad amussim, quanto judicio quidvis fecit! Laudatur non immeritò Speculum orbis a Gerardo de Judaeis editum: laudatur viri diligentissimi Abrahami Ortelii Theatrum: Laudantur et aliorum non contemnenda opera. Sed si cum Mercatoris opere conferas, longè huic postponenda quivis vel mediocriter doctus judicabit. In illorum enim tabulis desunt plerumquè longitudinis latitudinisque gradus: imo et ubi habentur, sine mensurâ certâ et ordine additi. Omitto et alia in quibus auctorum negligentiâ, vel directoris inscitiâ peccatum ...

dass, wenn er sagt: „die Herzoge von Jülich seien seine angestammten Herren, weil er unter deren Schutze im Jülichschen Lande und von Jülichschen Eltern **erzeugt** worden sei", Dies hier in der lateinisch verfassten „**Widmung**" seiner „Tabulae Galliae et Germaniae" (doch wohl an die genannten Herren? was freilich der Herr Verfasser nicht besonders bemerkt) nichts mehr und nichts weniger als eine blosse Courtoisie ist und sein soll. — Ferner steht so viel fest, dass Mercator in Rupelmonde, welches in Ostflandern zwischen Antwerpen und Gent liegt, geboren ist, und am Ende kann doch nur der Geburtsort über die Landsmannschaft entscheiden. — Dann scheint aber der Herr Verfasser hauptsächlich ganz übersehen zu haben, dass Mercator an der Spitze der berühmten grossen flandrischen Geographenschule steht, welche der Anregung Kaiser Karl V lediglich ihre Entstehung verdankt, und zu der ausser Mercator Männer wie Judocus Hondius aus Waeken, Pierre Montanus aus Gent, Abraham Ortelius aus Antwerpen, Arnoldus Mylius aus Vryemoersheim, Michel Coignet aus Antwerpen, Cornelius Jode eben da her, u. s. w gehörten. — Mercators langen Aufen*thalts* in Antwerpen gedenkt der Herr Verfasser gar nicht; seinen Aufenthalt in Duisburg zu nehmen, was erst im Jahre 1559, also in seinem 47. Lebensjahre geschah, ward Mercator nur durch die Unruhen in den Niederlanden veranlasst oder vielmehr genöthigt, um dort ruhiger seinen wissenschaftlichen Arbeiten leben zu können, und er kam daher in der That sehr unfreiwillig und nur nothgedrungen dorthin, sein dortiger Aufenthalt ist deshalb als ein rein zufälliger durch die Zeitumstände ihm leider aufgenöthigter zu betrachten, so wie denn sehr viele wissenschaftliche Männer in den Niederlanden aus gleichen Gründen in jener Zeit ihr Vaterland zeitweilig zu verlassen genöthigt waren, was Herr Quetelet an verschiedenen Beispielen nachgewiesen hat (s. oben Hondius).

Alle vorhergehenden Mittheilungen haben bei dem grossen Interesse, welches wir selbst an der Sache nehmen, keinen anderen Zweck, als die Entscheidung der durch die vorliegende Schrift des Herrn Breusing uns ohne zu erwartenden Widerspruch noch nicht entschieden scheinenden Frage zu ermöglichen oder wenigstens zu erleichtern: ob nämlich die Geschichte der Mathematik u. s. w. G. Mercator von jetzt an in ihren Büchern als einen Flamänder — wie seit Jahrhunderten bisher immer geschehen — oder als einen Deutschen zu verzeichnen haben wird. Und wenn auch für uns bei der jetzigen Lage der Sache es kaum zweifelhaft ist, wie die Entscheidung dieser Frage dereinst ausfallen wird, so wollen wir doch gern in aller Bescheidenheit diese lediglich im Interesse der besseren Aufklärung dieses Gegenstandes von uns niedergeschriebenen Bemerkungen mit den Worten schliessen:

Adhuc sub judice lis est!

Greifswald im Juli 1869. Grunert.

Fig. 4

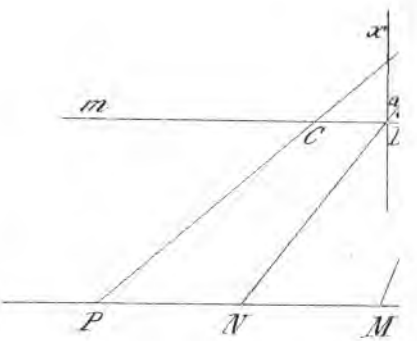


Fig. 1.

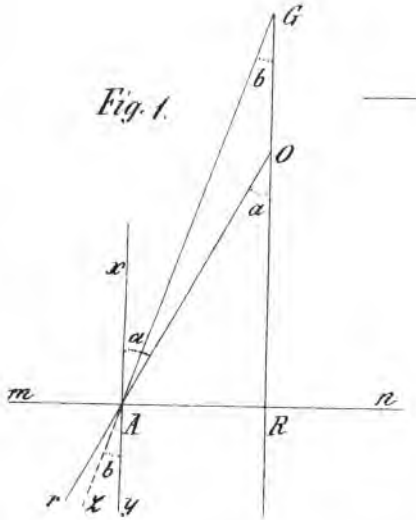
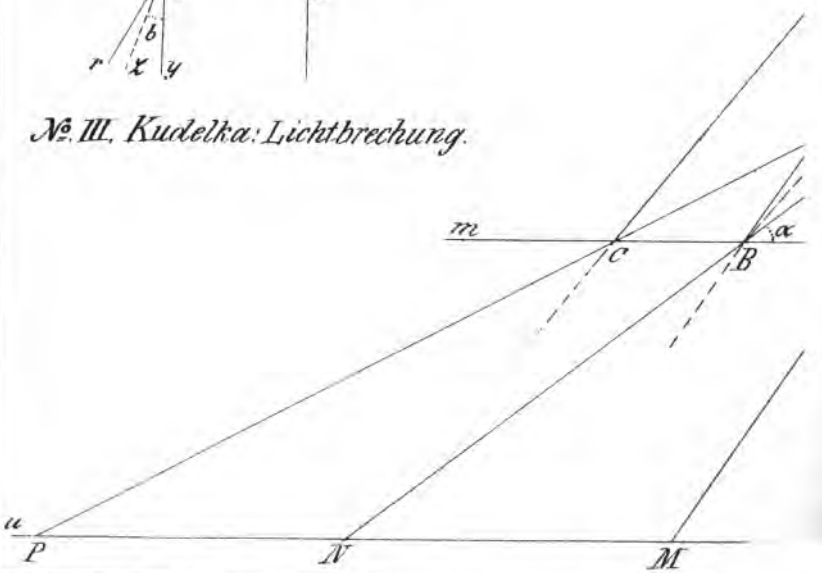


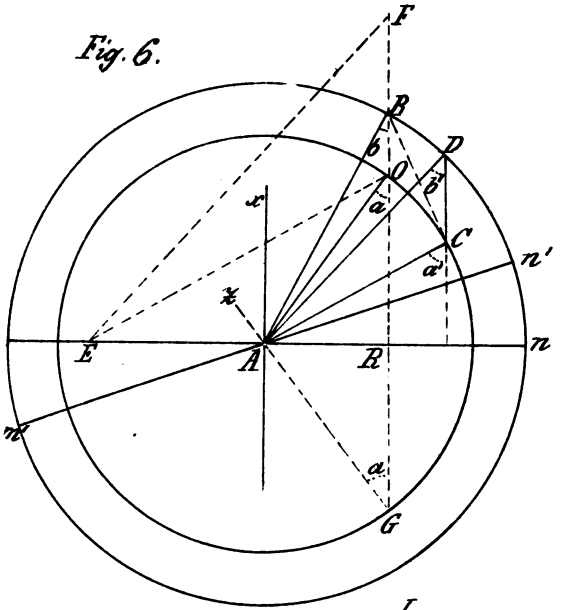
Fig. 2



№ III. Kudelka: Lichtbrechung.

STANFORD LIBRARY

Fig. 6.



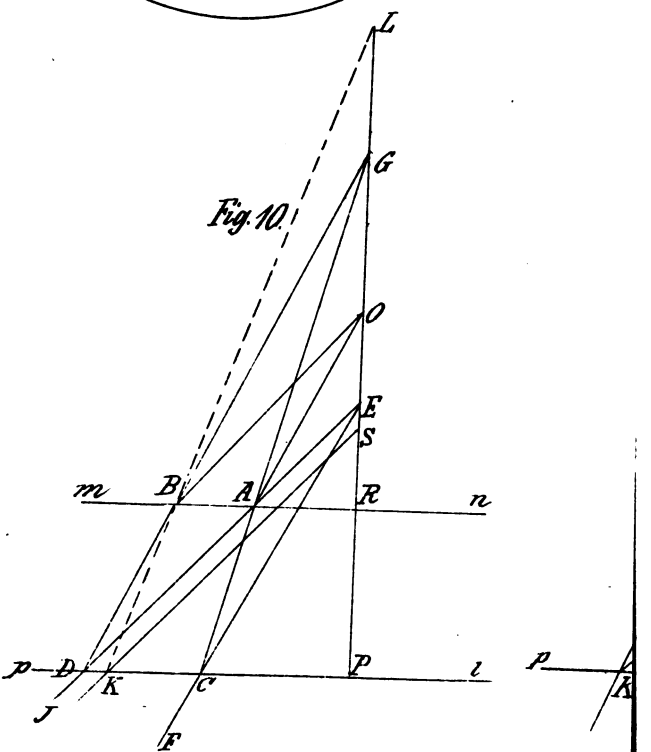


Fig. 10.

STANFORD LIBRARY

Fig. 13

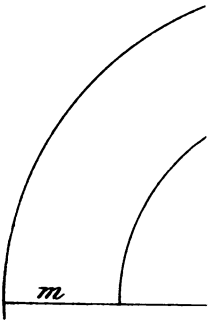


Fig. 14.

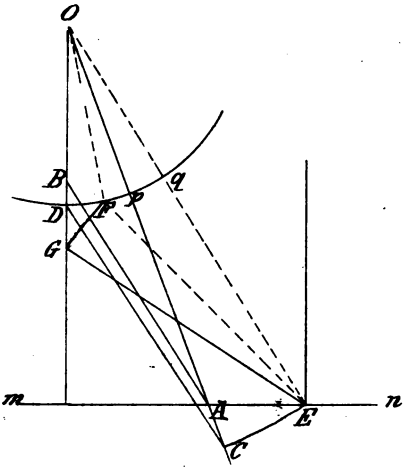
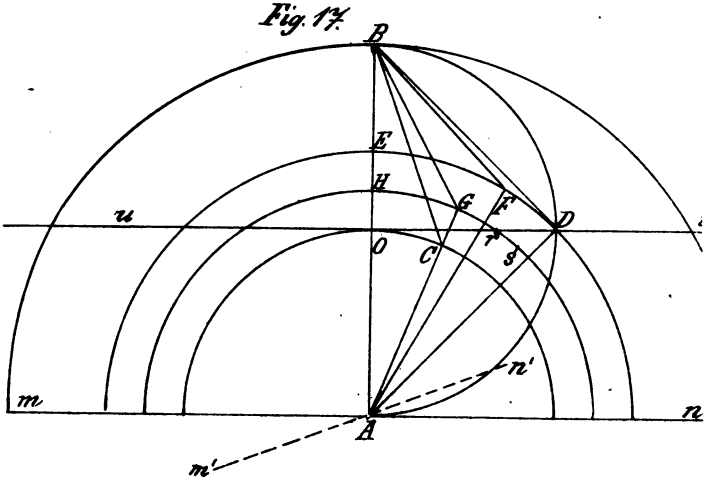


Fig. 17.



UND LIBRARY

Fig. I.

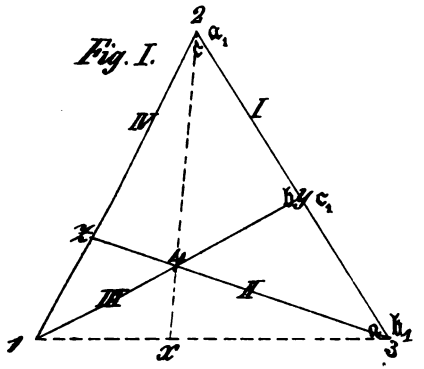
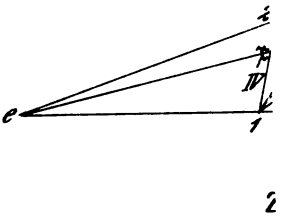


Fig. II.



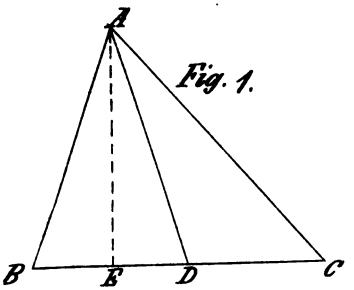


Fig. 1.

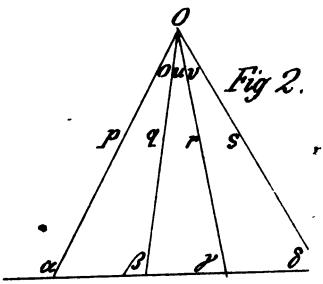


Fig 2.

Zu der Abhandlung №.

Fig. A.

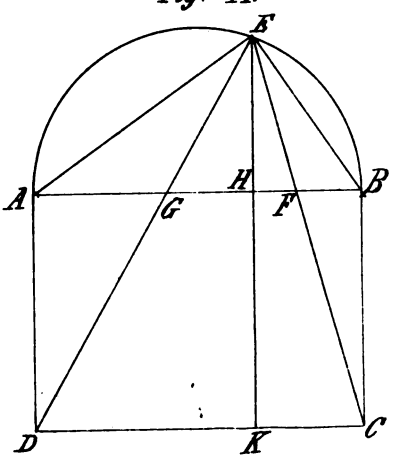


Fig. 1.

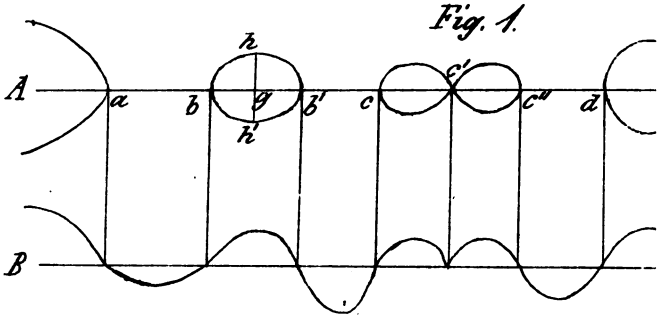
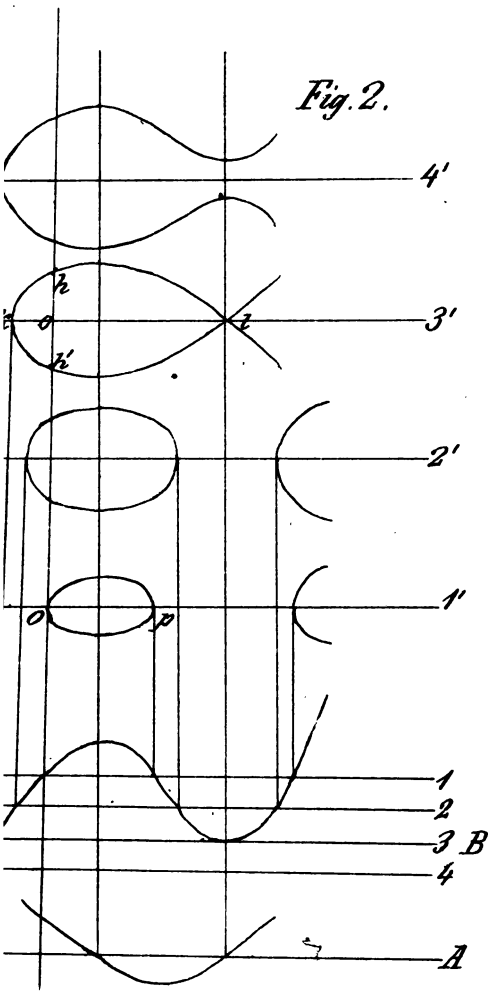
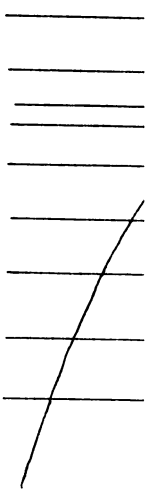


Fig. 2.





Nº. IV. ...
ment r...
à une, ...

Fig. 1.

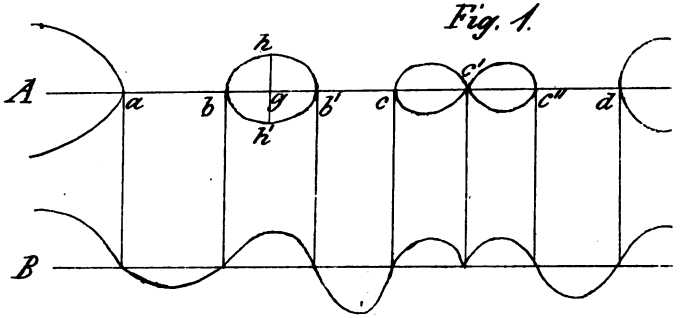
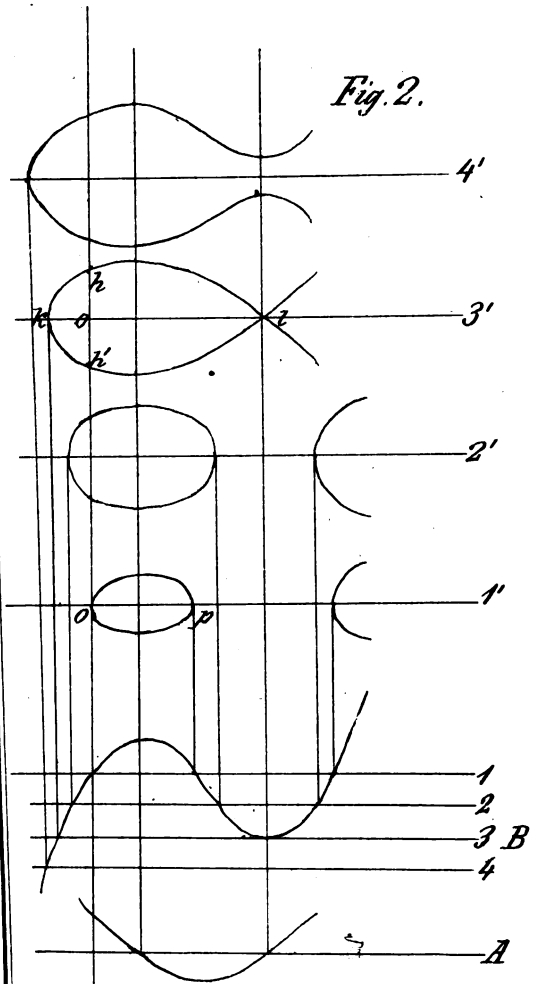
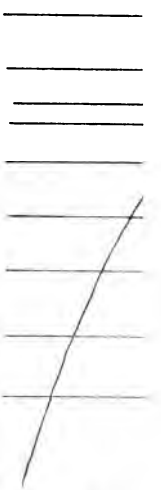


Fig. 2.





№ IV.
ment
à une,

AMFORD LIBRARY

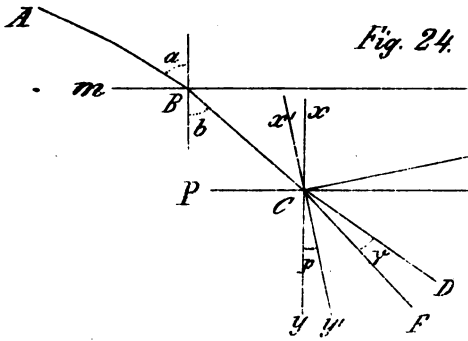


Fig. 24.

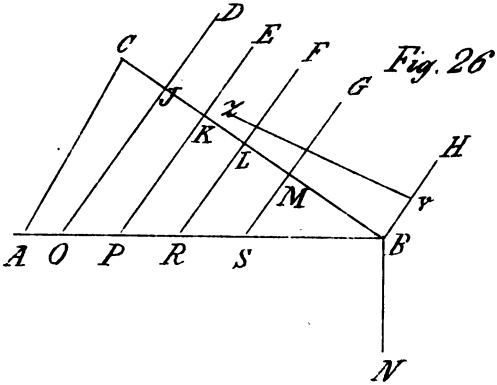


Fig. 26

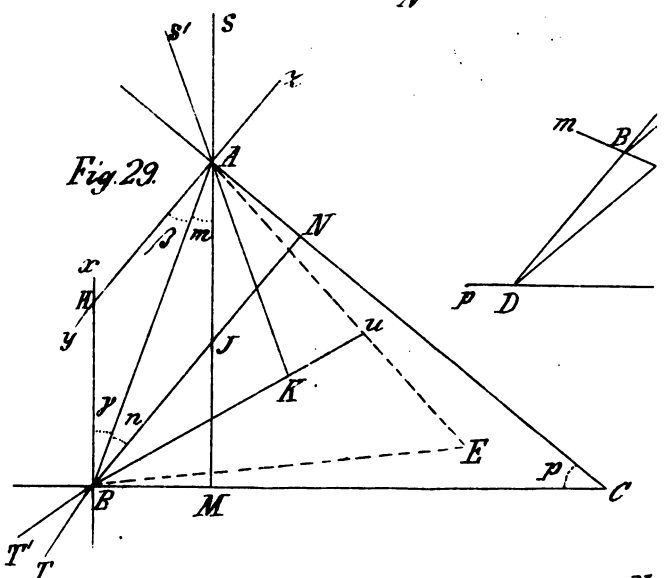


Fig. 29.

LOAN LIBRARY

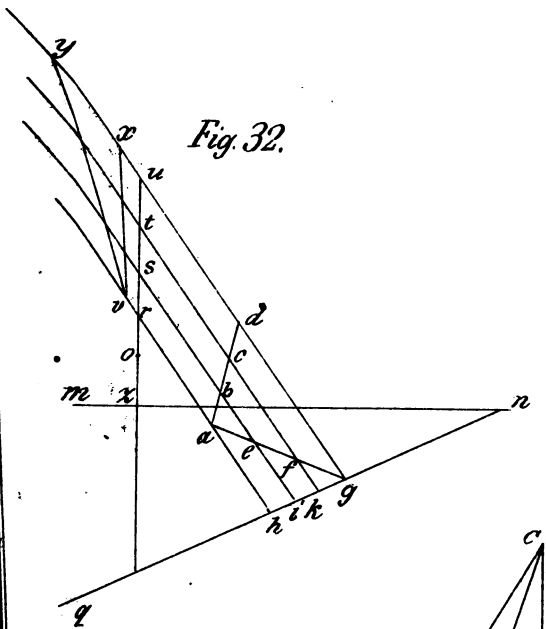
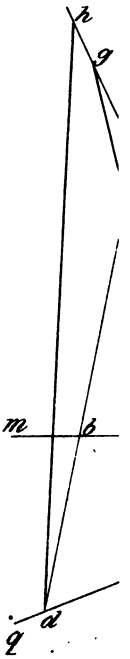


Fig. 32.



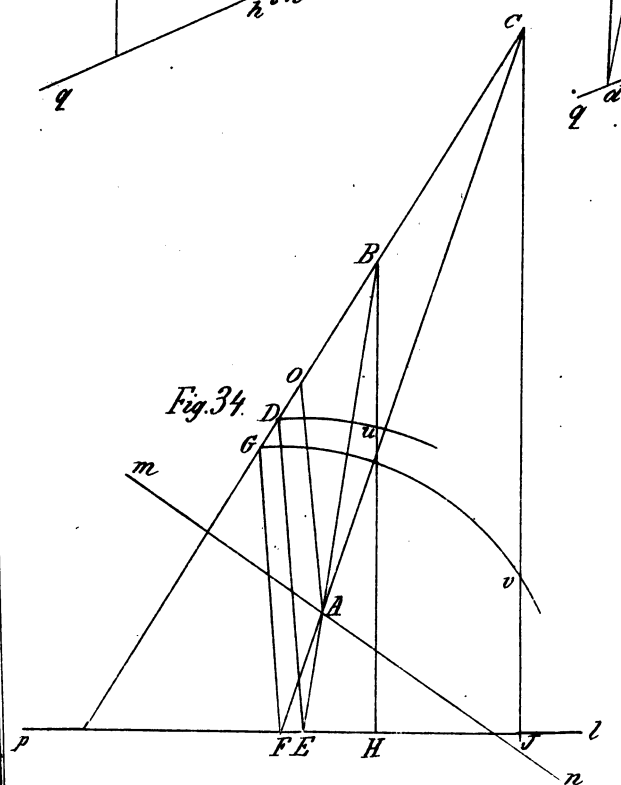


Fig. 34.

t

L

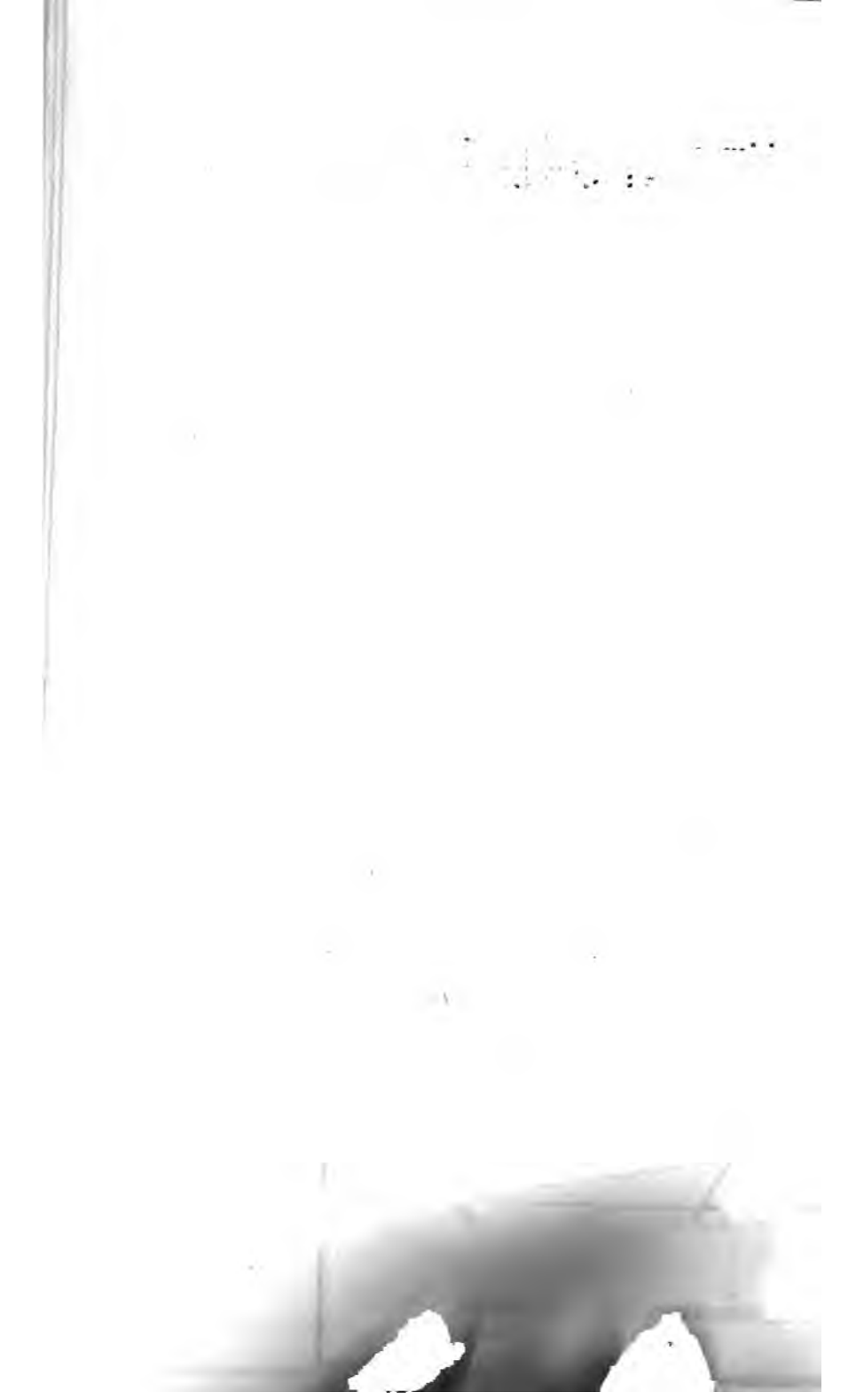
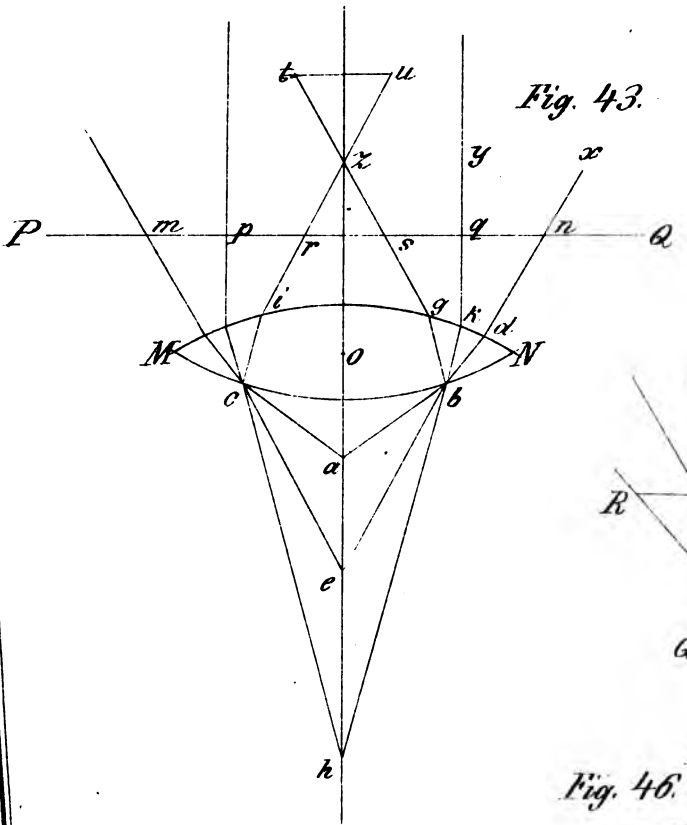


Fig. 43.



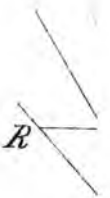
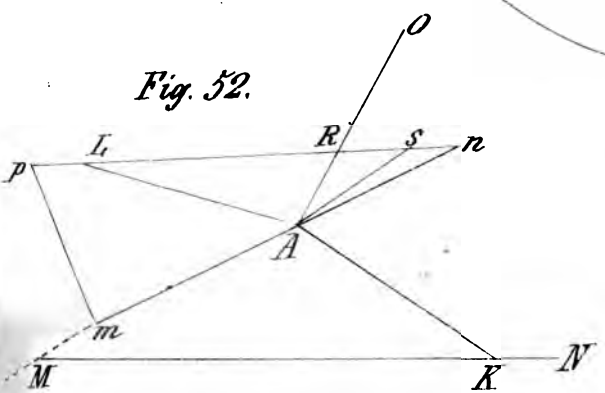


Fig. 46.

Fig. 52.



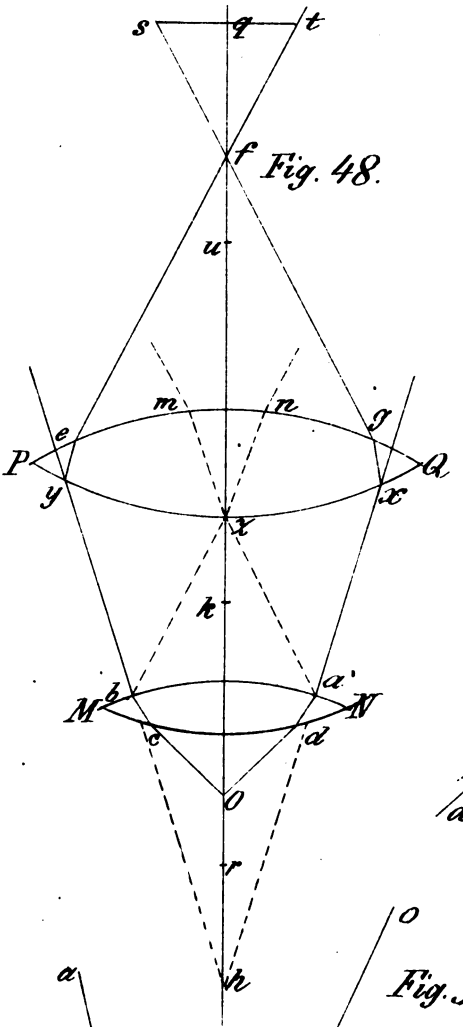
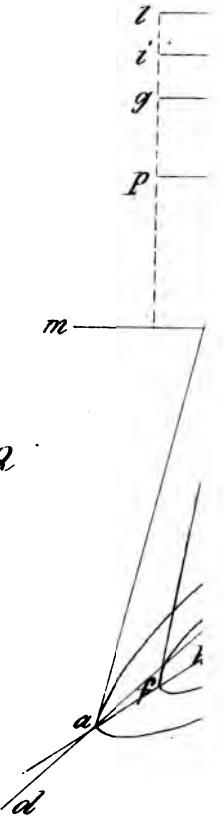


Fig. 48.



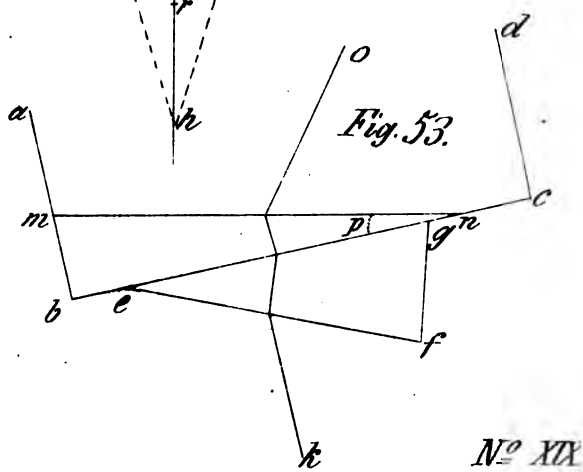


Fig. 53.

To avoid fine,
or before

Stanford University Libraries
3 6105 010 229 818

[redacted]
U. 50
510.5
Cl673

STORAGE AREA

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days

DATE DUE

28D DEC 07 1995
DEC 07 1995